

Úloha I.S ... pomalý rozjezd

10 bodů; průměr 4,92; řešilo 100 studentů

- Vyjádřete následující veličiny¹ pomocí základních jednotek SI.
 - $F \cdot \Omega$, kde F je farad a Ω je ohm
 - $N \cdot \text{Pa}$, kde N je newton a Pa je pascal
 - $\frac{C \cdot V}{J}$, kde C je coulomb, V je volt a J je joule
 - $\frac{T \cdot \text{Wb}}{H \cdot \text{Sv}}$, kde H je henry, Sv sievert, T tesla a Wb weber
- V následujících tvrzeních nalezněte všechny chyby a popište, proč jde o chyby.
 - $s = vt^2/2 = 5,2 \cdot 1,2^2/2 = 3,744 \text{ m}$.
 - $y_m \sin(2\pi\omega) = 15\text{cm} \cdot \sin(2 \cdot 3,141 \cdot 50\text{Hz}) \doteq 0\text{cm}$
 - Pro experimenty jsme použili úspěšně sadu gamabeta. Na základě měření radioaktivního rozpadu Uranu ve smolinci jsme zjistily, že náš vzorek má aktivitu přesně 532,24 bequerelů.
 - $s = 1,23 \text{ m}$, $t = 2,7 \text{ s} \Rightarrow v = s/t \doteq 0,46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $m = 240 \text{ g}$, $E = mv^2/2 \doteq 25 \text{ J}$, $P = E/t \doteq 9,3 \text{ W}$
- Jakou silou působí vítr na korunu stromu? Víme, že to má souvislost s rychlostí větru v , průřezem stromu vystaveného větru S a hustotou vzduchu ρ . Proveďte rozměrovou analýzu a na jejím základě určete vztah pro sílu.
- Sestavte podobnostní číslo odpovídající situaci, ve které protlačujeme kapalinu skrz charakteristickou délku l pomocí gradientu tlaku $\frac{dp}{dx}$ (případně si tuto veličinu představte jednoduše jako změnu tlaku se vzdáleností $\frac{\Delta p}{\Delta x}$). Kapalina má hustotu ρ a kinematickou viskozitu ν . Určete, jaké všechny varianty tohoto podobnostního čísla existují. Jednu z nich si vyberte a pokuste se jí interpretovat.

Bonus Vymyslete co nejoriginálnější Planckovu jednotku (veličinu sestavenou z kombinace redukované Planckovy konstanty \hbar , gravitační konstanty G , rychlosti světla c , Boltzmannovy konstanty k_B a Coulombovy konstanty k_e , přičemž nemusí obsahovat všechny). Popište její odvození a okomentujte její hodnotu. Nejzajímavější zmíníme v brožurce s řešeními.

Karel chce trhat rekordy v délce zadání.

Předně bychom měli poznamenat, že jeden bod opravdu neodpovídá odpovědi na jednu otázku, což bylo i naznačeno tím, že čtyři podotázky jsou za dva body. Současně bychom chtěli připomenout to, že jak jsme varovali, tak pokud řešitelé v letošním seriálu budou dělat přestupky proti formálním pravidlům, tak mohou přijít o nějaké body. Nicméně na druhou stranu co se týká např. podúlohy s hledáním chyb, tak jde o to nalézt alespoň nějaké důležité chyby.

- Budeme postupovat tak, že všechny jednotky převedeme na součin základních jednotek SI a následně co nejvíce zjednodušíme zápis. Pro stručnost rovnou dosazujeme do zadání.
 - $F \cdot \Omega = (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}) = \text{s}$
 - $N \cdot \text{Pa} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}) = \text{kg}^2 \cdot \text{s}^{-4}$
 - $\frac{C \cdot V}{J} = \frac{(\text{A} \cdot \text{s}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1})}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 1$. Tedy v tomto případě nám vyjde bezrozměrná veličina. Toho není třeba se bát² – to se nám obecně stává, pokud vydělíme jednotku tou samou jednotkou. Například pro dosazení do exponenciály, sinu

¹Bez ohledu na to, že dané součiny možná nedávají žádný rozumný fyzikální smysl.

²Podle došlých řešení to někdo považoval za špatný výsledek.

a dalších funkcí právě potřebujeme bezrozměrné veličiny. Obdobně je toto žádaný výsledek pro podobnostní čísla.

$$(d) \frac{T \cdot W_b}{H \cdot S_v} = \frac{(\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1})}{(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}) \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. Úloha s odhalováním chyb nabízela u každé podúlohy větší množství chyb a bylo potřeba najít alespoň jednu relevantní chybu v každém bodě.

