## Úloha IV.S ... elektro todleto

10 bodů; průměr 4,80; řešilo 40 studentů

1. *Jak velký je odpor mezi sousedními vrcholy $n$-dimenzionálního drátěného „čtyřstěnu“? Každá hrana má odpor $R$. Začněte výpočtem pro $n = 1$ (úsečka), $n = 2$ (trojúhelník) a $n = 3$ (čtyřstěn) a následně najděte obecný vztah.*
2. *Jaké umístění a velikost bude mít zrcadlový elektrický náboj k přímce s homogenní délkovou hustotou náboje $\lambda$, která je umístěna ve vzdálenosti $r > R$ od středu uzemněného dutého nekonečně dlouhého válcového vodiče o poloměru $R$? Válcový vodič a přímka jsou rovnoběžné.*
3. *Mějme nekonečnou rovinu s plošnou hustotou náboje $\sigma_1$. Té se téměř dotýká kulová slupka s poloměrem $R$ a s plošnou hustotou náboje $\sigma_2$. Jaký musí být vztah mezi uvedenými veličinami, aby v místě, kde jsou k sobě deska se slupkou nejblíže, byla intenzita elektrického pole nulová?*

*Bonus* *Jaká je intenzita gravitačního pole uvnitř a vně planety o poloměru $R$, jejíž hustota záleží pouze na vzdálenosti od středu $r$ podle vztahu $\varrho = \varrho_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$?*

*Karel stále dělá problémy.*

### *Odpor $n$-dimenzionálního čtyřstěnu*

Budeme postupovat podle doporučení a začneme s úsečkou, u které víme, že odpor bude triviálně $R_1 = R$. Druhým krokem má být trojúhelník. Ten je složený z jednoho přímého spojení a druhého, které má odpor dvou hran. Ty jsou zapojené paralelně, a proto výsledný odpor bude

$$R_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \left(\frac{2+1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2}{3}R\,.$$

Déle nás zajímá čtyřstěn. Označme $a$ a $b$ vrcholy, mezi kterými měříme odpor, zbylé dva budou $c_1$ a $c_2$. Všimněme si, že každý vrchol je spojen se všemi ostatními. Proud z $a$ do $b$ poteče po těchto cestách: $(a, b)$, $(a, c_1, b)$ a $(a, c_2, b)$. Všechny ostatní cesty obsahují hranu $(c_1, c_2)$, přes kterou ale proud téct nemůže. Vysvětlení je jednoduché – vrcholy $c_1$ a $c_2$ jsou stejně daleko od bodů $a$ a $b$ (přesně jednu hranu), čili jsou na stejném potenciálu. Jak bylo zmíněno v seriálu, proud teče pouze mezi body s rozdílným potenciálem. Odpor tří paralelně spojených cest určíme snadno jako

$$R_3 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{1}{2}R\,.$$

Nyní provedeme indukční krok, potřebný k zobecnění do $n$-té dimenze. Přidáme další vrchol, označme jej $c_{n-1}$, a spojíme jej se všemi dalšími vrcholy. Tím vznikne $n$ nových hran – $(a, c_{n-1})$, $(b, c_{n-1})$ a $n-2$ hran typu $(c_i, c_{n-1})$, kde $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Podle argumentu výše ale budou všechny vrcholy $c_j$ na stejném potenciálu, takže po hranách mezi nimi nepoteče proud. Jediná nová cesta, kterou zvětšením dimenze o jedna získáme, bude $(a, c_{n-1}, b)$. Tuto cestu připojíme paralelně se všemi ostatními, čili výsledný odpor bude

$$R_n = \left(\frac{1}{R} + (n-1)\,\frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2}{n+1}R\,.$$

Odpor $n$-dimenzionálního čtyřstěnu je $\frac{2}{n+1}R$ pro libovolné přirozené $n$.

*Zrcadlový náboj*

Původně se mělo jednat o zjednodušení 2. úlohy z 6. série 22. ročníku FYKOSu, kterou jsme citovali v textu seriálu, protože nyní bylo možné zjednodušit situaci na dvojrozměrný problém. Ale ukázalo se, že v řešení je háček a přijímali jsme relativně tolerantně i pokusy o řešení, které dávaly alespoň trochu smysl (tedy zrcadlový náboj byl uvnitř válce a měl zápornou velikost). Nejdříve se trochu netradičně podíváme na špatný způsob řešení, protože i chybami se člověk učí.

