Úvodem

Organizátoři

Zadání II. série

Termín uploadu: 19. 11. 2019 23.59
Termín odeslání: 18. 11. 2019

Úloha II.1 ... rychlovýtah 3 body

Říká se, že lidé ve výtahu bez větších problémů snesou zrychlení $a = 2{,}50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Také bychom chtěli dorazit do plánovaného patra co nejdříve. Pokud by se výtah čtvrtinu doby jízdy rozjížděl s tímto zrychlením, polovinu doby jel konstantní rychlostí a zbývající čtvrtinu doby zpomaloval, jak vysoko by dokázal vyjet za celkovou dobu jízdy $t = 1{,}00\,\mathrm{min}$?

Úloha II.2 ... slabý naviják 3 body

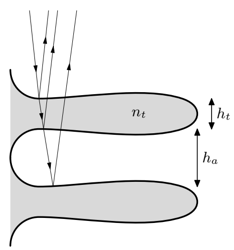
Uvažujme pevně zavěšenou kladku, na níž je umístěno lano zanedbatelné hmotnosti. Na jednom konci lana je upevněno závaží o hmotnosti m_1 a na druhém konci se ve stejné úrovni nachází naviják o hmotnosti m_2. V prvním případě je naviják ukotven na zemi a při navíjení lana se zvedá pouze závaží. V druhém případě je závaží pevně spojeno s navijákem tak, že při navíjení se zvedají společně závaží i naviják. Určete, ve kterém případě bude zapotřebí menší síly pro zdvihnutí závaží (a tudíž slabšího navijáku).

Úloha II.3 ... Dančina (ne)rovnovážná destička 6 bodů

Destička tloušťky $t = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ se šířkou $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ se skládá ze dvou částí. První část o hustotě $\varrho_1 = 0{,}20\cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ má délku $l_1 = 10\,\mathrm{cm}$, druhá část o hustotě $\varrho_2 = 2{,}2\cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ má délku $l_2 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Desku položíme na hladinu vody s hustotou $\varrho_v = 1{,}00\cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a počkáme, až se ustálí v rovnovážné poloze. Jaký úhel bude svírat rovina desky s hladinou vody? Jaká část destičky zůstane trčet nad hladinou?

Úloha II.4 ... motýli 7 bodů

Duhové modrozelené zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu MORPHO je důsledkem konstruktivní interference světla odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných blan na povrchu křídel). Stupně mají index lomu $n_\mathrm{t} = 1{,}53$ a tloušťku $h_\mathrm{t} = 63{,}5\,\mathrm{nm}$ a jsou odděleny mezerou vzduchu tloušťky $h_\mathrm{a} = 120{,}3\,\mathrm{nm}$, viz obrázek. Světlo na ně dopadá kolmo. Pro jaké vlnové délky viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum?



Úloha II.5 ... kolečko s pružinkou 8 bodů

Máme tenký dokonale tuhý homogenní disk o poloměru R a hmotnosti m, ke kterému je připojena gumička. Jedním koncem je upevněná ve vzdálenosti $2R$ od okraje disku a druhým koncem na jeho okraji. Gumička funguje jako dokonalá tenká pružina o tuhosti k, klidové délce $2R$ a zanedbatelné hmotnosti. Disk je upevněný ve svém středu tak, že se může v jedné rovině volně otáčet kolem tohoto bodu, ale nemůže se posouvat či měnit rotační rovinu. Určete závislost velikosti momentu síly, kterou bude gumička urychlovat či zpomalovat rotaci disku v závislosti na úhlové výchylce φ, a sestavte pohybovou rovnici disku.
Bonus Určete periodu malých kmitů soustavy.

Úloha II.P ... Země vzplála 10 bodů

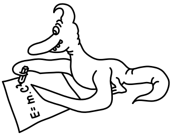
Odhadněte, o kolik by stoupl obsah CO_2 v atmosféře, pokud by shořela veškerá vegetace na zemském povrchu.

Úloha II.E ... potřebuji obejmout 13 bodů

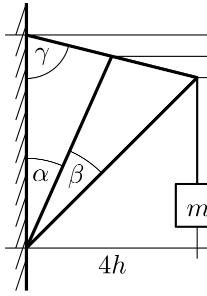
Změřte svůj objem několika různými způsoby.

Úloha II.S ... směs souřadnic a grafiky 10 bodů

1. Určete, kolik procent první stránky vzorového řešení úlohy 26-IV-5 zabírá černá barva. Řešení této úlohy najdete na `https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf`.
2. Představte si, že máte tužku, jejíž tuha má poloměr $r = 0{,}8\,\mathrm{mm}$. Tuha je vyrobena z grafitu v šesterečné soustavě, kde vzdálenost atomů uhlíku v jedné vrstvě je rovna $a = 2{,}46 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ a jednotlivé vrstvy jsou od sebe vzdáleny $c = 6{,}71 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Jakou délku tuhy spotřebujete na pomalování celé čtvrtky A4, pokud se papír při barvení pokryje průměrně 100 vrstvami tuhy?
3. Na obrázku 1 je zobrazena stabilní tyčová soustava, která se nachází v tíhovém poli se zrychlením g. Nejtlustší linka znázorňuje dokonale tuhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Na konci těchto tyčí je na nehmotném provázku upevněno závaží o hmotnosti m (na obrázku zobrazeno středně tlustou linkou). Tenké čáry symbolizují délky tyčí. Platí, že $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tyč mezi úhly α a β půlí horní tyč. Tyče mohou působit silou pouze ve svém směru (žádná složka není kolmá na tyč). Tyče jsou v místech dotyku s levou stěnou pevně upevněny. Určete, které tyče jsou namáhány v tlaku a které v tahu a spočítejte velikosti sil, které na ně působí.
4. Uvažujme spirálu, která začíná v počátku soustavy souřadné a odvíjí se rovnoměrně. Vzdálenost mezi jednotlivými závity a je konstantní. Popiště pohyb po této spirále ve vhodných souřadnicích.
5. Mějme šroubovici, která se odvíjí rovnoměrně. Šroubovice má konstantní poloměr R a konstantní vzdálenost mezi závity h. Popiště pohyb po šroubovici ve vhodných souřadnicích a určete, jaká je délka jednoho závitu této šroubovice.
6. *Bonus* Vymyslete nebo najděte (a citujte) souřadnice, které nejsou v knihovničce FO a byly by vhodné pro popis nějakého fyzikálního problému (uveďte, jakého). Souřadnice popište převodem z kartézských souřadnic na vámi vybrané a zpět. Dále ukažte, jak lze ve vašich souřadnicích obecně určit vzdálenost dvou bodů.



Řešení I. série



Obr. 1: Schéma so
tyčí.

Úloha I.1 ... D1 3 body; (chybí statistiky)

Kamioňák se rozhodne na dálnici předjet autobus. Kamion jede o 2 % vyšší rychlostí než autobus. Když je kamion přesně vedle autobusu, začne na dálnici pravotočivá zatáčka, která způsobí, že po celou zatáčku jedou obě vozidla vedle sebe a za nimi se už začíná tvořit značná kolona. Určete poloměr zatáčky (vnitřního jízdního pruhu), je-li šířka jízdních pruhů 3,75 m.

Matěj nemá rád kamiony na dálnicích.

Jako rychlost vozidla budeme uvažovat rychlost jeho středu. Dále předpokládejme, že jak kamion, tak autobus jedou středem svého pruhu. Vzdálenost kamionu a autobusu potom bude $d = 3{,}75\,\mathrm{m}$. Poloměry zatáček pravého a levého pruhu označíme po řadě r a R. Zřejmě platí $R = r + d$. Rychlost autobusu nechť je v, rychlost kamionu potom bude qv, kde $q = 1{,}02$. Jelikož celou zatáčku jedou vedle sebe, musí být jejich úhlové rychlosti stejné, neboli

$$\frac{v}{r} = \frac{qv}{R}\,,$$

$$qr = R = r + d\,,$$

$$r = \frac{d}{q-1} \doteq 200\,\mathrm{m}\,.$$

Poloměr zatáčky vychází přibližně 200 m.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha I.2 ... bateriový problém na dovolené 3 body; (chybí statistiky)

Jak dlouho potrvá vybití plně nabité autobaterie (12 V, 60 Ah), zapomene-li někdo vypnout potkávací světla auta, zamkne a odejde pryč? Konkrétně nás zajímá situace pro přední světla H4 (výrobce udává 55 W každé) a zadní světla P21/5W (dle výrobce 5 W každé). Pro jednoduchost považujte transport energie z baterie do světel za bezztrátový, odběr dalších spotřebičů (jako GPS sledování) za zanedbatelný a napětí na baterii za konstantní.

Karel. Ani se neptejte.

Nejprve určíme celkový výkon světel. Ten je součtem dvou předních a dvou zadních světel, tedy

$$P = 2 \cdot 55\,\mathrm{W} + 2 \cdot 5\,\mathrm{W} = 120\,\mathrm{W}\,.$$

Celková energie baterie je dána součinem jejího maximálního napětí $U = 12\,\mathrm{V}$ a maximální kapacity, tedy náboje $Q = 60\,\mathrm{Ah}$.

$$E = QU \doteq 2{,}6\,\mathrm{MJ}\,.$$

Energie se vybije za čas

$$t = \frac{E}{P} = 21\,600\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{h}\,.$$

Baterie se vybije zhruba za 6 hodin. Nejspíše ještě rychleji to nastane kvůli tomu, že nabitá nebude na 100 % a protože jsou nějaké ztráty ve vedení energie z baterie. Faktor, který může trochu prodloužit svícení, je pokles napětí na baterii a svícení žárovek pod nižším výkonem. Ale vězte, že to už stejně nenastartujete. V rámci historky ze života stačí i tak 4 hodiny. Ponaučení pro život tedy je - nezapomínejte vypnout světla!

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha I.3 ... infrasauna 6 bodů; (chybí statistiky)

Dano pokračuje ve vybavování svojí vily další saunou – tentokrát infrasaunou. Chce umístit zářivku těsně pod strop sauny ve výšce $H = 2{,}5\,\mathrm{m}$ *nad zemí. Emituje-li zářič energii s délkovým zářivým výkonem* $p = 1{,}2\,\mathrm{kW{\cdot}m^{-1}}$*, jaké budou intenzita a celkový výkon záření dopadajícího na povrch lidského těla zhruba* $h = 50\,\mathrm{cm}$ *nad zemí? Zářivka je rovná, září homogenně a je upevněna těsně pod středem stropu od jednoho kraje sauny do druhého.*
Nápověda Pro jednoduchost uvažujte, že stěny, kde zářivka končí, a strop jsou zrcadla a že podlaha a stěny, kterých se zářivka nedotýká, záření dokonale absorbují a nevyzařují zpět do místnosti. *Karel byl ve wellness na Slovensku.*

Nápověda se nám bude hodit. Říká nám, že si můžeme představit, že záření se šíří stejně, jako kdyby zářivka byla nekonečně dlouhá a měla nad sebou zrcadlo. Pokud bychom toto omezení neměli, museli bychom uvažovat, že každý materiál nějakou část elektromagnetických vln odráží a nějakou absorbuje. Absorbovanou energii potom zase vyzařuje zpět. Toto vyzařování ale obvykle probíhá na jiných vlnových délkách – podle toho, na jakou teplotu se materiál zahřeje. K určení této teploty bychom ale museli znát tepelnou kapacitu a vodivost materiálu. Navíc by se oblast bezprostředně u zdroje zahřála na výrazně vyšší teplotu než okolí a úloha by nejspíše nešla řešit jinak než numericky. Naše zjednodušené řešení je sice o něco méně přesné, ale mělo by být docela dobrým odhadem.