(a) V postupu chybí jednotka v mezivýpočtu. Druhá a třetí rovnost tedy neplatí. Na závěr není zaokrouhleno – přestože se podle dosazení zdá, že máme zadané veličiny na dvě platné cifry (případně by se jednalo o chybu přepisu, kdyby tomu tak nebylo), tak je výsledek na čtyři platné cifry. Správně by měl být na dvě až tři platné cifry. Další podstatná chyba je, že pokud t má rozměr času, tak v by muselo mít rozměr zrychlení, aby nám vyšly metry. Pokud autor dodržuje standardní značení, tak je to chyba, protože v by mělo mít rozměr rychlosti. Pokud autor nedodržuje obvyklé značení, pak by to měl uvést. Vzhledem k tomu, že to jsou pravděpodobně pouze výňatky z řešení, tak nemůžeme s jistotou prohlásit, že je to chyba, ale pravděpodobně je.

(b) V úvodní rovnici se zapomnělo na čas. Do sinu totiž nemůžeme dosadit něco, co by mělo nějaký jiný fyzikální rozměr než jednotkový (úhel). Správně je pravděpodobně $y_m \sin(\omega t)$, kde t je čas, pokud je ω úhlová rychlost či frekvence. Pravděpodobně došlo v popisu úlohy k záměně ω , což je úhlová rychlost, za f , což je standardně frekvence. Mezi nimi platí vztah $\omega = 2\pi f$. Vzhledem k tomu, že frekvence $f = 50 \text{ Hz}$ je častá (je v elektrické síti), pak se toto vysvětlení nabízí jako nejpravděpodobnější. Jednotky by se měly psát stojatě a ne italikou, což je tedy drobnější chyba, ale zápis pak není estetický. V postupu jsou pak dvě chyby. Není vhodné místo π napsat 3,141 (což je navíc nesprávně zaokrouhleno, správnější by bylo 3,142), protože pak nám po dosazení vyjde (pravděpodobně okamžitá výchylka nějakého kmitajícího předmětu) $-0,89 \text{ cm}$. Toto by bylo správně zaokrouhlení poslední rovnosti. Nicméně víme, že by se jednalo o celý počet sinových vln a tak by byla výchylka přesně nulová, pokud by byl čas dosazený celočíselný. Ale bez nějaké další veličiny s rozměrem času v sinu je výsledek stejně nesmyslný. Na konec bychom měli napsat tečku.

(c) Pokud jde o závěrečnou část řešení experimentální úlohy, obvykle zde již znovu neuvádíme název použitých pomůcek, ale to není nutně důležitá chyba. Jde také o název, takže by měl být s velkým písmenem (Gamabeta; podle některých zdrojů GamaBeta). Pro informaci, jde o sadu pro měření radioaktivního záření, která je schopná měřit záření beta a gama a proto tento název. Další drobnost je, že formulace, že byla sada použita úspěšně, se obvykle nehodí do fyzikálního zpracování – vhodná je spíše, pokud by šlo o testování. Další chyba ve velkém písmenu je v názvu prvku, který se má psát s malým. Pravděpodobně neměřili (či neměřily) rozpad planety Uran nebo něčeho s tímto názvem. Když jsme zmínili, co je Gamabeta, co měří a že jde o uran, tak bychom měli poznamenat, že nejde změřit přímo celkovou aktivitu uranového zářiče pomocí Gamabety, protože uran 238 se ve velké většině případů rozpadá alfa zářením. Produkty se pak opět postupně rozpadají různými typy záření, kde opět vystupuje alfa, ale i další formy záření. Dále pak také sada nedokáže přímo měřit neutronové záření, pokud náhodou nevyvolá sekundární záření v trubici. Drobnější chybou je pak chybějící c ve slově becquerel. Další chybou je prakticky jistě jedna hrubka. V první větě je ve skupině alespoň jeden muž (použili) a v druhé jsou jenom ženy a případně střední či mužský neživotný rod (zjistily). Nebo pokud by šlo