Omezíme se na rovinu kolmou na hlavní osu válce. Případně, pokud chceme, můžeme si představovat, že vezmeme nějaký tenký řez výšky $h$, ve kterém bude uzavřen náboj $Q = \lambda h$.

Hledáme takový drát,[1] který bychom umístili dovnitř válce rovnoběžně s vnějším drátem tak, aby byl potenciál elektrického pole na povrchu válce nulový (na povrchu libovolného uzemněného tělesa je vždy nulový potenciál). To bude náš zrcadlový náboj. Vzdálenost tohoto drátu od středu válce označíme $r'$ a jeho délkovou hustotu náboje $\lambda'$. Předpokládáme, že zrcadlový drát bude umístěný stejným směrem od středu válce jako je původní. Pokud by to tak nebylo, pak by nám v následujícím řešení vyšla záporná vzdálenost. A nyní se dopustíme zásadní chyby, protože budeme předpokládat následující vztahy pro potenciál, odpovídající bodovým nábojům

$$\frac{\lambda}{r-R} + \frac{\lambda'}{R-r'} = 0\,,$$
$$\frac{\lambda}{r+R} + \frac{\lambda'}{R+r'} = 0\,.$$

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých odpovídá podmínce nulového potenciálu pro bod na povrchu kružnice nejblíže, resp. nejdále od původního nabitého drátu. Můžeme z ní určit jak polohu, tak délkovou hustotu zrcadlového náboje

$$r' = \frac{R^2}{r}\,, \quad \lambda' = -\lambda\frac{R}{r}\,.$$

Podmínku jsme splnili pro dva body. Měli bychom ještě ověřit, jestli je splněna na celé kružnici. Pokud umístíme osu válce do počátku a oba dráty na osu $x$, pro potenciál v libovolném bodě roviny můžeme psát

$$\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{(x-r)^2+y^2}} + \frac{\lambda'}{\sqrt{(x-r')^2+y^2}}\,.$$

Položíme-li $\varphi = 0$, dosazením za $\lambda'$ a $r'$ dostaneme

$$\frac{\lambda}{\sqrt{(x-r)^2+y^2}} - \frac{\lambda\frac{R}{r}}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{r}\right)^2+y^2}} = 0\,,$$

což můžeme upravit na $\left(x^2+y^2-R^2\right)\left(r^2-R^2\right) = 0$. Jelikož rovnice kružnice je $x^2+y^2 = R^2$, tato podmínka je zřejmě splněna a potenciál na celé kružnici je skutečně nulový. Problém je, že jsme i k této kontrole využili stejný vztah pro potenciál, a proto chyba nebyla odhalena.

Správně bychom si měli uvědomit, že intenzita elektrického pole ve vzdálenosti $r$ od středu homogenně nabité přímky je

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,.$$

[1] Jako drát budeme v této úloze označovat nabitou přímku s konstantní délkovou hustotou náboje.

Jak vidíme, zjednodušení situace na dvojrozměrný případ není tak triviální, jak by se mohlo na první pohled zdát. Nyní spočítáme potenciál

$$\varphi(x) = -\int_{\infty}^{x} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}} \,\mathrm{d}\tilde{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \left[\ln \tilde{r}\right]_{x}^{\infty} .$$

Problém s tímto výpočtem je ten, že nulová hodnota potenciálu se typicky volí v nekonečnu, ale v tom případě dostáváme nekonečné hodnoty, což nechceme. Musíme tedy nulovou hladinu zvolit v nějaké konečné vzdálenosti $r_0$. To navíc potřebujeme i kvůli tomu, aby v logaritmu byla bezrozměrná veličina. Výsledný potenciál bude

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \left[\ln \tilde{r}\right]_{x}^{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{x} .$$

Stejně jako ve špatném řešení, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r - R} + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{R - r'} = 0 ,$$
$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r + R} + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{R + r'} = 0 .$$

Její řešení a následné ověření platnosti $\varphi = 0$ na celé kružnici je však mnohem obtížnější, proto byl udělován plný počet bodů už za sestavení těchto rovnic a diskuzi.