Úloha je zajímavá v tom, že intenzita záření dopadajícího na jednotkovou plochu neklesá jako obvykle s druhou mocninou vzdálenosti, ale klesá lineárně. To si můžeme odvodit například tak, že si kolem našeho tyčového zářiče představíme válec[1], který je s ním souosý. Ať bude mít válec jakýkoliv poloměr, celková energie záření dopadajícího na jeho plášť bude stále stejná. Záření vycházející podstavami nás nemusí zajímat, protože podle úvahy výše je situace stejná, jako kdyby byl zářič nekonečně dlouhý. Pro samotnou zářivku bez stěn by pro intenzitu záření I_0 ve vzdálenosti r od zářivky platilo

$$I = \frac{p}{2\pi r}\,.$$

K tomu musíme ještě uvažovat zrcadlo, které je nad zářivkou. To nám ale intenzitu záření jenom zdvojnásobí, protože díky němu se polovina záření odrazí zpět dolů. Závislost intenzity na vzdálenosti od zářivky tak bude

$$I = \frac{p}{\pi r}\,.$$

Vzdálenost povrchu od lidského těla je $r = H - h$, tedy intenzita vychází $I \doteq 191\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Celkový výkon dostaneme, pokud odhadneme, jakou plochu má lidské tělo. Jako přibližný odhad pro pozici vleže na zádech či na břiše můžeme vzít[2] například průměrnou výšku člověka $a = 1{,}7\,\mathrm{m}$ a průměrnou hodnotu transverzálního rozměru hrudníku $b \doteq 0{,}3\,\mathrm{m}$ a tyto hodnoty vynásobit, jako kdyby byl člověk kvádrem. Odhad to nebude moc přesný, ale pokud bereme rozměr hrudníku, tak se částečně vykompenzuje chyba toho, že jsme zapomněli na ruce a že naopak nohy a hlava jsou užší. Takto odhadnutá plocha člověka je $S = ab \doteq 0{,}5\,\mathrm{m^2}$ a výkon, který bude dopadat na povrch lidského těla, vychází

$$P = IS = \frac{p}{\pi\,(H-h)}ab \doteq 96\,\mathrm{W}\,.$$

Na povrch člověka dopadá zhruba $P \doteq 100\,\mathrm{W}$ záření.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha I.4 ... disco koule   7 bodů; (chybí statistiky)

Bylo nebylo, Mišo chtěl uspořádat největší párty vůbec. K tomu je ale potřeba pořádná disco koule, a tak si nechal Měsíc obložit zrcadly, čímž z něj udělal největší disco kouli, která měla odrážet světlo od Slunce. Je zřejmé, jak párty dopadla, ale nás zajímá nejmenší možný rozdíl magnitud Slunce a disco koule při pohledu ze Země. *Matěj to rozjel na plné koule.*

[1] V literatuře je někdy označován jako *Gaussův válec.*
[2] `http://www.n-i-s.cz/cz/parametry-populace/page/33/`

Mišo zmenil Mesiac na guľové zrkadlo. Ak si v prvom priblížení Slnko predstavíme ako bodový zdroj svetla v nekonečne, nezáleží na vzdialenosti Mesiaca a Zeme od Slnka. Situáciu si teda môžeme predstaviť ako guľové zrkadlo osvetlené (takmer) rovnomerne slnečným svetlom, okolo ktorého hľadáme najviac osvetlené miesto vo vzdialenosti Zem-Mesiac od neho.

Guľové zrkadlo zrejme odráža najviac svetla dopredu naspäť ku zdroju žiarenia. Bude nás preto zaujímať situácia v splne. Je však dôležité podotknúť, že ak by boli všetky tri telesá presne na jednej priamke, nastane zatmenie Mesiaca. Pre náš výpočet ale nie je veľký rozdiel medzi polohou tesne vedľa tieňa a polohou na priamke, ak tienenie Zeme nebudeme uvažovať.

Slnko sa v zrkadle zobrazí (podľa zobrazovacej rovnice pre $a_1 \gg f$ v paraxiálnej aproximácii) v polovici vzdialenosti medzi stredom Mesiaca a bodom na jeho povrchu najbližšie k Zemi. Navyše bude obraz Slnka extrémne zmenšený, takmer bodový. Na úrovni obežnej dráhy Zeme Slnko dodáva tok energie $F_0 = 1\,360\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Po odraze od zrkadla sa bude tok zmenšovať ako pri bodovom zdroji $F \propto x^{-2}$. Vzdialenosť povrchu Mesiaca od obrazu zdroja v zrkadle je

$$a_2 = \frac{r_\mathrm{M}}{2}\,,$$

kde $r_\mathrm{M} = 1\,737\,\mathrm{km}$ je polomer Mesiaca. Vzdialenosť od zdroja k povrchu Zeme je približne

$$s = R - a_2 - r_\mathrm{Z}\,,$$

kde $R = 356 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ je vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca v perigeu[3] a $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ je polomer Zeme. Tok energie od odrazu na povrchu Zeme teda máme ako

$$F = F_0 \left(\frac{a_2}{s}\right)^2\,.$$

Rozdiel zdanlivých magnitúd (jasností) Δm je definovaný pomocou Pogsonovej rovnice ako

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)\,.$$

Po dosadení F a F_0 za toky dostávame

$$\Delta m = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{F}{F_0}\right) = 5 \log_{10}\left(\frac{s}{a_2}\right) = 13{,}0\,.$$

Zdanlivá jasnosť Slnka je $-26,7$, čo dáva jasnosť odrazu $-13,7$ magnitúd. To je asi o jednu hviezdnu veľkosť jasnejšie ako Mesiac v splne v perigeu.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

[3]Zaujíma nás najmenší možný rozdiel magnitúd Slnka a jeho odrazu, odraz je najjasnejší keď je k nám Mesiac najbližšie.

Úloha I.5 ... obecně relativistická

9 bodů; (chybí statistiky)

Starman se před odletem do kosmu na cestu k Marsu ve svém voze Tesla Roadster domluvil s Muskem, že jakmile bude ve vzdálenosti $r = 5{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ od hmotného středu Země, tak na něj Musk zasvítí výkonným zeleným laserem. Vlnová délka laseru se vlivem gravitačního pole Země zvětší. Porovnejte tuto změnu vlnové délky s vlivem elektromagnetického Dopplerova jevu, vzdaluje-li se Starman od Muska rychlostí $v = 4{,}0\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Uvažujte, že oba jevy působí zvlášť. *Vašek by rád výlet se Starmanem.*

Částí úlohy je vyřešit gravitační posuv vlnové délky v centrálním gravitačním poli. Tento efekt je dán čistě relativistickými jevy, které řeší obecná relativita. My se však pokusíme problém vyřešit nejdříve intuitivně užitím klasické fyziky. Poté si ukážeme řešení, které vychází z jednoho ze základních principů obecné teorie relativity, principu ekvivalence.

Klasický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky

Uvažujme pouze vliv gravitačního pole Země. Pro vyřešení této úlohy využijeme zákon zachování energie pro fotony vyzářené laserem. Náš foton se pohybuje v centrálním gravitačním poli Země, a proto při jejím opouštění se jeho gravitační potenciální energie zvýší z hodnoty $E_{\mathrm{p},0}$ na hodnotu E_p. Změnu gravitační potenciální energie vzhledem k ostatním tělesům (jako např. Slunci) zanedbáváme. Změna této energie se projeví změnou frekvence fotonu. Při výstupu z laseru na povrchu Země bude mít foton frekvenci f_0 a u Starmana frekvenci f. Celkově ze zákona zachování energie dostáváme rovnost

$$hf_0 + E_{\mathrm{p},0} = hf + E_\mathrm{p}\,, \tag{1}$$

kde h je Planckova konstanta. Dále musíme najít vztah pro potenciální energii. Přírůstek potenciální energie gravitačního pole je rovna

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \tag{2}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je infinitezimální přírůstek polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}_g$ je gravitační síla, pro kterou v našem případě podle Newtonova gravitačního zákona platí

$$\boldsymbol{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,,$$

kde G je gravitační kostanta, m je hmotnost fotonu, M je hmotnost Země, r je vzdálenost od hmotného středu Země a $\hat{\boldsymbol{r}}$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru $\boldsymbol{r}$. Síla $\boldsymbol{F}_g$ má stejný směr a opačnou orientaci jako polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Proto rovnice (2) pro přírůstek potenciální energie přejde do tvaru

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = F_g\mathrm{d}r = G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r\,, \tag{3}$$

kde F_g je velikost síly $\boldsymbol{F}_g$. Integrováním levé a pravé strany rovnice (3) dostaneme

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM}{r} + C\,,$$

kde C je integrační konstanta, která se obvykle volí jako $C = 0$, aby byla nulová hladina potenciální energie v nekonečnu. Tuto potenciální energii dosadíme do rovnice (1),

$$hf_0 - G\frac{m_0 M}{r_0} = hf - G\frac{mM}{r}\,.$$

Otázkou je, co máme dosadit za hmotnost fotonu. Využijeme Einsteinova vztahu ekvivalence energie a hmotnosti $E = mc^2$ a za hmotnost dosadíme $m = hf/c^2$. Po dosazení rovnici vydělíme Planckovou konstantou h,

$$f_0 - G\frac{f_0 M}{r_0 c^2} = f - G\frac{fM}{rc^2}\,.$$

Z této rovnice vyjádříme poměr frekvencí f/f_0,

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1 - \frac{GM}{r_0 c^2}}{1 - \frac{GM}{rc^2}}\,.$$

Pro poměr vlnových délek λ/λ_0 platí reciproký vztah

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \frac{GM}{rc^2}}{1 - \frac{GM}{r_0 c^2}}\,.$$

Uvědomme si, že v našem případě je člen $\frac{GM}{r_0 c^2}$ velmi malý (tj. $\frac{GM}{r_0 c^2} \ll 1$), popř. člen $\frac{GM}{rc^2}$, a proto můžeme použít aproximaci $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, jedná se o první dva členy Tayolorova rozvoje okolo bodu $x = 0$. Ke tvaru této aproximace můžeme také rychle dospět rozšířením zlomku $\frac{1}{1+x}$ výrazem $1-x$. Jmenovatel tak nabyde tvaru $1-x^2$. Vzhledem k tomu, že provádíme aproximaci do řádu x, můžeme člen x^2 ve jmenovateli zanedbat. Použitím aproximace dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)\left(1 + \frac{GM}{r_0 c^2}\right) \approx 1 - \frac{GM}{rc^2} + \frac{GM}{r_0 c^2}\,.$$

Relativní rozdíl pak je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\,. \tag{4}$$

Dosadíme-li číselné hodnoty $M = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $r_0 = 6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ a další, zjistíme, že rozdíl vlnové délky světla, které Starman pozoruje a které Musk ze Země vyzáří, je řádově jen $10^{-9}\lambda_0$.