o řešení do série FYKOSu, pak by mělo jít o individuální řešení a tedy je špatně už samotné množné číslo. Doposavad jde ale o (potenciální) maličkosti, až na to alfa záření. Nejzávažnější chybou je závěr, kdy se uvádí, že má něco přesnou hodnotu aktivity. To je nesmysl samo o sobě, protože radioaktivní rozpad, o kterém se hovoří, má pravděpodobnostní charakter a i kdybychom dokázali měřit aktivitu vzorku dokonale, tak naměříme její kolísání. Dalším reálným problémem jsou konečné rozměry přístroje, který nedokáže obklopit dokonale vzorek a celková aktivita se určuje pouze z určitého prostorového úhlu, který se určuje docela složitě, protože detekční objem je zabudován v zařízení a není jasné, bez rozebrání přístroje, jeho přesný rozměr a umístění. Dalším reálným faktorem je to, že přístroj nemusí detekovat všechny částice. Zejména u vyšších hodnot aktivit se uplatňuje tzv. mrtvá doba detektoru. Aktivita také obvykle s časem klesá.³ Tedy celkově nelze nikdy říct, že aktivitu známe přesně. Pokud bychom zanedbali slovo „přesně“ a předpokládali, že výsledek je přesně na 0,01 Bq, pak bychom museli měřit vzorek minimálně 90 let, abychom ji naměřili tak přesně. Opět za předpokladu, že by se aktivita neměnila z důvodu úbytku látky, která se rozpadá, a nově přeměněných jader. Další potenciální chybou je neuvážení pozadí – kosmického záření a přirozené radioaktivity v přírodě. Nicméně to by teoreticky mohlo být výpočetně ošetřené, ale na požadovanou přesnost by si to vyžadovalo místo s konstantním pozadím a další desítky let.

- (d) Do tohoto zadání se vloudil šotek či oprava. V nějakých verzích bylo k nalezení $,46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, tedy chyběla nula. Což je také formální chyba. Ale ne všichni ji mohli nalézt. Podle výpočtu rychlosti se zdá, že se jedná o pohyb s konstantní rychlostí. V tom případě by se ale dalo čekat, že výkon je nulový, nebo že výkon nezávisí uvedeným způsobem na rychlosti, ale museli bychom ho počítat z odporových sil a ne z kinetické energie. Základní jednotkou je kilogram, ale do výpočtu energie byly dosazeny gramy. Výsledek by měl být tedy tisíckrát menší. V průběhu jsou vypočítány mezivýsledky, které jsou dále dosazovány a mají nízkou přesnost. Dochází tedy k zaokrouhlovacím chybám. Správnější by bylo vyjádřit neznámou a dosadit až na závěr $P = \frac{m s^2}{2 t^3} \doteq 9,2 \text{ mW}$ (za předpokladu, že předchozí vztahy platí).

3. Jedná se o velice jednoduchou aplikaci rozměrové analýzy, která se v tomto případě dá docela snadno tipnout, ale ukažme si korektní postup. Předpokládáme tedy, že platí vztah

$$F = C \rho^\alpha S^\beta v^\gamma,$$

kde F je síla, kterou hledáme, a α , β a γ jsou hledané, neznámé, exponenty. C je pak neznámá bezrozměrná konstanta, kterou neurčíme, ale na závěr bychom mohli diskutovat, na čem bychom očekávali, že bude záviset. Víme, že fyzikální rozměry veličin jsou $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $[S] = \text{m}^2$ a $[v] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Fyzikální rozměr síly je pak $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Můžeme tedy psát, že pro jednotky platí

$$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{m}^2)^\beta \cdot (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^\gamma.$$

Tento vztah můžeme upravit a následně přepsat jako soustavu tří rovnic tří neznámých, protože se musí rovnat všechny fyzikální rozměry.

$$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg}^\alpha \cdot \text{m}^{-3\alpha+2\beta+\gamma} \cdot \text{s}^{-\alpha-\gamma},$$

³To ale nemusí být vždy pravda. Počáteční vzorek rozpadat na nějaké další radioaktivní látky. Pokud mají tyto produkty kratší poločas rozpadu, pak může celková aktivita vzorku po nějakou dobu růst.

$$\begin{aligned}1 &= \alpha, \\1 &= -3\alpha + 2\beta + \gamma \\-2 &= -\gamma.\end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic je opravdu jednoduché vyřešit, protože první neznámou jsme dostali okamžitě a třetí prakticky také. Pak zbývá jenom dosadit do zbývajících druhé rovnice. Dostáváme tak $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = 2$. Celkový výsledek je tedy $F = C \rho S v^2$. U konstanty C bychom pak čekali, že bude záviset na tvaru stromu, který jsme zatím nijak neuvažovali. Případně pak může záviset i na směru větru, pokud nebude strom sféricky symetrický.

4. Postup s určováním podobnostních čísel je vlastně ten samý jako u rozměrové analýzy. Dokonce bychom se na to mohli dívat tak, že hledáme nějaké kombinace pro to, jak vyjádřit jednu z veličin, a pak prostě závěrečný vztah vydělíme touto veličinou.