### *Plošně nabité objekty*

Z textu seriálu víme, že pro velikost intenzity elektrického pole desky platí

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} .$$

Podívejme se na tenkou kulovou slupku. Budeme uvažovat, že jsme těsně nad povrchem a že plocha, na které je intenzita stejná, je $S = 4\pi R^2$, což odpovídá povrchu koule. Náboj uzavřený v kouli je pak $Q = S\sigma_2$. Dostáváme intenzitu

$$E_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} .$$

Vidíme, že intenzita těsně nad povrchem koule nabité plošným nábojem nezávisí na jejím poloměru. Intenzity směřují v nejbližším bodě proti sobě – aby byla celková intenzita nulová, musí se velikosti obou intenzit rovnat, čili platí

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} ,$$
$$\sigma_1 = 2\sigma_2 .$$

Nalezli jsme hledanou podmínku pro parametry, kdy musí platit $\sigma_1 = 2\sigma_2$ a poloměr koule může být libovolný. Na závěr poznamenejme, že úloha předpokládá, že nabití je pevné a náboje se na objektech nehýbou. V případě, že by koule či deska byly vodivé, bylo by to daleko složitější. Už z logiky věci bychom nemohli použít zjednodušenou verzi Gaussova zákona, protože by byla porušená symetrie, kterou pro ni potřebujeme.

*Gravitační pole planety*

Začněme výpočtem vnější intenzity. Jelikož je situace sféricky symetrická, bude nám stačit určit celkovou hmotnost planety

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \mathrm{d}r = 4\pi\varrho_{\max} \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) \mathrm{d}r = 4\pi\varrho_{\max} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]_0^R =$$
$$= 4\pi\varrho_{\max} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}\varrho_{\max} R^3 \,.$$

Pokud bychom srovnali hmotnost homogenní planety s hustotou $\varrho_{\max}$ s naší planetou, byla by dva a půl krát větší.

Intenzita gravitačního pole naší planety nad jejím „povrchem“[2] je dle Gaussovy věty

$$K = -\frac{4\pi GM}{S} = -\frac{8\pi}{15} G\varrho_{\max} \frac{R^3}{r^2} \,.$$

Jak vidíme, opět jsme dostali intenzitu klesající s druhou mocninou vzdálenosti od středu koule. Nyní přejdeme do vnitřní oblasti. Integrovat nebudeme celou hmotnost planety, ale pouze její část do vzdálenosti $r$ od středu. Jde ovšem o prakticky stejnou úlohu, pouze s jinou konečnou mezí

$$M_r = \int_0^r 4\pi\tilde{r}^2 \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R}\right)^2\right) \mathrm{d}\tilde{r} = 4\pi\varrho_{\max} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) .$$

Pro intenzitu platí

$$K = -\frac{4\pi GM_r}{S_r} = -4\pi G\varrho_{\max} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right) .$$

Záporné znaménko u intenzity znamená, že vždy směřuje do středu koule. V řešení je potřeba dodržovat znaménkovou konvenci či alespoň uvést, kterým směrem bude intenzita směřovat. V tomto případě to sice není tak nutné, protože máme pouze jedno těleso a jde o gravitační pole, ale už v případě dvou či více těles se to komplikuje.

Zajímavostí, které si všiml Jaroslav Herman, je, že maximální intenzita gravitačního pole není na povrchu planety, ale ve vzdálenosti $r_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{3}R$ od středu planety. Intenzita v tomto bodě je $K = -\frac{8\sqrt{5}\pi}{27}G\varrho_{\max}R$, což je zhruba 1,24 násobek velikosti na povrchu planety.

Na závěr bychom rádi připomněli, že jsme sice spočítali intenzitu gravitačního pole, ale tím jsme neurčili tíhové zrychlení. Bohužel, tyto pojmy se často pletou. Tíhové zrychlení totiž zahrnuje i odstředivé zrychlení způsobené rotací planety.

***Karel Kolář***
`karel@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



[2] Dle definice hustoty v závislosti na poloměru je akorát na povrchu nulová hustota. Tedy není to nějaký pevný povrch, ale ohraničení, které považujeme za povrch.