Elektromagnetický Dopplerův jev

Nyní budeme samostatně uvažovat elektromagnetický (relativistický) Dopplerův jev. V případě, že se zdroj a příjemce vzájemně vzdalují ve směru šíření signálu rychlostí v, platí pro něj vztah

$$f = f_0\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\,,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Jednoduchým přepočtem podle vztahu $c = \lambda f$ dostaneme pro vlnové délky vztah

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \,.$$

Rychlost v, kterou se Starman vzdaluje od Země je v porovnání s rychlostí světla c velmi malá (nerelativistická). Můžeme tak využít přiblížení $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2x$ pro malá x (tj. $x \ll 1$), jedná se o první dva členy Taylorova rozvoje okolo bodu $x = 0$. Po aproximaci dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{1 + \frac{v}{2c}}{1 - \frac{v}{2c}} \,.$$

Použijeme-li ještě aproximaci $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, kterou jsme již jednou použili výše, dostaneme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 + \frac{v}{2c}\right)^2 \approx 1 + \frac{v}{c} \,.$$

Relativní rozdíl vlnových délek je pak

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{v}{c} \,. \tag{5}$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme, že rozdíl vlnových délek způsobený elektromagnetickým Dopplerovým jevem je přibližně $10^{-5}\lambda_0$. Z vypočtených hodnot můžeme usoudit, že vliv Dopplerova jevu je v našem problému asi o 4 řády větší než vliv gravitačního pole Země.

Obecně relativistický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky

Jedním ze základních principů, na nichž je vybudovaná obecná teorie relativity, je princip ekvivalence. Názorně je tento princip představen v myšlenkovém experimentu s tzv. Einsteinovým výtahem. Podle principu ekvivalence nemůže osoba nacházející se v uzavřeném výtahu žádným experimentem zjistit, zda se výtah nachází v homogenním gravitačním poli, anebo zrychluje s konstantním zrychlením. V prvním případě na osobu působí gravitační síla a v druhém případě setrvačná síla. Jedná se tedy o princip ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti.

Pro úplnost dodejme, že druhým krajním případem je situace, kdy není schopna osoba uvnitř uzavřeného výtahu rozlišit, zda se nachází ve volně padajícím výtahu v homogenním gravitačním poli, anebo jako volný objekt ve vakuu.

Einsteinovým výtahem vyřešíme i naši úlohu. Foton v gravitačním poli umístíme do myšleného Einsteinova výtahu o malé výšce Δh (jedná se o klidovou výšku), který se vzhledem k Zemi nepohybuje. Foton poletí od podlahy ke stropu. U podlahy má vlnovou délku λ_p a u stropu λ_s. Vlivem gravitačního pole bude vlnová délka λ_s větší než λ_p. Kvantitativní výsledek tohoto experimentu neznáme. Víme však, že bude stejný jako v druhé situaci. V té se výtah nachází ve vakuu a zrychluje se zrychlením $\boldsymbol{a}$, které má stejnou velikost a opačnou orientaci jako intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}$ v první situaci.

Na obě situace budeme nahlížet z pohledu pozorovatele uvnitř výtahu. Z první situace víme, že doba letu fotonu výtahem je rovna

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{c}\,.$$

Vzhledem k tomu, že se nacházíme v relativitě, upřesňujeme, že se jedná o čas, který by naměřil onen pozorovatel ve výtahu. Ten samý čas naměří v druhé situaci. V druhé situaci však za tento čas zrychlí výtah o rychlost

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{a\Delta h}{c}\,.$$

To znamená, že rozdíl rychlosti při vyzáření fotonu u podlahy výtahu, kde měl vlnovou délku λ_p, a při detekci fotonu u stropu výtahu, kde měl vlnovou délku λ_s, je právě Δv. Osoba ve výtahu v této situaci by tedy spočítala změnu vlnové délky fotonu podle elektromagnetického Dopplerova jevu, který už umíme popsat kvantitativně.

Využijeme už dříve získané aproximace, tj. rovnice (5), podle které v našem případě platí

$$\frac{\lambda_s - \lambda_p}{\lambda_p} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_p} \approx \frac{\Delta v}{c} = \frac{a\Delta h}{c^2}\,.$$

Vzhledem k tomu, že v našem problému se Starmanem se foton pohybuje v nehomogenním gravitačním poli, musíme přejít k infinitezimálním změnám,

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \frac{K\mathrm{d}h}{c^2}\,.$$

Zde píšeme už rovnost, neboť při přechodu k infinitezimálním přírůstkům všechny členy, které jsme zanedbali, vymizí. Zároveň jsme za zrychlení dosadili velikost intenzity gravitačního pole $\boldsymbol{K}$, pro kterou platí

$$K = \frac{GM}{r^2}\,.$$

Dosazením dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r^2}\mathrm{d}r\,.$$

Zde je infinitezimální přírůstek vzdálenosti $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$. Integrováním levé a pravé strany poslední rovnice dostaneme

$$\ln\frac{\lambda}{\lambda_0} = -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\,.$$

Nyní použijeme aproximace $\ln x \approx x - 1$ v okolí bodu $x = 1$. Víme totiž, že vlnová délka se příliš nezmění. Dostáváme tedy

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\,.$$

To je stejný výsledek jako v případě klasického přístupu (rovnice (4)). Uvědomme si však, že v případě klasického přístupu jsme postupovali spíše tak, že jsme jen použili několik, na první pohled vhodných, známých vzorečků. Použití některých vzorečků jsme ani pořádně neodůvodnili, což ale nelze, protože gravitační posuv vlnové délky je čistě obecně relativistický jev. Správný postup řešení příkladu je tedy pouze skrze obecnou teorii relativity. V případě, že bychom chtěli uvažovat jak gravitační posuv vlnové délky, tak elektromagnetický Dopplerův jev zároveň, se už bez nástrojů obecné teorie relativity neobejdeme.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha I.P ... ničitel planet 10 bodů; (chybí statistiky)

Jak velká by mohla být co nejmenší a nejlehčí zbraň, která by dokázala zničit planetu? Samozřejmě ještě v rozumném čase v rámci lidského života a čím rychleji, tím lépe.
Karel se moc dívá na sci-fi, tentokrát na titulky Men in Black II.

V této úloze je naším úkolem se zamyslet nad tím, jak zničit planetu. Pro tento těžký úkol ji nejprve definujme, ať víme, jak na tom jsme. Nechť má tedy naše planeta hmotnost m, poloměr r a vzdálenost od slunce R, které má hmotnost M.

Nyní se musíme zamyslet nad tím, jakým způsobem můžeme takovou planetu zničit. Slovo zničit je celkem nejasné, budu tedy uvažovat, že znamená totální zničení, že již nic z planety nezbyde. To je možná jasnější, nicméně stále ne přesné. Prohlašme tak, že veškeré možnosti totálního zničení však spadají do těchto kategorií:

1. Planeta je rozmetána na kousíčky.
2. Planeta je stlačena do tak malého objemu, že se z ní stane černá díra.[4]
3. Hmota planety se „vypaří“ nebo nějakým způsobem přemění.
4. Planeta spadne do slunce.

Samozřejmě nemusíme počítat s totálním zničením, pro účel úlohy by mohlo stačit i slabší typ. Mohli bychom například za zničení požadovat stav, kdy na planetě nemůže existovat život. Kvůli všemožným bakteriím je však i toto kritérium vágní – některý život dokáže přežít i ve volném vesmíru. Vzhledem k obtížnosti formulace nějaké definice vyjmenujme způsoby slabšího typu zničení než totální:

- Planeta je rozbita na několik kusů.
- Planeta vyletí pryč ze své sluneční soustavy.

[4] Tady bychom mohli uvažovat, že planeta se nemusí nutně stát černou dírou, že stačí např. velikost fotbalového míče. Nicméně to je věc definice, my uvažujeme totální zničení.

Nyní si všechny scénáře jeden po druhém probereme a prozkoumáme potřebné zbraně. Budeme se přitom zaměřovat na energii potřebnou k tomu, aby planeta byla zničena, pokud nenatrefíme na jiná omezení. Podle toho můžeme pak porovnat, která metoda je nejefektivnější. Nakonec budeme muset vymyslet, jak energii můžeme svázat s velikostí přístroje.

Závěrem této sekce chceme dodat, že za zničení planety nepovažujeme vyhlazení života či jeho omezení, neboť mohou existovat planety i bez života (a život vně planety). Mohou také existovat zbraně, které zničí život, ale planetu ne, jakožto i zbraně, které zničí planetu, ale život na ní ne. Lze tedy vidět, že zničení planety a zničení života jsou dvě zcela odlišné problematiky.

Rozmetání na kousíčky

Spočítejme tedy energii potřebnou k tomu, abychom rozmetali planetu na kousíčky, které spolu gravitačně neinteragují. Budeme k tomu potřebovat znát gravitační potenciál $V(r) = -G\frac{m}{r}$, což je veličina, která říká, že máme-li těleso o hmotnosti m a druhé o hmotnosti M, tak potřebujeme $U = |V \cdot M|$ energie, abychom těleso M dostali mimo gravitační dosah tělesa m (neboli do nekonečna). Dále také potřebujeme uvažovat, že planeta má konstantní hustotu, díky čemuž můžeme psát:

$$\frac{m}{r^3} = \frac{M}{R^3} = const.\,,$$

$$R = \left(\frac{Mr^3}{m}\right)^{1/3}\,,$$

kde označme m resp. r je hmotnost resp. poloměr planety a M resp. R nyní znamená hmotnost resp. poloměr jakési „podplanety“, což je koule, kterou dostaneme, když uvažujeme hmotu vzdálenosti nejvýše R od středu planety.

Nyní spočítejme celkovou potřebnou energii na rozmetání planety. Budeme sčítat, tedy integrovat od středu planety ven malé příspěvky energie $\mathrm{d}U$. Pro tento příspěvek platí:

$$\mathrm{d}U = V(R)\cdot \mathrm{d}M = -G\frac{M}{R}\mathrm{d}M = -G\frac{m^{1/3}M^{2/3}}{r}\mathrm{d}M = U(M)\,.$$

Tento vzorec vskutku platí, neboť gravitační síla působící na hmotný bod uvnitř kulové slupky je nulová. Pro gravitační potenciál slupky tedy stačí spočítat potenciál vzhledem k podplanetě. Nyní nám nezbývá než sečíst všechny potenciály $\mathrm{d}U$, a tedy integrovat:

$$U = \int_{planeta} \mathrm{d}U = \int_0^m V\mathrm{d}M = \int_0^m -G\frac{M^{2/3}m^{1/3}}{r}\mathrm{d}M = -G\frac{m^{1/3}}{r}\int_0^m M^{2/3}\mathrm{d}M = -\frac{3}{5}\frac{Gm^2}{r}\,.$$

Tím jsme obdrželi energii $E_{\text{rozmetání}} = -U$ potřebnou na zničení planety touto cestou. Samozřejmě jsme zanedbávali gravitační působení ostatních těles.

Rozbití na kusy

Tento způsob je vlastně méně důkladné rozmetání na kousíčky, lze tedy předpokládat, že bude snazší na uskutečnění. Je však velmi těžké určit nějakou hranici tohoo, jak moc nebo málo planet ustačí rozmetat. Mohli bychom kupříkladu považovat rozmetání nějaké části planety, pak bychom potřebovali jen nějaké procento energie výše.

Považujeme za rozumný kompromis požadovat, aby se planeta ze svého poloměru nějakou vnější silou roztáhla tak, aby měla dvojnásobný poloměr, načež by se pak zhroutila zpátky do sebe a byla by tak zničená. Energie potřebná na takovýto čin lze vyjádřit pomocí vzorce pro potenciál planety odvozený v minulém případě.

$$E_{\text{kus}} = E_{\text{rozmetání}}(r) - E_{\text{rozmetání}}(2r) = \frac{1}{2} E_{\text{rozmetání}}\,,$$

kde jsme energii rozmetání brali jako funkci poloměru planety. Vidíme, že jsme si moc nepomohli, nedosáhli jsme ani řádového úbytku energie.

Stlačení do černé díry

Nejprve si potřebuji vypočítat Schwarzschildův poloměr, tedy poloměr, který zaujme výsledná černá díra. Ten vypočítám jako

$$r_{\text{s}} = \frac{2Gm}{c^2}\,,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a m hmotnost planety.

Jistojistě při stlačování planety pomůže gravitační energie. Tu vypočítáme obdobně jako v minulé sekci. Stačí si uvědomit, že $U = U(r)$, a že celková potřebná energie je $E_{\text{g}} = U(r_{\text{s}}) - U(r)$. Nicméně vzhledem k tomu, že $r_{\text{s}} \ll r \equiv \frac{1}{r_{\text{s}}} \gg \frac{1}{r}$, stačí uvažovat $E_{\text{g}} = U(r_{\text{s}})$. Potom dostaneme vzorec pro gravitační energii:

$$E_{\text{g}} = -\frac{3}{5}\frac{Gm^2}{r_{\text{s}}} = -\frac{3}{5}\frac{Gm^2}{r_{\text{s}}}$$

Kolik energie nás ale bude naše stlačování stát? Stlačování černé díry je omezeno tím, že stlačujeme kladné protony, které se odpuzují. Měli bychom tedy spočítat energii potřebnou na stlačení protonů na Schwarzschildův poloměr. Naštěstí je však gravitace i elektrická interakce coulombická síla, pročež můžeme potřebnou energii vypočítat analogicky ke gravitační:

$$E_{\text{coulomb}} = -\frac{3}{5}\frac{q^2}{r_{\text{s}}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

Nyní si můžeme povšimnout, že kladný náboj planety je přímo úměrný její hmotnosti. Dále je elektromagnetická interakce je zhruba 10^{36} krát silnější než gravitační. Z této analýzy můžeme usoudit, že zatímco absolutní hodnota gravitační energie stlačení a rozmetání je od sebe vzdálená o faktor $\frac{r}{r_s}$, což je pro Zemi cca 10^6. Oproti tomu je elektrická energie příliš velká.

Naše analýza rozhodně není kompletní, např. se v ní zanedbávají elektrony či jaderné síly. Nicméně máme zde rozdíl v relativně mnoha řádech, takže se můžeme spolehnout alespoň na to, že výhodnější je planetu rozmetat.

Přeměna planety

Pokud bychom nějakým způsobem měnili chemické složení planety, pořád by se jednalo o planetu, takže bychom ji nezničili. Musíme tedy planetu anihilovat kompletně. K anihilaci bychom přitom mohli využít antihmotu. Pro připomenutí: antihmotu můžeme nějakým způsobem vytvořit a k vytvoření hmotnosti μ potřebujeme energii $E_a = \mu c^2$, což je světoznámý Einsteinův vzorec. Antihmota při kontaktu s hmotou anihiluje a uvolní svou energii a také energii hmoty. Dostaneme tedy energii $2E_a$. Můžeme tedy vytvořit stroj, který generuje antihmotu, nechává ji anihilovat se hmotou, a ze zíkané energie generuje ještě více antihmoty. Jistě si dovedete představit efektivitu takového stroje.

Představme si tedy, že máme zmíněný stroj, který generuje antihmotu podle toho, kolik do něj dáme energie. Nechť má stroj tok Φ, tedy vyrobí Φ kilogramů antihmoty za sekundu. Stroj ale vyrábí tolik antihmoty, na kolik má energie, takže tento tok se časem mění podle toho, kolik energie již bylo anihilováno. Můžeme tento fakt zapsat pomocí difereniální rovnice $\dot{\Phi} = 2k\Phi$, kde k je nějaká konstanta úměrnosti, kterou z fyzikálních úvah můžeme určit jako $\frac{1}{T}$, kde T je součet času, za který proběhne anihilace, a času, za který se ze získané energie vytvoří nová antihmota.

Máme tedy diferenciální rovnici $\dot{\Phi} = \frac{2}{T}\Phi$. Řešení této rovnice, kterou možná znáte např. z radioaktivního rozpadu, je exponenciální funkce. Dostaneme tedy závislost toku antihmoty na čase jako $\Phi(t) = \Phi_0 \exp(t \cdot 2/T)$, kde Φ_0 je integrační konstanta, která má význam počátečního toku. Nyní můžeme tento tok integrovat podle času a dostaneme úhrn celkové vytvořené antihmoty μ_1. V momentě, kdy se tento úhrn bude rovnat hmotnosti planety m, tak jsme ji úspěšně anihilovali. Tedy dostaneme

$$\mu_1 = \int_0^\tau \Phi_0 \exp(t \cdot 2/T)\mathrm{d}t = \Phi_0 \frac{T}{2}\left(\exp\left(\frac{2\tau}{T}\right) - 1\right) .$$

To tedy znamená, že hmotnost μ_1 antihmoty se s počátečním tokem Φ_0 a parametrem T vytvoří za čas τ. Dosadíme-li za T jednu sekundu positronia a za τ dobu lidského života, vidíme, že exponenciála roste nepředstavitelně rychle, takto bychom potřebovali na zničení planety malý počáteční tok.

Z toho plyne, že pokud budeme mít k disposici zařízení, které dokáže relativně konsistentně z energie tvořit antihmotu a vzniklou antihmotu anihilovat, tak dokážeme planetu zničit extrémně rychle. Není se ale čemu divit, neboť přístroj, který by efektivně zužitkoval jakékoliv množství energie na tvorbu antihmoty není ani zdaleka v dnešních technologických možnostech, lze-li jej vůbec sestrojit.

Co kdybychom však měli přístroj, který má konstantní Φ, protože nedokáže přebytečnou energii zužitkovat a tvořit antihmotu tak rychle? Zřejmě pak $\Phi = m/\tau$. Potřebný objem takového zařízení můžeme pak odhadnout, když si položíme podmínku, že ve stroji musí být rezervoár o objemu odpovídajícím antihmotě, která se nashromáždí za jednu $t = 1\,\mathrm{s}$, a z toho, že hustotu antihmoty odhadnu jako hustotu vodíku (to by odpovídalo generaci antiprotonů). Objem stroje tedy činí $V_\mathrm{a} = \frac{t}{\tau} m/\varrho_v \approx m \cdot 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m^3/kg}$. Pro hmotnost země $V_\mathrm{az} \approx 10^{16}\,\mathrm{m}$.

Pád do Slunce

Aby planeta spadla do slunce, nemůžeme ji postrčit směrem ke slunci, neboť by akorát zaujala jinou oběžnou dráhu. Musíme zastavit její obíhání, a pak jednoduše spadne. Samozřejmě ji nemusíme zastavit úplně, nicméně počítat, jakou maximální oběžnou rychlost planetě můžeme nechat, je komplikované; nám jde stejně pouze o řádový odhad.

Napišme si tedy Newtonův zákon síly pro planetu, která padá do nehybného (takovou aproximaci jistě můžeme udělat) slunce:

$$-GM\frac{1}{x^2} = \ddot{x}\,.$$

Rovnici teď můžeme z obou stran integrovat podle $\mathrm{d}x$. Jen na pravé straně využijeme následujícího vlastnosti zrychlení:

$$\ddot{x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2\right)\mathrm{d}t\,,$$

kde jsme v poslední úpravě využili vzorec pro derivaci součinu $v \cdot v$. Nyní tedy můžeme rovnici vesele zintegrovat:

$$\begin{aligned}
-GM\int_r^x \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2\right)\mathrm{d}t\,,\\
-GM\left[\frac{1}{x}\right]_r^x &= \frac{1}{2}v^2\,,\\
GM\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right) &= \frac{1}{2}v^2\,.
\end{aligned}$$

Zde jsme integrovali nalevo od r do x, neboť naše planeta padá vskutku ze vzdálenosti r do nějaké vzdálenosti x. Můžete si také povšimnout, že jsme integrací obdrželi zákon zachování energie (vystupuje zde kinetická napravo a potenciální nalevo). Rovnici můžeme dále upravit:

$$GM\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{2}v^2\,,$$

$$\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{R-x}{xR}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\mathrm{d}t=\sqrt{1/2GM}\sqrt{\frac{xR}{R-x}}\mathrm{d}x\,,$$

$$t=\int_R^0\sqrt{1/2GM}\sqrt{\frac{xR}{R-x}}\mathrm{d}x\,,$$

$$t=\pi\frac{R^{3/2}}{2\sqrt{1/2GM}}\,.$$

Z tohoto integrálu po dosazení hodnot pro planetu Zemi dostaneme $t\doteq 65\,\text{dní}$, tedy ničení je dost rychlé. Nyní zbývá spočítat, kolik energie k tomu potřebujeme. Stačí spočítat kinetickou energii planety, k čemuž potřebujeme její oběžnou rychlost v. Tu vypočítáme pomocí Newtonova prvního zákona aplikovaného na gravitační a (myšlenou) odstředivou sílu:

$$mv^2/R=G\frac{mM}{R^2}\,,$$

$$v^2=G\frac{M}{R}\,,$$

$$v=\sqrt{G\frac{M}{R}}\,.$$

Potřebná energie je tedy

$$E_{\text{pád}}=\frac{1}{2}mG\frac{M}{R}\,.$$

Vytlačení ze sluneční soustavy

Podobně jako pád do Slunce můžeme planetu ze Sluneční soustavy vytlačit. Doba trvání této operace bude jistě podobná jako pád do Slunce, tedy se stihne během lidského života.

Zatímco pro zastavení planety jsme jí vlastně potřebovali dodat (zápornou) první kosmickou rychlost, nyní potřebujeme planetu urychlit z první kosmické rychlosti na druhou. Jak víme,[5] potřebujeme na druhou kosmickou rychlost $\sqrt{2}$-krát větší rychlost

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Escape_velocity`

než na první. Potřebujeme tedy tentokrát dodat rychlost $\sqrt{2}-1$-krát větší, což je menší rychlost, neboť tento koeficient je menší než jedna (je to zhruba 0,4).

Celkově tedy na vytlačení planety potřebujeme $E_\mathrm{v} = (\sqrt{2}-1)^2 E_\mathrm{pád}$, což je o řád méně.

Srovnání

V porovnání všech čtyř způsobů totálního zničení jsme obdrželi následující vzorce pro potřebnou energii (u anihilace jsme vypočítali rovnou objem). Slabší druh zničení vyžadoval vždy jen maximálně o řád méně energie.

Rozmetání: $-\frac{3}{5}\frac{Gm^2}{r}$

Stlačení: $-\frac{3}{5}\frac{q^2}{r_\mathrm{s}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{3}{5}\frac{(k\cdot m)^2}{r_\mathrm{s}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Pád do slunce: $\frac{1}{2}mG\frac{M}{R}$

Můžeme si všimnout, že rozmetání a pád do slunce se liší o faktor $\frac{m}{r} : \frac{M}{R}$. Jelikož však typicky $m < M$ a $r < R$, je rozmetání na kousky efektivnější nežli pád do Slunce. Toto rozmetání je efektivnější než stlačení (viz výše) a jelikož typicky $\frac{3}{5}\frac{Gm}{r} < c^2$, je i efektivnější než vypaření.

Jakým způsobem se rozmetání provede? Pro planetu Zemi by rozmetání vyžadovalo $E_\mathrm{oplus} = 10^{32}$ J. Mohlo by se provést například šikovně umístěnou bombou ve středu Země. Nejsilnější bomba vyrobena člověkem jménem Car[6] měla pro porovnání výkon $E_\mathrm{car} \approx 10^{17}$ a objem $V_\mathrm{car} \approx 30\,\mathrm{m}^3$. Země má objem $10^{21}\,\mathrm{m}^3$, potřebný objem bomby Tsar by byl v řádu $10^{16}\,\mathrm{m}^3$. Nicméně čelíme problémům v tom, že veškerá energie bomby by se nepřeměnila na kinetickou energii a navíc by její velikost byla při explozi nepraktická (navíc pomíjíme způsob, jak bychom bombu do planety dali či energii k tomu potřebnou).

Řádově stejný objem jako pro rozmetání potřebujeme i pro zničení pomocí antihmoty. Tento způsob je však velice sporný, neboť v něm máme spoustu paramterů, které jsme určili vcelku arbitrárně (čas t a antivodík)m, ale také jsme nespecifikovali způsob vyrábění antihmoty. V současnosti tak efektivní způsob není známý, nicméně od efektivity se velikost zbraně dramaticky odvijí.

Dodáme ještě poznámku k pádu planety do slunce či jejím vytlačení ze sluneční soustavy. Změny trajektorie planety bychom mohli dosáhnout nejefektivněji buď bombou nebo manipulací nějakého externího tělesa, třeba pomocí srážky dvou planet. Pokud jde o bombu, tak se její energie využije s menšími ztrátami pro

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Tsar_Bomba`

detonaci uprostřed planety, navíc rozmetání vyžaduje méně energie. Druhý způsob srážky dvou planet by mohl být energeticky efektivnější, neboť by v některých případech stačilo toliko drobně pozměnit trajektorii jiné planety. Na externí planety se však v nejširší obecnosti nemůžeme spolehnout.

Závěr

Z prozkoumaných způsobů na ničení planet, o kterých se domníváme, že jsou jediné použitelné se jako nejpoužitelnější ukázalo rozmetání planety na kousíčky nebo použití antihmoty. Zbraň, která by toto provedla by se současnými technologiemi pro planetu porovnatelnou se Zemí musela být velká řádově více než $10^{16}\,\mathrm{m}^3$. Není vyloučeno použití výkonnějších technologií, které by velikost zmenšily, nicméně o nich není relevantní spekulovat.

Ukázalo se, že ničení planety je značně nepraktická záležitost, nicméně je hypoteticky možné dosáhnout zničení planety přístrojem menším než planeta samotná. Na závěr tedy můžeme pouze doporučit, abyste výše zmíněné věci nezkoušeli doma.

Jindřich Dušek
jindra@fykos.cz

Úloha I.E ... lahvová 12 bodů; (chybí statistiky)

Jak závisí frekvence zvuku, který vydáváte foukáním do skleněné lahve, na objemu kapaliny v lahvi? Diskutujte, jaký vliv na tuto závislost má tvar lahve. *Legolas neumí hrát na žádný hudební nástroj, tak hraje aspoň na nervy.*

Teória

Tón je vlastne chvenie vzduchu, a teda vzniká, keď niečo (napr. struna, alebo aj priamo nejaký vzduch) kmitá. V našom prípade tón vzniká v hrdle fľaše, kde sa v dôsledku správneho fúkania rozkmitá vzduch a od neho sa už potom vlnenie šíri ďalej.

Frekvenciu, ktorú by sme mali namerať, môžeme odhadnúť tak, že vzduch z hrdla fľaše aproximujeme piestom s rovnakou hustotou ako vzduch.

Označme si okolitý tlak ako p_A, objem hrdla V_h, potom molárne množstvo vzduchu v hrdle fľaše bude zo stavovej rovnice

$$n_h = \frac{p_A V_h}{RT}\,.$$

Kde T je teplota a R je univerzálna plynová konštanta $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Hmotnosť piestu m_h potom jednoducho dostaneme tak, že molárne množstvo vzduchu vynásobíme jeho molárnou hmotnosťou, ktorú označíme M_m

$$m_h = M_m n_h = M_m \frac{p_A V_h}{RT}\,.$$

Zostáva teda zistiť tuhosť systému.

Na začiatku, je vo fľaši atmosférický tlak. Následne fúkanie spôsobí, že piest sa pohne o dx dole, čím vo fľaši tlak určite vzrastie. Keďže kmitanie je príliš rýchle na to, aby si vzduch vo fľaši stíhal vymieňať teplo s okolím, uvažujme adiabatický dej[7][]Ak by sme ale namiesto neho zvolili dej izotermický, veľkej chyby by sme sa nedopustili.

Pre adiabatický dej platí, že $pV^\kappa = \text{konst.}$ Kde κ je Poissonova konštanta charakteristická pre daný plyn.

Tlak teda po posunutí piestu o dx vzrastie na

$$p_x = p_A \left(\frac{V}{V - S_h \mathrm{d}x}\right)^\kappa ,$$

kde V je pôvodný objem vzduchu vo fľaši a S_h je prierez hrdla.

Na piest teda bude pôsobiť sila

$$\begin{aligned} dF &= S_h(p_A - p_x)\,,\\ dF &= S_h p_A \left(1 - \left(\frac{V - S_h\mathrm{d}x + S_h\mathrm{d}x}{V - S_h\mathrm{d}x}\right)^\kappa\right),\\ dF &= S_h p_A \left(1 - \left(1 + \frac{S_h\mathrm{d}x}{V - S_h\mathrm{d}x}\right)^\kappa\right). \end{aligned}$$

Teraz využijeme to, že posun piestu dx je veľmi malý, takže $V - S_h\mathrm{d}x \approx V$. Tiež môžeme použiť Bernouliho vzťah, ktorý hovorí, že $(1+x)^k \geq 1+kx$. Premyslite si sami, že z toho vyplýva, že ak je x veľmi malé (oproti 1), máme dobrý odhad $(1+x)^k \approx 1+kx$.

Postupnou aplikáciou týchto dvoch aproximácii dostávame

$$\left(1 + \frac{S_h dx}{V - S_h\mathrm{d}x}\right)^\kappa \approx \left(1 + \frac{S_h\mathrm{d}x}{V}\right)^\kappa \approx 1 + \kappa\frac{S_h\mathrm{d}x}{V}\,.$$

Dosadením do vzťahu pre silu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &\approx \frac{S_h^2 p_A \kappa}{V}\mathrm{d}x\\ k &\approx \frac{S_h^2 p_A \kappa}{V}\,, \end{aligned}$$

kde k je hľadaná tuhosť systému.

Môžeme teda dosadiť do vzorca na periódu lineárneho harmonického oscilátoru

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}\,,$$

[7].

pričom pri úpravách využijeme $V_h = S_h h$, kde h je výška hrdla, a $S_h = \pi/4D^2$, kde D je priemer hrdla.

Po úpravách dostaneme

$$T = \frac{4}{D}\sqrt{\frac{\pi M_m V h}{RT\kappa}}\,.$$

Nie je ťažké všimnúť si, že jediná z týcho veličín, ktorá sa bude meniť prilievaním vody je objem vzduchu vo fľaši V.

Frekvencia je prevrátená perióda

$$f = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{D}{4}\sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{V}}C\,. \tag{6}$$

Pomôcky

fľaša, voda, váha, odmerka, počítač, posuvné meradlo, teplomer

Meranie

Odvážili sme prázdnu fľašu a potom fľašu plnú vody, rozdiel bol $m_{in} = (630 \pm 10)\,\mathrm{g}$. Ak uvážime hustotu vody $\varrho = 1\,\mathrm{g/cm^3}$ (väčšia presnosť nie je potrebná, keďže tak či tak máme chybu už na druhej platnej cifre), dostávame, že vnútorný objem fľaše je

$$V_0 = (630 \pm 10)\,\mathrm{cm^3} = (6{,}3 \pm 0{,}1)\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3}$$

.

Na meranie frekvencie sme používali počítač s Audacity, vhodných softwarov ale existuje obrovské množstvo a použiť sa dá aj mobil, ladička… Dôležité je ale uviesť presnosť, s ktorou bola frekvencia zmeraná, v našom prípade to boli desatiny hertza.

Experiment potom prebiehal tak, že sme fúkli do fľaše, poznamenali si frekvenciu, odmerkou (ktorej najmenší dielik je 5 ml) doplnili niekoľko desiatok mililitrov vody a opakovali postup, dokým nebola fľaša plná.

Namerané hodnoty môžeme vidieť v tabuľke 1.

Pomocou gnuplotu dáta fitujeme závislosťou podľa (6) $f = C/\sqrt{V}$, pričom sme dostali, že konštanta $C = (4{,}73 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m^{3/2}\cdot s^{-1}}$. Graf s preloženou závislosťou je vynesený v 2.

Konštantu C by sme mali byť podľa (6) schopný spočítať ako

$$\frac{D}{4}\sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} = C\,.$$

Posuvným meradlom odmeriame vnútorný priemer hrdla ako $D = (2{,}15 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$ a výšku hrdla $h = (2{,}04 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$.

Tab. 1: Namerané frekvencie zvuku

$\frac{V}{10^{-4}\,\mathrm{m}^3}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$
6,3	185,5
6,1	186,6
5,7	192,5
5,3	206,0
4,9	216,7
4,5	222,6
4,1	228,5
3,3	257,7
2,9	280,3
2,1	316,2
1,7	368,9
1,3	403,8
0,9	479,0
0,7	597,8

Chemické konštanty pre vzduch nájdeme na internete[8] ako $M_m = 28{,}96\,\mathrm{g/mol}$ a $\kappa = 1{,}40$.

Izbová teplota vzduchu pri meraní bola $(25\pm1)\,^\circ\mathrm{C} = (298\pm1)\,\mathrm{K}$.

Chyby konštánt oproti nameraným veličinám môžeme považovať za zanedbateľné, potom dostávame $C = (7{,}35\pm0{,}06)\,\mathrm{m}^{3/2}{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$, čo rádovo sedí s experimentálnou hodnotou.

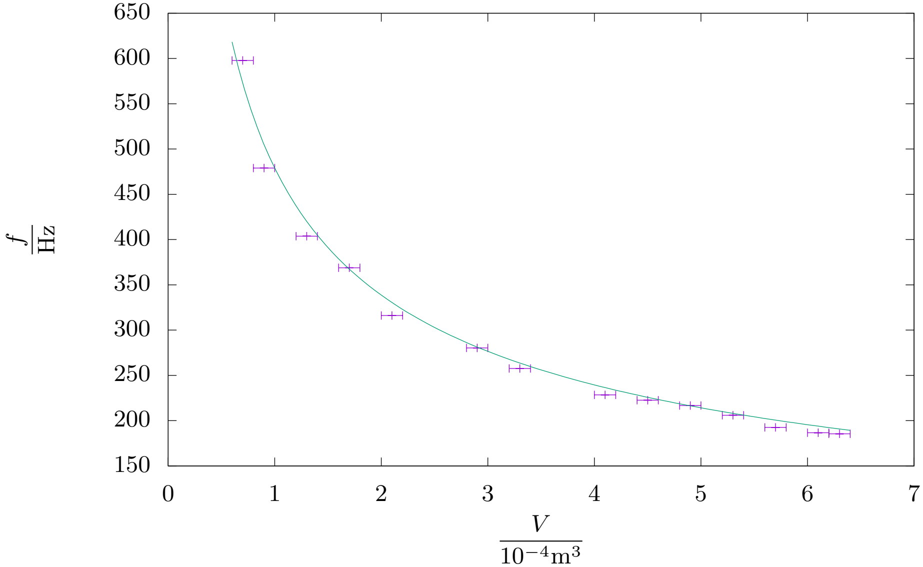
Diskusia

Teoretická predpoveď nám dáva, že nameraná frekvencia by mala byť úmerná objemu vzduchu vo fľaši na mínus jednu polovicu. Namerané dáta tejto závislosti dobre odpovedajú.

Hodnota C určená experimentálne (z fitu) sa od tej teoretickej dosť líši, aj keď rád majú rovnaký. Dôvod bude zrejme to, že aj keď náš teoretický model správne odhaduje závislosti od jednotlivých veličín, môže sa v konštante líšiť, pretože celkový dej je zrejme výrazne zložitejší, než sme uvažovali. Ako príklad môžeme uviesť to, že náš model vôbec neuvažuje kmitanie vzduchu inde než v hrdle, čiže efektívna "hmotnosť piestu", bude zrejme o niečo vyššia než tá, ktorú sme vo svojich výpočtoch použili. Toto dokonca zodpovedá tomu, že experimentálne sme dostali nižšie C (a teda aj nižšie frekvencie) než predpovedala teória.

Ak by sme namiesto fľaše mali napríklad trubicu s konštantným prierezom, potom by dĺžka trubice (resp. tej časti v ktorej sa voda nenachádza) l bola rovná štvrtine vlnovej dĺžky. Úprava-

[8] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Vzduch code-4-band`



Obr. 2: Závislosť frekvencie zvuku f na objeme vzduchu vo vnútri fľaše V

mi dostávame, že v takomto prípade by frekvencia bola nepriamo úmerná objemu vzduchu v trubici. Z toho jasne vyplýva, že na tvare fľaše záleží.

Záver

Dolievaním vody do fľaše znižujeme objem vzduchu, ktorý sa v nej nachádza. Podľa teoretickej predpovede by mala výsledná frekvencia závisieť priamo úmerne od $V^{-1/2}$. Ak teda označíme objem vody vo fľaši V_v, dostávame $f = C(V_0 - V_v)^{-1/2}$. Konštantu úmernosti C sme pre našu fľašu získali experimentálne ako $C = (4{,}73 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m}^{3/2}{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$ s relatívnou chybou asi 1 %. Táto hodnota však nie je v zhode s naším teoretickým modelom.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha I.S . . . pomalý rozjezd 10 bodů; (chybí statistiky)

1. *Vyjádřete následující veličiny*[9] *pomocí základních jednotek SI.*
(a) $\mathrm{F} \cdot \Omega$, *kde* F *je farad a* Ω *je ohm*
(b) $\mathrm{N} \cdot \mathrm{Pa}$, *kde* N *je newton a* Pa *je pascal*

[9] Bez ohledu na to, že dané součiny možná nedávají žádný rozumný fyzikální smysl.

(c) $\dfrac{\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}}{\mathrm{J}}$, *kde* C *je coulomb,* V *je volt a* J *je joule*

(d) $\dfrac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{Wb}}{\mathrm{H}\cdot\mathrm{Sv}}$, *kde* H *je henry,* Sv *sievert,* T *tesla a* Wb *weber*

2. *V následujících tvrzeních nalezněte všechny chyby a popište, proč jde o chyby. (2 body)*

(a) $s = vt^2/2 = 5{,}2\cdot 1{,}2^2/2 = 3{,}744\,\mathrm{m}\,.$

(b) $y_\mathrm{m}\sin(2\pi\omega) = 15cm\cdot\sin(2\cdot 3{,}141\cdot 50Hz) \doteq 0cm$

(c) *Pro experimenty jsme použili úspěšně sadu gamabeta. Na základě měření radioaktivního rozpadu Uranu ve smolinci jsme zjistily, že náš vzorek má aktivitu přesně 532,24 bequerelů.*

(d) $s = 1{,}23\,\mathrm{m}$, $t = 2{,}7\,\mathrm{s} \Rightarrow v = s/t \doteq 0{,}46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 240\,\mathrm{g}$, $E = = mv^2/2 \doteq 25\,\mathrm{J}$, $P = E/t \doteq 9{,}3\,\mathrm{W}$

3. *Jakou silou působí vítr na korunu stromu? Víme, že to má souvislost s rychlostí větru v, průřezem stromu vystaveného větru S a hustotou vzduchu ϱ. Proveďte rozměrovou analýzu a na jejím základě určete vztah pro sílu.*

4. *Sestavte podobnostní číslo odpovídající situaci, ve které protlačujeme kapalinu skrz charakteristickou délku l pomocí gradientu tlaku $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ (případně si tuto veličinu představte jednoduše jako změnu tlaku se vzdáleností $\dfrac{\Delta p}{\Delta x}$). Kapalina má hustotu ϱ a kinematickou viskozitu ν. Určete, jaké všechny varianty tohoto podobnostního čísla existují. Jednu z nich si vyberte a pokuste se jí interpretovat.*

5. *Bonus* *Vymyslete co nejoriginálnější Planckovu jednotku (veličinu sestavenou z kombinace redukované Planckovy konstanty $\hbar$, gravitační konstanty G, rychlosti světla c, Boltzmannovy konstanty k_B a Coulombovy konstanty k_e, přičemž nemusí obsahovat všechny). Popište její odvození a okomentujte její hodnotu. Nejzajímavější zmíníme v brožurce s řešeními.*

Karel chce trhat rekordy v délce zadání.

Předně bychom měli poznamenat, že jeden bod opravdu neodpovídá odpovědi na jednu otázku, což bylo i naznačeno tím, že čtyři podotázky jsou za dva body. Současně bychom chtěli připomenout to, že jak jsme varovali, tak pokud řešitelé v letošním seriálu budou dělat přestupky proti formálním pravidlům, tak mohou přijít o nějaké body. Nicméně na druhou stranu co se týká např. podúlohy s hledáním chyb, tak jde o to nalézt alespoň nějaké důležité chyby.

1. Budeme postupovat tak, že všechny jednotky převedeme na součin základních jednotek SI a následně co nejvíce zjednodušíme zápis. Pro stručnost rovnou dosazujeme do zadání.

(a) $\mathrm{F}\cdot\Omega = \mathrm{kg^{-1}\cdot m^{-2}\cdot s^4\cdot A^2\ \cdot\ kg\cdot m^2\cdot s^{-3}\cdot A^{-2}} = \mathrm{s}$

(b) $\mathrm{N}\cdot\mathrm{Pa} = \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\ \cdot\ kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}} = \mathrm{kg^2\cdot s^{-4}}$

(c) $\dfrac{\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}}{\mathrm{J}} = \dfrac{\mathrm{A{\cdot}s}\ \cdot\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}\cdot\mathrm{A}^{-1}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 1\,.$ Tedy v tomto případě nám vyjde bezrozměrná veličina. Toho není třeba se bát[10] – to se nám obecně stává, pokud vydělíme jednotku tou samou jednotkou. Například pro dosazení do exponenciály, sinu a dalších funkcí právě potřebujeme bezrozměrné veličiny. Obdobně je toto žádaný výsledek pro podobnostní čísla.

(d) $\dfrac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{Wb}}{\mathrm{H}\cdot\mathrm{Sv}} = \dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{A}^{-1}\ \cdot\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{A}^{-1}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{A}^{-2}\ \cdot\ \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{kg{\cdot}m}^{-2}$

2. Úloha s odhalováním chyb nabízela u každé podúlohy větší množství chyb a bylo potřeba najít alespoň jednu relevantní chybu v každém bodě.

(a) V postupu chybí jednotka v mezivýpočtu. Druhá a třetí rovnost tedy neplatí. Na závěr není zaokrouhleno – přestože se podle dosazení zdá, že máme zadané veličiny na dvě platné cifry (případně by se jednalo o chybu přepisu, kdyby tomu tak nebylo), tak je výsledek na čtyři platné cifry. Správně by měl být na dvě až tři platné cifry. Další velice podstatná chyba je, že pokud t má rozměr času, tak v by muselo mít rozměr zrychlení, aby nám vyšly metry. Pokud autor dodržuje standardní značení, tak je to chyba, protože v by mělo mít rozměr rychlosti. Pokud autor nedodržuje obvyklé značení, pak by to měl uvést. Vzhledem k tomu, že to jsou pravděpodobně pouze výňatky z řešení, tak nemůžeme s jistotou prohlásit, že je to chyba, ale pravděpodobně je.

(b) V úvodní rovnici se zapomnělo na čas. Do sinu totiž nemůžeme dosadit něco, co by mělo nějaký jiný fyzikální rozměr než jednotkový (úhel). Správně je pravděpodobně $y_\mathrm{m}\sin(\omega t)$, kde t je čas, pokud je ω úhlová rychlost či frekvence. Pravděpodobně došlo v popisu úlohy k záměně ω, což je úhlová rychlost, za f, což je standardně frekvence. Mezi nimi platí vztah $\omega = 2\pi f$. Vzhledem k tomu, že frekvence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ je častá (je v elektrické síti), pak se toto vysvětlení nabízí jako nejpravděpodobnější. Jednotky by se měly psát stojatě a ne italikou, což je tedy drobnější chyba, ale zápis pak není estetický. V postupu jsou pak dvě chyby. Není vhodné místo π napsat 3,141, protože pak nám po dosazení vyjde (pravděpodobně okamžitá výchylka nějakého kmitajícího předmětu) $-0{,}89\,\mathrm{cm}$. Toto by bylo správné zaokrouhlení poslední rovnosti. Nicméně víme, že by se jednalo o celý počet sinových vln a tak by byla výchylka přesně nulová, pokud by byl čas dosazený celočíselný. Ale bez nějaké další veličiny s rozměrem času v sinu je výsledek stejně nesmyslný. Na konec bychom měli napsat tečku.

(c) Pokud jde o závěrečnou část úlohy, tak zde již obvykle znovu neuvádíme název použitých pomůcek. Jde také o název, takže by měl být s velkým písmenem (Gamabeta; podle některých zdrojů GamaBeta). Pro informaci, jde o sadu pro měření radioaktivního záření, která je schopná měřit záření beta a gama a proto ten-

[10] Podle došlých řešení to někdo považoval za špatný výsledek.

to název. Další drobnost je, že formulace, že byla sada použita úspěšně, se obvykle nehodí do fyziálního zpracování – vhodná je spíše, pokud by šlo o testování. Další chyba ve velkém písmenu je v názvu prvku, který se má psát s malým. Pravděpodobně neměřily rozpad planety Uran nebo něčeho s tímto názvem. Další chybou je jedna hrubka. V první větě je ve skupině alespoň jeden muž (použili) a v druhé jsou jenom ženy (zjistily). Nebo pokud by šlo o řešení do série FYKOSu, pak by mělo jít o individuální řešení a tedy je špatně množné číslo. Doposavad jde ale o (potenciální) maličkosti. Opravdu závažnou chybou je závěr, kdy se uvádí, že má něco přesnou hodnotu aktivity. To je nesmysl samo o sobě, protože radioaktivní rozpad, o kterém se hovoří, má pravděpodobnostní charakter a i kdybychom dokázali měřit aktivitu vzorku dokonale, tak naměříme její kolísání. Dalším reálným problémem jsou konečné rozměry přístroje, který nedokáže obklopit dokonale vzorek a celková aktivita se určuje pouze z určitého prostorového úhlu, který se určuje docela složitě, protože detekční objem je zabudován v zařízení a není jasné, bez rozebrání přístroje, jeho přesný rozměr a umístění. Dalším reálným faktorem je to, že přístroj nemusí detekovat všechny částice. Zejména u vyšších hodnot aktivit se uplatňuje tzv. mrtvá doba detektoru. Aktivita také obvykle s časem klesá.[11] Tedy celkově nelze nikdy říct, že aktivitu známe přesně. Pokud bychom zanedbali slovo „přesně“ a předpokládali, že výsledek je přesně na 0,01 Bq, pak bychom museli měřit vzorek minimálně 90 let, abychom ji naměřili tak přesně. Opět za předpokladu, že by se aktivita neměnila z důvodu úbytku látky, která se rozpadá a nově přeměněných jader. Jednotka se správně píše becquerel.

