Úloha V.S ... mini a maxi

10 bodů; (chybí statistiky)

1. *Máme PET lahev s vodou, která stojí na nekonečné rovině. V jaké výšce bychom měli vytvořit v lahvi malý otvor, aby voda dostříkla co nejdále od lahve? Lahev po celou dobu nehybně stojí na rovině a otvor prochází kolmo stěnou. Průřez otvoru je výrazně menší než průřez lahve.*
2. *Kam bychom měli umístit otvor (viz předchozí podúloha), pokud chceme, aby byl dostřik nejdelší po jedné minutě? Předpokládejte, že lahev má konstantní průřez S a otvor má výrazně menší průřez s. Pro numerické řešení odhadněte rozumné hodnoty konstant.*
3. *Jaký může mít baterie maximální výkon na spotřebiči, pokud má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i? Pro jaký odpor spotřebiče to nastane? Popřípadě, pro jakou impedanci to nastane, pokud bude obvod tvořen rezistorem, cívkou a kondenzátorem?*
4. *Jak nejblíže se k sobě mohou dostat dvě jádra dusíku 14, která se pohybují se střední kvadratickou rychlostí odpovídající plynu za normálních podmínek?*
5. *Najděte maximální možnou teplotu, kterou by mohl mít plyn, ve kterém by probíhal děj $p = p_0 \mathrm{e}^{-\alpha V}$, kde α je kladná konstanta a p_0 je tlak plynu v počátečním stavu.*

Karel napínal až do poslední chvíle.

Předně poznamenejme, že bychom akceptovali jak numerická, tak analytická řešení, a to jak s použitím derivací, tak bez nich. Ve vzorovém řešení jsou vybrána ta řešení pro danou úlohu, která jsme považovali vhodná pro daný problém, ale nejsou jediná možná.

Dostřik vody

Otvor je dle zadání malý. Můžeme tedy uvažovat, že v celém jeho průřezu vytéká voda stejnou rychlostí. Dále uvažujeme, že dno nádoby zanedbatelně tlusté. To je pouze z praktických důvodů, že může být pak otvor libovolně nízko. Voda, která je pod otvorem totiž nijak náš experiment neovlivní. Zanedbáváme pak také všechny odporové síly a povrchové napětí vody. Láhev také uvažujeme za shora otevřenou, i když to se vztahuje zejména až k druhé části, protože v okamžiku začátku výtoku, pokud bude nahoře v lahvi atmosférický tlak, bude maximální dostřik stejný.

Označíme výšku hladiny v nádobě jako H a výšku otvoru nad stolem h. Rychlost výtoku vody je dána v ideálním případě bez vnitřního odporu vody výškou vody nad otvorem $H - h$. Díky přenosu tlakem sloupce vody můžeme uvažovat jako by se voda urychlila pádem o odpovídající výšku. Tedy rychlost dostaneme ze zákona zachování mechanické energie

$$mg\,(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v \;=\sqrt{2g\,(H-h)}\,.$$

Použili jsme standardní značení m pro hmotnost malého objemu vody, g tíhové zrychlení a v rychlost. S touto rychlostí voda opustí nádobu kolmo na její povrch. Následuje vodorovný vrh, který si můžeme rozložit na volný pád ve svislé ose a rovnoměrný pohyb v kolmé ose. Doba pádu je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Za tuto dobu se v druhé ose proud vody posune o vzdálenost

$$d = v\,t = \sqrt{2g\,(H-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H-h)\,h}\,.$$

Proud vody tedy dostříkne na vzdálenost $2\sqrt{(H-h)\,h}$. Je zajímavostí, že nezávisí na tom, jak velké je tíhové zrychlení. Jediné, co stačí předpokládat, je, že je nějaké konstantní nenulové tíhové zrychlení v oblasti, kde experiment provádíme. Samozřejmě tedy máme na paměti spoustu předpokladů z počátku. Navíc bychom neměli kapalnou vodu, kdyby v okolí nebyl nějaký tlak vzduchu. Vraťme se k původní otázce, a to maximalizaci vzdálenosti d. Odmocnina je funkcí, která je rostoucí. Tedy pokud je maximální její argument, tak je maximální i tato odmocnina. Stačí tedy maximalizovat funkci $f=(H-h)\,h$. H uvažujeme jako fixní a měníme h. Upravíme funkci na čtverec

$$f = Hh - h^2 = -\left(h - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{H^2}{4}\,.$$