Co se mohlo zdát komplikované na úloze je přítomnost gradientu. Nicméně bylo přímo v zadání uvedeno, že si mají řešitelé tuto veličinu představit jako změnu tlaku se vzdáleností, kde nejsou d , ale Δ veličiny. Pro přehlednost si označme $k = \frac{dp}{dx}$. Zjevně bude jednotka k podílem jednotky tlaku a délky, tedy $[k] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$. Chceme, aby platilo

$$C = l^\alpha \cdot k^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot \nu^\delta,$$

kde C je bezrozměrné. Víme, že $[l] = \text{m}$, $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $[\nu] = \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Tedy má platit

$$1 = \text{m}^\alpha \cdot (\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-2})^\beta \cdot (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\gamma \cdot (\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})^\delta.$$

Exponenty přerovnáme a opět sestavíme rovnice, ale tentokrát tři pro čtyři neznámé.

$$\begin{aligned}0 &= \beta + \gamma, \\0 &= \alpha - 2\beta - 3\gamma + 2\delta, \\0 &= -2\beta - \delta.\end{aligned}$$

Jednu neznámou si tedy můžem zvolit jako parametr. Vyberme například β . Okamžitě dostáváme $\gamma = -\beta$ a $\delta = -2\beta$. Po dostavení do druhé rovnice pak máme $\alpha = 3\beta$. Zjišťujeme, že jsme si zvolili docela vhodně, protože nejmenší exponent v absolutní hodnotě je β a nevyskytují se žádná necelá čísla. Současně jsou dva exponenty kladné a dva záporné. Tedy by se dalo říci, že jsme dostali optimální kombinaci pro $\beta = 1$

$$C = \frac{l^3}{\rho \nu^2} \frac{dp}{dx}.$$

Samozřejmě, že pokud umocníme číslo, které jsme si označili jako C , na libovolné nenulové číslo, dostaneme „stejně dobré“ podobnostní číslo. Jenom bude vypadat pravděpodobně o dost komplikovaněji. Nejzákeřnější část celé úlohy je interpretace výsledku. Vzhledem k tomu, že známe experiment pouze letmo, to jde docela stěží. Nicméně vidíme, že v této formulaci číslo rychle roste s rostoucí charakteristickou délkou a lineárně s gradientem tlaku. Naopak je nepřímě úměrné hustotě a viskozitě. Tedy například můžeme prohlásit, že pro stejný typ proudění pro dvojnásobnou charakteristickou délku ve stejné kapalině za stejných podmínek potřebujeme aplikovat osminový tlak. To zní docela neintuitivně vzhledem k běžné zkušenosti. Ale obvykle nemáme zkušenosti s nuceným tokem viskózní

kapaliny. Podívejme se tedy na podobnostní číslo vybrané profesionálním fyzikem. Úloha byla vytvořena tak, že bylo vybráno Hagenovo číslo,⁴ nicméně existuje nepřeborné množství čísel, které mají stejnou kombinaci fyzikálních veličin s drobnými odchylkami. Právě Hagenovo číslo pak používá ještě konstantu -1 , ale jinak je stejné.

5. **Bonus:** Tato úloha byla spíše o kreativitě než o fyzikální praxi. Originalita byla hodnocena tak, že body za ni získali ti, kteří našli Planckovu veličinu, která není k nalezení na Wikipedii⁵

Řešitelů, kteří odevzdali řešení s bonusem bylo poměrně málo. Zmíňme tedy originální fyzikální veličiny, které jste nám poslali

- intenzita elektrického pole (Herman),
- magnetický moment (Twardoch),
- měrná tepelná kapacita (Krška),
- magnetizace (Vavřík)
- a magnetický indukční tok (Čemanová).

Můžeme přidat další originální Planckovy veličiny. Například nikdo neposlal řešení s Planckovým ryvem, který je změnou Planckova zrychlení a_P za Planckův čas t_P . Pokud už známe Planckovu délku $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$ a Planckův čas $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$, můžeme psát

$$g_P = \frac{a_P}{t_P} = \frac{c}{t_P^2} = \frac{l_P}{t_P^3} = \frac{c^6}{\hbar G} \doteq 1,0315 \cdot 10^{95} \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}.$$

Planckův ryv je takto nepředstavitelně vysoká hodnota. Připomeňme ještě, že ryv se uplatňuje například v konstrukci dopravních prostředků. Menší zrychlení, která nastávají pro rozjíždění a zpomalování vlaku cestujícím nevaří tolik, když se mění pomalu. Pokud se mění rychle, je to pro ně nepříjemné. Proto se konstruktéři snaží minimalizovat ryv.