(d) Podle výpočtu rychlosti se zdá, že se jedná o pohyb s konstantní rychlostí. V tom případě by se ale dalo čekat, že výkon je nulový, nebo že výkon nezávisí uvedeným způsobem na rychlosti, ale museli bychom ho počítat z odporových sil a ne z kinetické energie. Základní jednotkou je kilogram, ale do výpočtu energie byly dosazeny gramy. Výsledek by měl být tedy tisíckrát menší. V průběhu jsou vypočítány mezivýsledky, které jsou dále dosazovány a mají nízkou přesnost. Dochází tedy k zaokrouhlovacím chybám. Správnější by bylo vyjádřit neznámou a dosadit až na závěr $P = \frac{ms^2}{2t^3} \doteq 9{,}2\,\mathrm{mW}$ (za předpokladu, že předchozí vztahy platí).

3. Jedná se o velice jednoduchou aplikaci rozměrové analýzy, která se v tomto případě dá docela snadno tipnout, ale ukažme si korektní postup. Předpokládáme tedy, že platí vztah

$$F = C\varrho^{\alpha} S^{\beta} v^{\gamma}\,,$$

kde F je síla, kterou hledáme, a α, β a γ jsou hledané, neznámé, exponenty. C je pak neznámá bezrozměrná konstanta, kterou neurčíme, ale na závěr bychom mohli diskutovat, na čem bychom očekávali, že bude záviset. Víme, že fyzikální rozměry veličin jsou $[\varrho] = \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $[S] = \mathrm{m^2}$ a $[v] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Fyzikální rozměr síly je pak $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$. Můžeme tedy psát, že pro jednotky platí

$$\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}} = \left(\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\mathrm{m^2}\right)^{\beta} \cdot \left(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^{\gamma}\,.$$

[11] Toto nemusí být ale vždy pravda, protože se může počáteční vzorek rozpadat na nějaké další radioaktivní látky, které, pokud mají vyšší aktivitu, tak může celková aktivita vzorku po nějakou dobu růst.

Tento vztah můžeme upravit a následně přepsat jako soustavu tří rovnic tří neznámých, protože se musí rovnat všechny fyzikální rozměry.

$$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \mathrm{kg}^{\alpha} \cdot \mathrm{m}^{-3\alpha+2\beta+\gamma} \cdot \mathrm{s}^{-\alpha-\gamma}\,,$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha\,, \\ 1 &= -3\alpha + 2\beta + \gamma \\ -2 &= -\gamma\,. \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic je opravdu jednoduché vyřešit, protože první neznámou jsme dostali okamžitě a třetí prakticky také. Pak zbývá jenom dosadit do zbývající druhé rovnice. Dostáváme tak $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = 2$. Celkový výsledek je tedy $F = C\varrho S v^2$. U konstanty C bychom pak čekali, že bude záviset na tvaru stromu, který jsme zatím nijak neuvažovali a případně na směru větru, pokud nebude strom sféricky symetrický.

4. Postup s určováním podobnostních čísel je vlastně ten samý jako u rozměrové analýzy. Dokonce bychom se na to mohli dívat tak, že hledáme nějaké kombinace pro to, jak vyjádřit jednu z veličin a pak prostě závěrečný vztah vydělíme touto veličinou.
Co se mohlo zdát komplikované na úloze je přítomnost gradientu. Nicméně bylo přímo v zadání uvedeno, že si mají řešitelé tuto veličinu představit jako změnu tlaku se vzdáleností, kde nejsou d, ale Δ veličiny. Pro přehlednost si označme $k = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. Zjevně bude jednotka k podílem jednotky tlaku a délky, tedy $[k] = \mathrm{kg{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-2}}$. Chceme, aby platilo

$$C = l^{\alpha} \cdot k^{\beta} \cdot \varrho^{\gamma} \cdot \nu^{\delta}\,,$$

kde C je bezrozměrné. Víme, že $[l] = \mathrm{m}$, $[\varrho] = \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a $[\nu] = \mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$. Tedy má platit

$$0 = \mathrm{m}^{\alpha} \cdot \left(\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-2}}\right)^{\beta} \cdot \left(\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\right)^{\gamma} \cdot \left(\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}\right)^{\delta}\,.$$

Exponenty přerovnáme a opět sestavíme rovnice, ale tentokrát tři pro čtyři neznámé.

$$\begin{aligned} 0 &= \beta + \gamma\,, \\ 0 &= \alpha - 2\beta - 3\gamma + 2\delta\,, \\ 0 &= -2\beta - \delta\,. \end{aligned}$$

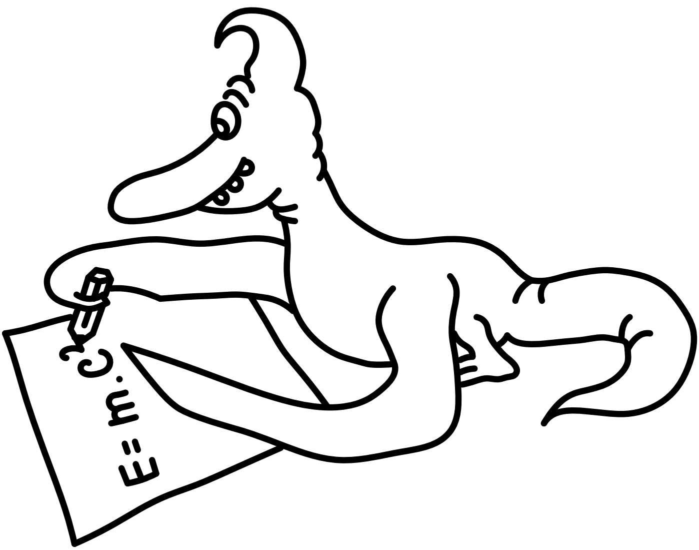
Jednu neznámou si tedy můžem zvolit jako parametr. Vyberme například β. Okamžitě dostáváme $\gamma = -\beta$ a $\delta = -2\beta$. Po dostazení do druhé rovnice pak máme $\alpha = 3\beta$. Zjišťujeme, že jsme si zvolili docela vhodně, protože nejmenší exponent v absolutní hodnotě je β a nevyskytují se žádná necelá čísla. Současně jsou dva exponenty kladné a dva záporné. Tedy by se dalo říci, že jsme dostali optimální kombinaci pro $\beta = 1$

$$C = \frac{l^3}{\varrho \nu^2} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,.$$

Samozřejmě, že pokud umocníme číslo, které jsme si označili jako C, na libovolné nenulové číslo, dostaneme „stejně dobré" podobnostní číslo. Jenom bude vypadat pravděpodobně o dost komplikovaněji. Nejzákeřnější část celé úlohy je interpretace výsledku. Vzhledem k tomu, že známe experiment pouze letmo, to jde docela stěží. Nicméně vidíme, že v této formulaci číslo rychle roste s rostoucím charakteristickou délkou a lineárně s gradientem tlaku. Naopak je nepřímo úměrné hustotě a viskozitě. Tedy například můžeme prohlásit, že pro stejný typ proudění pro dvojnásobnou charakteristickou délku ve stejné kapalině za stejných podmínek potřebujeme aplikovat osminový tlak. To zní docela neintuitivně vzhledem k běžné zkušenosti. Ale obvykle nemáme skušenosti s nuceným tokem viskózní kapaliny. Podívejme se tedy na podobnostní číslo vybrané profesionálním fyzikem. Úloha byla vytvořena tak, že bylo vybráno Hagenovo číslo,[12] nicméně existuje nepřeberné množství čísel, které mají stejnou kombinaci fyzikálních veličin s drobnými odchylkami. Právě Hagenovo číslo pak používá ještě konstantu -1, ale jinak je stejné.

5. **Bonus:** Tato úloha byla spíše o kreativitě a po opravení účastnických řešení doplníme nějaké ukázky. Nicméně pro hodnocení bude důležité zejména to, aby nešlo o nějakou velice často uvažovanou jednotku (např. délka, hmotnost) a určitě bude výhodné netrefit se do těch, které jsou často uváděny v seznamech, jako například na Wikipedii.[13]

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`



[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Hagen_number
[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_units

FIXME je to stále rozepsané

Úvod

Minule jsme si probrali nějaké věci zejména co se týče jednotek a formálních stránek řešení fyzikálních úloh a jejich zápisu. Věříme, že se budete snažit mít na paměti to, že je důležitá i ta formální stránka řešení a někdy i díky tomu můžete sami odhalit chyby. V tomto díle se zmíníme o nějakých tématech, která se týkají grafických řešení úloh, symetrií a souřadnic. Každé z těchto témat je samo o sobě velice obsáhlé a proto zde naleznete pouze spíše takové ochutnávky.

Grafy a grafická řešení

U grafů bychom mohli pokračovat s formální stránkou řešení. Ve stručnosti jenom poznamenejme, že do grafů chceme vynášet hodnoty na číselnou osu. Musíme tedy hodnotu veličiny vydělit vhodnout jednotkou, abychom mohli do grafu uvést bezrozměrnou veličinu.

Plocha pod grafem funkce

Ti z vás, kteří jsou již pokročilejší, tak jistě vědí, že plochu pod funkcí mohou počítat pomocí integrálu. Nicméně integrování je často těžké a není od věci si připomenout (nebo naučit) i jiné základní postupy, které můžeme využít. Zmiňme ty, které můžeme používat v případě, že máme zadanou funkci nebo máme k dispozici graf funkce.

Barvení

První základních možností jak určit plochu, je jí prostě nějak přímočaře změřit. Můžeme si pod či přes graf dát čtvercovou síť a spočítat čtverečky pod plochou grafu k celkovému počtu čtverečků. Protože skoro jistě budou nějaké čtverečky proťaté, tak se musíme rozhodnout, jestli budeme „zaokrouhlovat“ čtverečky nebo ještě lépe odhadovat jaká plocha je obarvená v částečně obarveném čtverečku a kombinovat je mezi sebou tak, aby vytvořily celé čtverečky. Pro větší přesnost je vhodnější brát menší čtverečky, ale „ručně“ je počítat je pak pracné. Pokud můžeme využít počítač, pak je vhodné počítat jednotlivé pixely a to pomocí nějakého programu, který to uděla za vás. I u černobílého obrázku se ale můžete pak setkat s tím, že pokud je v nějaké kompresi dat a má dovolenou celou barevnou paletu, že na okrajích funkce se setkáte s různými odstíny šedi a musíte pak zvolit, podobně jako u ručního počítání čtverečků, postup, který vám dá plochu rozumně přesně. U této metody navíc není nutné mít funkce, můžeme určovat i pokrytí obrázku vybranou barvou, jak si vyzkoušíte v řešení části seriálové úlohy.