Ze zápisu vidíme, že maximum nastane u naší funkce pro $h=\frac{H}{2}$. Největší dostřik nastává pro otvor v poloviční výšce. Konkrétně voda dostříkne do vzdálenosti $d_{\max}=H$. Tím máme odpověď na první otázku.

Druhá otázka je komplikovanější. Tu budeme řešit už pro nějaké konkrétní odhadnuté hodnoty numericky. Už v zadání jsme naznačili, že by mohlo být vhodné využít numerickou simulaci a odhadnout parametry. Počáteční naplnění láhve budeme brát jako $H=25\,\mathrm{cm}=0{,}25\,\mathrm{m}$. Plochu průřezu lahve budeme brát jako $S=60\,\mathrm{cm}^2=6{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. To odpovídá maximální rychlosti výtoku v nulovém čase zhruba $1{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Průřez otvoru pak můžeme řádově odhadnout na $S_\mathrm{o}=2{,}0\,\mathrm{mm}^2$. To odpovídá realistickému počáteční rychlosti poklesu hladiny o 3,1 cm za minutu, která ovšem okamžitě začne klesat.

Pro numerickou simulaci využijeme nástroj, který mají dostupní téměř všichni, a to Microsoft Excel. Není to sice prostředí, které by používali běžně profesionální fyzici pro simulace, ale pro jednoduché využití využití nám postačí. Využijeme zde doplněk „Řešitel" (v anglické verzi „Solver"), který se sice skrývá v instalaci, ale musíte si ho před prvním použitím zavést (hledejte postup v nápovědě). Alternativně můžete také využít nějaký volně dostupný tabulkový procesor a také není nutné využít nějaký doplněk, který ale pravděpodobně bude také existovat, ale při optimalizaci pouze jednoho parametru ho můžete měnit manuálně.

Připravíme si list, kde uvedeme definované počáteční hodnoty a konstanty. Sestavíme vzorce na změnu výšky hladiny v láhvi. Odhadli jsme se, že časový krok 0,01 s bude postačující pro naše potřeby. To by mělo stačit pro přesnost výsledku na tři platné cifry. Náš algoritmus je následující. V daném čase vypočítáme z výšky hladiny rychlost výtoku kapaliny. Na základě rychlosti výtoku určíme objem kapaliny, který vyteče a následně i pokles hladiny v láhvi.[1] Pokles hladiny použijeme pro změnu aktuální výšky hladiny vody v láhvi. Pomocí doplňku Řešitel pak maximalizujeme hodnotu v buňce s vzdáleností dostřiku vody pomocí změň buňky s výškou otvoru nad podložkou. Výpočet si můžete prohlédnout v souboru.[2] Pokud byste se zajímali o lepší metody numerického výpočtu, podívejte se na seriál 31. či 21. ročníku FYKOSu.

Pro námi odhadnuté hodnoty a pro otevřený vršek láhve je optimální vytvořit dírku 11,7 cm nad povrchem stolu. Po minutě bude dostřik z této výšky 21,9 cm.

V rámci zadání byl v úloze skrytý bonus, a to prozkoumat i variantu s uzavřenou láhví. Jak jsme již naznačili, tak pro ideální láhev je dostřik na počátku stejný. Nedošlo totiž ještě k poklesu hladiny a poklesu tlaku nad kapalinou. Pro případ, že sledujeme výtok po minutě je ale

[1] Mohli bychom nějaké kroky vynechat. Jeden z těchto dvou údajů je vlastně zbytečný. Ale je dobré sledovat ve výpočtu i nějaké vedlejší veličiny, když hledáte chybu. Také je vhodné optimalizovat postup, když chcete výsledky zpřesnit a jste omezeni výpočetním výkonem. Nicméně s použitím dnešního běžného notebooku a Excelu není problém si dovolit „luxus" pár sloupečků navíc.