Co se týče kombinací, které mohou vzniknout, tak je zajímavé zamyslet se nad tím, jestli pomocí pěti zmíněných veličin ze zadání můžeme nakombinovat nějaké podobnostní číslo. Teplota a elektrický proud vystupují mezi veličinami pouze jednou. Proto není možné, aby Coulombova a Boltzmannova konstanta vystupovaly v konečném vztahu. Když se zaměříme na zbývající dvě, tak je kombinace mocnin proměnných opět taková, že nám buď jedna jednotka zůstane, nebo musí být všechny mocniny nulové. Podobnostní číslo tedy nezískáme.

Poznámky k došlým řešením

Obecně by se dalo říci, že s rostoucím číslem úlohy klesal počet řešení, který se jí věnoval. Sice byly řazené podle obtížnosti, ale snad i na základě vzorového řešení uznáte, že získat alespoň větší část bodů ze 4. části nebylo těžší, než získat je ze 3. části.

Hodnocení se snažilo být mírné. Takže bylo možné dostat část bodů i za pouhý výsledek. To už příště tolerovat nebudeme a bez uvedení postupu nebudeme body přiznávat. Pokud popisujete chyby, tak je potřeba slovně popsat, proč je to chyba a co je tam špatné.

Zmíňme některé častější chyby a začneme u bodu 1. Pár řešitelů psalo, že coulomb je ampér za sekundu – správně je to ale tak, že ampér je coulomb za sekundu. Někteří měli problém s tím, když jim vyšla bezrozměrná veličina, a na konec rovnosti napsali 0 (či dokonce prázdnou množinu) místo 1. Ale přitom by pravděpodobně řekli, že metr se do metru vejde jednou a tedy

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Hagen_number

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_units

metr děleno metr je jedna. Pár řešitelů si také myslelo, že coulomb či volt jsou základní jednotky SI, což není pravda.

V části věnované hledání chyb nám hodně vadilo, pokud jste tvrzení s chybami opsali a našli jste v něm jenom jednu chybu. Nebo že jste se snažili tvrzení opravit a opravili jste třeba právě jenom jednu chybu. Daleko lépe bylo hodnocené, pokud jste jenom popsali vybrané chyby – tedy našli jste alespoň něco, ale netvrdili jste, že zbytek je v pořádku. Několikrát se objevilo nesprávné tvrzení, že můžeme počítat jenom v základních jednotkách SI. Ano, je to vhodnější, pokud si nejste jistí převodem. Ale například u bodu 2, pokud za amplitudu dosadíme centimetry, tak je prostě výsledek v centimetrech, protože sinus je bezrozměrný. Naopak často jste si nevsimli, že do sinu nebyly dosazeny bezrozměrné veličiny. Několik řešitelů v prvním bodě opravovali $vt^2/2$ na $gt^2/2$ – přitom ale není důvod si myslet, že jde nutné o volný pád – mohla jít o jiný zrychlený pohyb i podle dosazeného čísla. Ačkoli je možné, že by mohla nastat i taková záměna, bylo by dobré poznamenat, proč si to myslíte. Někdo uváděl, že je chybou zaměnit práci W ve výkonu P za energii E . Není důvod toto tvrdit, protože obecně je výkon počítaný z energie a omezení vzorce jenom na práci není nutné, práce i energie mají stejný fyzikální rozměr a záleží na tom, jak jsme si obě veličiny zavedli.

Ve třetím bodě bylo nejčastější chybou nepoužití rozměrové analýzy, ale použití nějakých fyzikálních úvah, nalezení Newtonova vzorce pro odporovou sílu a v několika případech dokonce zavádění dalších veličin, které nejsou uvedené v zadání. Pokud je v zadání úlohy explicitně napsáno, že se chce řešení pomocí rozměrové analýzy, tak pro získání maximálního počtu bodů vyžadujeme rozměrovou analýzu. Naopak bylo vítáno, pokud jste nejdříve provedli rozměrovou analýzu, která byla v tomto případě opravdu jednoduchá, a pak jste okomentovali výsledek a například jste ho ještě srovnali s Newtonovým vztahem.

Ve čtyřce byl nejčastější problém, že jste ani nezkusili úlohu řešit. Další pak byl v tom, že jste našli jenom jedno či pár řešení, ale ne všechna.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.