Sčítání sloupců až k integraci

Blízko ke zmíněnému obarvování má to, ži funkci nějak rozdělíme, obvykle rovnoměrně, nebo případně na širší intervaly, kde se výrazně nemění a tenčí, kde se značně mění. V těchto intervalech pak vyvoříme obdélníčky, které mají výšku hodnoty funkce v počátečním bodě a šířku danou délkou intervalu. Toto můžeme případně upravit tak, že bereme hodnotu uprostřed intervalu, nebo že bareme lichoběžníky a hodnoty ze začátku a konce intervalu. Snad ale i z názoru můžeme odhadnout, že bude důležitější, zejména u funkcí, které se rychle a nepravidelně mění, dělení co nejvíce zjemnit. Čím menší bude, tím přesnější výsledek můžeme dosáhnout. Často ale pro funkce, které dostaneme, dostáváme dostatečně přesný výsledek už i pro docela hrubé dělení - výrazně záleží na dané funkci. okud s tímto dělením pokračujeme a zmenšujeme ho až na limitně tenké, téměř nulově široké intervaly, pak se dostáváme k integraci.

Pravděpodobnostní řešení, numerické metody

Těm, kdo to slyší poprvé, se to může zdát trochu nedůvěryhodné, možná až sílené. Ale vědci velice často u velmi složitých výpočtů komplikovaných integrálů (tedy stále myslíme ploch pod grafem) využívají pravděpodobnostní metody. Známou metodou je Monte Carlo, kde, podobně jako v kasinu, náhodně sázíme na nějakou kombinaci čísel v prostoru (N čísel v N-dimenzionálním prostoru) a díváme se, jestli je hodnota pod, nebo nad grafem.

Numerickým metodám se podrobně věnovaly například seriály FYKOSu v 21. ročníku (o počítačové fyzice) a 31. ročníku (o numerických metodách a počítačových simulacích).

Tip k řešení FO apod.

Představme si situaci, že máte vyřešit úlohu s nějakým kruhovým dějem v plynu a z nějakého důvodu jste se totálně zasekli a nemůžete přijít třeba na parametry jednoho bodu z daného cyklu. Pak není nic lepšího než si tyto parametry alespoň odhadnou z grafu, pokud jste ho dostali se zadáním, pomocí pravítka. Je pravděpodobné, že nedostanete plný počet bodů. Ale pokud se vám jedná o to, že jste zasekli a potřebujete tyto hodnoty pro další postup, který byste už třeba zvládli bez problémů, tak je lepší to takto odhadnout a pokračovat dále a dostat alespoň část bodů než nic.

Statika

Například pokud řešíme zatížení jednotlivých částí mostních konstrukcí, pak využíváme statiku. Tedy víme, že výslednice sil musí být nulová, aby se nám most nezačal někam pohybovat či lámat. Graficky si nulovost výslednice sil v bodě můžeme znázornit tak, že poskládáme za sebe vektory jednotlivých sil působících v daném bodě tak, že vytvoří uzavřenou křivku. Někdy se může hodit, že i momenty sil se musí vyrušit, aby se nám most nezačal rozotáčet. Obě pravidla navíc platí pro každé místo konstrukce a obvykle sestavujeme rovnice pro jednotlivé body upevnění. Ukázkou úlohy, ve které se řeší stabilita mostní konstrukce, je 26-IV-5 – stavme mosty.[14] Dalšími příkladem úlohy, která se řešily pomocí statiky, jsou třeba 20-VI-I – tři válce děda vševěda,[15] kde byly dva válce položené na podložce a na nich umístěn třetí válec. Příkladem toho, kde se ukázalo, že za zadaných podmínek nemůže být soustava nikdy stabilní, jsou koule a válec z úlohy 19-III-1 – dotyk koule a válce.[16]

Optické zobrazování

Kde se využívá v hojné míře grafické zpracování, je zobrazování pomocí optických soustav.

Symetrie

Symetrie je to, co při řešení fyzikálního problémo obvykle chceme najít, protože nám to značně zjednoduší jeho řešení. Někdy dokonce

Vztah symetrie a zákonů zachování

Každá symetrie se pojí s nějakým zákonem zachování. To plyne z teorému Emmy Noetherové. Jeho matematická formulace je složitá, nicméně tato poučka se nám může hodit i na SŠ úrovni. Vztahy mezi základními symetriemi a zákony zachování jsou:

- Symetrie v posunutí v prostoru je spojena se zákonem zachování hybnosti.
- Symetrie v otočení se pojí se zákonem zachování momentu hybnosti.
- Symetrie v posunutí v čase se pojí se zákonem zachování energie.

[14] https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf
[15] https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20_6_1.pdf
[16] https://fykos.cz/_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19_3_1.pdf

Princip superpozice

Princip superpozice můžeme využít v mnoha fyzikálních situacích, kdy celkové působení více „zdrojů“ na nějakou testovací částici[17] můžeme prostě jednoduše sečíst.

Další metody založené na symetrii

Zrcadlový náboj

Zrcadlový náboj je metoda využívaná v elektrostatice. Použít ji můžeme, pokud umisťujeme elektrické náboje do blízkosti uzemněné desky. Z dé díky uzemnění mohou odejít nebo na ni přijít elektrony a rozložit se (ve střední hodnotě) tak, že se náboji jeví, že za deskou existuje druhý náboj. Jeho velikost a vzdálenost závisí na tvaru desky a hledáme ho tak, aby na desce byl nulový potenciál. V případě nekonečné rovinné desky (či dostatečně blízko povrchu dostatečně rozměrné desky) se naindukuje právě takový náboj, který vytváří stejnou situaci, jako kdyby za deskou (na druhé straně než je náboj) ve stejné vzdálenosti byl umístěn stejně velký náboj opačného znamení. Toto rozložení by evidentně vytvořilo právě situaci, kdy je na rovinné desce nulový náboj. Na základě tohoto můžeme pak velice jednoduše určit sílu, kterou je náboj přitahován k desce. Nemusíme ani nijak uvažovat diferenciální počet. Další ukázkou aplikace tohoto principu může být úloha FYKOSu 22-VI-2 – útěk z koule.[18]

Gaussův zákon

Další metodou, kterou můžeme využívat v elektrostatice či v gravitačním poli, je využití Gaussova zákona. Ten nám dává vztah mezi intenzitou pole vycházející z povrchu nějaké vhodně zvolené krabičky vůči symetrii daného problému a náboji (u gravitace hmotnými body) umístěnými uvnitř dané krabičky. Formálně bychom sice měli umět integrovat, ale ve vhodných uspořádáních můžeme zákon využít i jenom s intuitivní znalostí integrace. Tuto metodu zmíníme podrobněji ve čtvrtém dílu seriálu.

Souřadnice

Souřadnice, které jsou vhodné pro řešení fyzikálních problémů se často pojí právě se symetrií našeho problému. Abychom byli co nejefektivnější v řešení, tak si můžeme zvolit soustavu souřadnic, která nám vyhovuje.

Základním pravidlem, které souřadnice musí splňovat, že jich musí být právě tolik, kolik dimenzí má prostor, v němž se pohybujeme. Nejčastěji se tedy jedná o dvou- či třídimenzionální

[17] Testovací částice je taková, která nám nenaruší původní rozložení zdrojů.
[18] `https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_6_2.pdf`

souřadnice. Souřadnice pak musí být na sebe kolmé, aby byla určena poloha všech bodů z našeho prostoru jednoznačně.

Základními souřadnicemi, které se využívají na základní a střední škole a i na vysoké škole je obvykle chceme využívat, abychom si dokázali lépe představit situaci, jsou **kartézské souřadnice**. Ty jsou jedno- až třídimenzionální a jde o udání pozice pomocí souřadnic, které obvykle označujeme x, y a z.

Těžišťová soustava

Těžišťová soustava je kartézská soustava souřadná, která je spojená s těžištěm všech (či vybraných) bodů umístěných v naší soustavě. Často ji využíváme, aby nám zbytečně hmotné body „neulétávaly“ společně nějakým preferovaným směrem, protože zajímavá fyzika se obvykle děje až nějakou těchto bodů mezi sebou.

Polární souřadnice

Polární souřadnice jsou 2D a jsou určené vzdáleností od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a orientovaným úhlem $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ měřeným od kladné části osy x v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Výhodou těchto souřadnic může být to, že je můžeme využít i pro tvorbu grafů, které nejsou funkce, ale jde například o postupně se odvíjející spirály, pokud uvažujeme pokračování rozvoje

Převod z kartézských

Válcové souřadnice

FIXME

Sférické souřadnice

FIXME

Inerciální vs. neinerciální soustavy

Často se omezujeme na inerciální soustavy souřadné. Tedy takové, kde platí Newtonovy zákony bez úprav. Nicméně někdy může být vhodně přejít do neinerciální soustavy souřadné. Nastávají zde ovšem drobné problémy s tím, že musíme mít na paměti, že na tělesa v těchto soustavách působí setrvačné síly.

Prvním příkladem takovéto soustavy může být soustava spojená se zrychleně se rozjíždějícím vlakem na jedné přímce. Když se na tento vlak díváme ze soustavy spojené se Zemí (považujme ji pro tento myšlenkový experiment za dostatečně dobře inerciální), pak vidíme, že osoby, co sedí na sedačkách, jsou urychlovány stejně jako zbytek vlaku. Pokud někdo položí kvádr na zem a ta bude dokonale hladká a pak se vlak začne rozjíždět, tak kvádr bude zůstávat na stejném místě. Podívejme se na tuto situaci z jiného pohledu – z neinerciální soustavy spojené s vlakem. V tom případě vidíme, že jsou cestující víceméně v klidu. Ale oni sami pociťují, že jsou tlačeni do sedaček se zrychlením velikostně stejným s zrychlením vlaku. Pokud se podíváme na kvádr na podlaze, tak se nám může zdát, že se bezdůvodně rozjíždí do zadní části vlaku (pokud vlak jede dopředu) se zrychlením odpovídajícím zrychlení vlaku.

Stejně tak můžeme přejít do rotující soustavy. Zde bude situace složitější než u lineárně zrychlující soustavy, protože se nám zde objeví členy odpovídající odstředivé a Coriolisově síle. Tato transformace se používá často například u problému tří těles, kde jsou dvě obíhající se tělesa, která jsou značně hmotná a třetí, které má vůči nim zanedbatelnou hmotnost. Pak se využije korotující systém, kde na hlavní ose jsou umístěna dvě hlavní tělesa. Pokud se obíhají po kruhových trajektoriích, pak jsou v této soustavě nehybná. Pokud se obíhají po eliptické trajektorii, pak se přechází ještě k o něco složitější soustavě, kde jsou opět nehybná a ve stejné vzdálenosti, ale mění se převod a síla, která na třetí těleso působí v jednotlivých bodech v závislosti na čase.

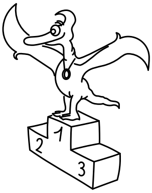
Minkowského prostoročas

FIXME

V rámci omezené délky a obtížnosti seriálu se tomuto nechceme věnovat dále, ale je užitečnou zajímavostí, že v rámci speciální teorie relativity se uvažuje, že časová souřadnice je analogická prostorovým souřadnicím, až na to, že je

Závěr a upoutávka na příště

V příštím díle se chceme dále věnovat zákonům zachování, na které jsme už v tomto dílu trochu narazili. Zákony zachování se nám hodí prakticky vždy a často vedou na rychlé řešení problémů.



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**I**	**%**	**Σ**
Student Pilný	MFF UK		0									

Kategorie druhých ročníků

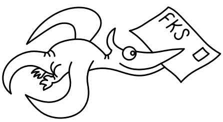
jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**I**	**%**	**Σ**
Student Pilný	MFF UK		0									

Kategorie třetích ročníků

jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**I**	**%**	**Σ**
Student Pilný	MFF UK		0									

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**I**	**%**	**Σ**
Student Pilný	MFF UK		0									



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.