[2] TODO URL souboru

situace výrazně složitější. Předpokládáme, že na počátku byl u hladiny vody atmosférický tlak. Rychlost výtoku pak počítáme z rozdílu tlaků uvnitř na úrovni otvoru ve stěně a atmosférického tlaku venku. Když bude rozdíl nulový, tak se výtok z lahve zastaví. Pro potřeby úlohy budeme předpokládat, že je vniřní průřez láhve konstantní až do výšky, kterou zvolíme jako $H_l = 30\,\mathrm{cm}$.

Hlavním problémem, na který narazíme pro takto nastavené parametry, je, že výtok po nějakých pár sekundách přestane. Konkrétně pokud se pak snažíme alespoň maximalizovat dobu výtoku, pak dosáhneme 3,4 s pro nulovou výšku otvoru nad podložkou. Pokud otvor umístíme výše, pak je doba ještě kratší. Můžeme zmenšit otvor v láhvi či zvětšit prostor v láhvi nad hladinou. Obě tyto změny mohou vést k tomu, že voda z jinak dokonale těsné láhve bude vytékat déle. Láhev moc zvětšovat nechceme, tak upřednostníme zmenšení otvoru. Zmenšení plochy na desetinu nepostačí, zmenšíme tedy na jednu setinu, tedy $0{,}02\,\mathrm{mm}^2$. Pak dostáváme výsledný dostřik 18,8 cm pro otvor 10,8 cm nad povrchem stolu.

Výkon baterie

Nejdříve se zaměříme na situaci s rezistorem s odporem R a stejnosměrným proudem. Proud protékající obvodem bude

$$I = \frac{U_e}{R_i + R}\,.$$

Napětí se rozdělí na vnitřní odpor a na spotřebič. Tedy napětí na rezistoru bude

$$U = U_e \frac{R}{R_i + R}\,.$$

Výkon na spotřebiči je součin proudu a napětí na součástce

$$P = UI = \frac{R}{(R_i + R)^2} U_e^2\,.$$

Vidíme, že pro R blížící se 0 jde výkon také k 0. Obdobně pak pro velmi velký odpor R jde výkon k 0. Maximum bude tedy někde pro nějakou konečnou hodnotu. V tomto případě extrém budeme hledat analyticky pomocí derivace. Chceme hledat extrém P v závislosti na R, tedy derivujeme

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{(R_i + R)^2 - 2R\,(R_i + R)}{(R_i + R)^4} U_e^2 = \frac{R_i - R}{(R_i + R)^3} U_e^2\,.$$

Abychom nalezli extrém, položíme derivaci rovnou nule

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = R_i\,.$$

Maximální výkon nastane pro odpor, který je stejný jako vnitřní odpor zdroje a bude mít hodnotu $P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i}$.

Podívejme se na verzi úlohy se střídavým proudem. Budeme předpokládat, že prvky RLC jsou zapojeny v obvodu sériově. Pak je celková impedance obvodu

$$Z = \sqrt{(R + R_i)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,,$$

kde ω je úhlová frekvence proudu. Zajímá nás užitečný výkon na spotřebiči, tedy činný výkon $P = UI\cos\varphi$, kde $\cos\varphi$ je účiník, který určíme z fázového rozdílu, pro který platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\,.$$

Po troše práce zjistíme, že výsledek je stejný jako ve stejnosměrném případě. Pouze je potřeba doplnit podmínku pro vztah mezi kapacitou, indukčností a úhlovou frekvencí, a sice

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,.$$

S touto podmínkou je účiník rovný 1, tedy maximální možné hodnotě, a obvod se, co se týče výkonu, chová jako rezistor.

Jádra dusíku

Normální podmínky odpovídají tlaku $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$ a teplotě $t = 0\,{}^\circ\mathrm{C}$, resp. $T = 273{,}15\,\mathrm{K}$. Střední kvadratická rychlost částice v plynu, kterou si můžeme najít v tabulkách, je

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}\,,$$

kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta a m_0 hmotnost částice. Ta byla zadána tím, že jde o atomární dusík 14, tedy $m_0 = 2{,}33 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Rychlost obou částic bude $v \doteq 700\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Pokud by někdo vzal molekulu dusíku, pak by hmotnost byla dvojnásobná a rychlost molekuly nižší. Zadána byla ale úmyslně pouze jádra, aby byla další část úlohy jednoznačnější. Když máme jádra, tak je můžeme brát daleko snadněji jako bodové náboje. Molekuly jsou složitější tím, že je v nich přítomno víc jader a může pak záležet i na orientaci. Také bylo v zadání uvedeno pouze jádro, abychom nemuseli uvažovat elektronový obal.

Dusík má atomové číslo 7, tedy náboj každého jádra je $Q = 7e$, kde vystupuje elementární náboj $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Pokud chceme jádra dostat k sobě co nejblíže, pak je pošleme proti sobě čelně. Rychlost, kterou jsme již určili, mají ale někde ve velké (nekonečné) vzdálenosti od sebe a jak se začnou přibližovat, tak se rychlost začne snižovat. Působí totiž na sebe odpudivou elektrostatickou silou. Gravitační přitažlivá síla je v tomto případě vůči elektrostatické zanedbatelná. Otázkou tedy je, kdy se přemění všechna kinetická energie na potenciální elektrostatickou, kterou můžeme v závislosti na vzdálenosti r vyjádřit jako

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r} = \frac{49e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,,$$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$ je permitivita vakua. Když uvážíme, že pokud jádra v nekonečnu měla obě stejnou rychlost, pak můžeme psát

$$2E_k = 2\frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{49e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,,$$

$$r = \frac{49e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3kT} \doteq 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

Je dobré si všimnout, že hmotnost částice ani nepotřebujeme znát, pouze teplotu – hmotnost jsme použili pouze pro mezivýpočet rychlosti částic. Vidíme, že zjednodušeními, které jsme provedli, jsme získali situaci, která ani zdaleka blízká běžné situaci v plynu, který dýcháme. Zde jsou molekuly daleko blíže k sobě než $1\,\mu$m. Je to dáno zejména tím, že jsme uvažovali zcela ionizovaný plyn, který kolem nás také není, ale jsou zde neutrální molekuly. Ve vzdálenostech výrazně větších než je poloměr atomu, řádově $10 \cdot 10^{-10}$ m, se chová atom zvnějšku obvykle neutrálně a odpudivá elektromagnetická síla se projeví až ve větší blízkosti. V běžném neionizovaném plynu se tedy atomy dostávají daleko blíže k sobě, což je nutné i kvůli tomu, kolik jader se obvykle vejde do jednotkového objemu vzduchu. Kvůli silnému odpuzování jader elektromagnetickou silou je také tak těžké přimět jádra k jaderné fúzi.

Teplota děje v plynu

Máme zadaný děj v plynu

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\alpha V} \,.$$

Plyn považujeme za ideální a můžeme tedy psát

$$pV = nRT \,,$$

kde n je látkové množství plynu, $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ je molární plynová konstanta a T je jeho teplota. Vyjádříme si teplotu jako funkci ostatních veličin

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{p_0 V}{nR} \mathrm{e}^{-\alpha V} \,.$$

Teplota je nyní vyjádřena pomocí objemu, který je proměnný, a dalších konstant, které jsou pro uzavřený systém konstantní. Podobně jako u výkonu rezistoru, vidíme, že pro nulový objem a nekonečně velký objem by byla teplota nulová. Zderivujeme teplotu podle objemu a budeme hledat extrém

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = \frac{p_0}{nR} \mathrm{e}^{-\alpha V} \left(1 - \alpha V\right) \,.$$

Nyní položíme derivaci rovnou nule. Pouze poslední člen součinu nám dá nějaký výsledek (exponenciála nikdy není nulová), a to

$$1 - \alpha V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{1}{\alpha} \,.$$

Maximální teploty $T_{\max} = \frac{p_0}{\alpha n R \mathrm{e}}$ dosáhne plyn pro objem $V = \frac{1}{\alpha}$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz