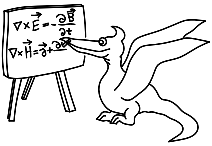


Seriál: Víc oscilátorů víc ví

Na konci minulého dílu bylo naznačeno, že se budeme zabývat více navzájem propojenmi oscilátory či oscilacemi ve více dimenzích. Než se ovšem do takového úkolu pustíme, bude třeba poněkud zformalizovat některé matematické kroky, které jsme při odvození chování jednoduchých oscilací činili. Konkrétně se bude jednat o dvě důležité kapitoly z matematiky - derivace a diferenciální rovnice budou naším prvním cílem. Poté se také podíváme na některé aspekty komplexních čísel. Doufáme, že některá témata budou pro vás pouze opakováním, zatímco některá jiná přinesou nový pohled na věc. Doporučujeme také prozkoumat různé jiné zdroje mimo tento seriál, pokud si vysvětlením některého z konceptů nejste jistí. Jelikož se jedná o velmi rozšířené koncepty, zdrojů pro studium existuje nespočetně.

Pod mikroskopem jsou všechny křivky přímky

V minulých dílech jsme se zabývali přiblížením určité funkce v okolí nějakého bodu. Je to právě ukotvení této aproximace v rigoróznějším matematickém formalismu které vede k pojmu derivace. Tento proces ukotvení začněme na jednoduchém konkrétním případu - případ polynomiálních funkcí.

Již víme, že pro malé h platí

$$(1+h)^a \approx 1 + ah$$

V předchozích problémech jsme si také ukazovali, že pro $A \gg B$

$$(A+B)^a = A^a \left(1 + \frac{B}{A}\right)^a \approx A^a \left(1 + \frac{aB}{A}\right)$$

Vždy jsme tedy aproximovali funkci x^a v okolí nějakého bodu - v prvním případě v okolí bodu 1, v druhém případě v okolí bodu A - tím, že jsme provedli rozvoj pro určité malé reálné číslo. Samotná hodnota funkce v okolí tohoto bodu záleží na několika parametrech - jednak na hodnotě funcke v samotném bodě jehož okolí nás zajímá, a dále pak na velikosti zvoleného malého čísla a nakonec na nějaké kombinaci parametrů odvozené ze základní funkce v daném bodě. Tato *odvozenina* tvořená z parametrů dané funkce a hodnoty funkce v daném bodě se právě nazývá derivace. Formálně lze psát, že naše aproximace funguje jako

$$\Delta x \ll x : f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \Delta x \,,$$

kde hovoříme o *derivaci funkce f dle proměnné x v bodě x_0*. Jako ilustrace, v předchozích případech jsme měli

$$(1+h)^a \approx 1 + ah$$

a pokud tedy definujeme $g(x) = x^a$, pak můžeme psát

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_1 = a$$

Obdobně, jelikož v druhém příkladě platí

$$(A+B)^a \approx A^a + aA^{a-1}B$$

lze psát

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_A = aA^{a-1}$$

a můžeme zkontrolovat, že tento výraz skutečně funguje pro $A = 1$. Obecně pak můžeme z naší lineární aproximace definovat derivaci funkce v daném bodě jako

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

Ohledně limity $\lim_{\Delta x \to 0}$ nám stačí vědět, že indikuje, že $\Delta x \ll 1$ je velmi malé číslo. Přesnou definicí se zde nebudeme zabývat. Derivace funkce je tedy také funkcí, která se může bod od bodu měnit. Často pak vynecháváme konkrétní označení bodu, ve kterém je derivace vyhodnocena, a používáme stejné označení, jako v originální funkci, viz níže. Nyní je ve zkratce uveden seznam derivací některých běžných funkcí.

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x} = ax^{a-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x + \cos(x)\Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x} \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

Kombinujeme funkce

Jelikož derivace počítáme ve fyzice velmi často, vyplatí se zamyslet nad jejich algebrou. Je opravdu nezbytné vždy explicitně spočítat limitu funkcí? Nelze zjistit hodnoty derivací z nějakého množství základních bloků? Ukazuje se, že ano, za pomocí několika pravidel.

Prvním pravidlem pro derivace, které si ukážeme, je linearita. To znamená, že pokud máme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, a definujeme pomocí nich funkci $h(x) = af(x) + bg(x)$, kde a a b jsou nějaká čísla, platí

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Tím pádem derivace součtu funkcí je prostě pouze součet derivací funkcí. O něco složitější chování (a jak se později ukazuje naprosto zásadní vlastnost derivací) je tzv. Leibnizovo pravidlo, které řeší, jak naložit se součinem funkcí. Platí

$$\frac{\mathrm{d}fg}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)\left(g(x)+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)-f(x)g(x)}{\Delta x}=f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g(x)\,,$$

kde jsme zanedbali druhý řád v Δx v čitateli.

Posledním pravidlem, které budeme odvozovat, je derivace složené funkce. Definujme funkci $f(x)=g(h(x))$, kde $g(x)$ i $h(x)$ jsou další funkce. Pak platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(h(x+\Delta x))-g(h(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\left(h(x)+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)-g(h(x))}{\Delta x}$$

Pokud lze předpokládat, že $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\Delta x=\Delta h$ je stále malé číslo, pak platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(h(x))+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\Delta x-g(h(x))}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

Tomuto pravidlu se říká řetězové pravidlo, a bude také hrát důležitou roli při odvozování derivací některých složitých funkcí.

Fyzikální význam derivací

Ačkoliv matematický aparát derivací je velmi zajímavý, fyzikální význam derivací je snad ještě zajímavější. Už tušíme, že schopnost popsat chování nějaké funkce v okolí určitého bodu pomocí lineární aproximace je klíčová ke zjednodušení chování mnoha systémů. Nyní nám derivace umožňuje popsat, jak rychle se daná funkce mění v okolí daného bodu - derivace určuje *míru změny veličiny*. Efektivně to znamená, že pro dostatečně malé okolí bodu nějaké funkce lze tuto funkci aproximovat jako přímku, a směrnice této přímky je dána právě derivací v tomto bodě.

Popis míry změny veličiny je jedním z ústředních bodů jakéhokoliv fyzikálního zkoumání. Například, v kinematice často sledujeme pozici určitého hmotného bodu v závislosti na čase. Pokud se zaměříme na velmi krátký časový interval, lze trajektorii bodu popsat přímkou, tj. předpokládáme, že bod se pohybuje v tomto časovém úseku víceméně rovnoměrně, nebo je v klidu. Míra změny polohy je v tuto chvíli zřejmě rychlost. Lze tedy usoudit, že rychlost je derivací polohy vzhledem k času. Symbolicky zapsáno pro polohu $x(t)$ jako funkci času t

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde $v(t)$ je rychlost bodu.

Právě vývoj derivací pro popis dynamiky částic je středobodem Newtonovské mechaniky. Zkusme tedy reformulovat Newtonovi zákony v jazyce derivací. První zákon mluví o tom, že tělesa, na které nepůsobí žádná síla, setrvávají v klidu či v rovnoměrném přímočarém pohybu. To tedy znamená, že rychlost tělesa se nemění - míra změny rychlosti tělesa je nulová

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\,.$$

Druhý zákon dává do souvislosti zrychlení a síly působící na těleso. Důležitým zobecněním je, že pokud ponecháme volnost pro změnu hmotnosti s časem, píšeme

$$F=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,.$$

Třetí zákon nehovoří o změnách, a zůstává tedy v originálním znění.

Pokud se hmotnost tělesa s časem nemění, pak můžeme psát (což můžete jednoduše odvodit pomocí výše uvedených pravidel)

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

kde $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ značí *druhou derivaci* polohy podle času, kterou identifikujeme jako zrychlení. Jelikož ve většině případů jsou vnější síly závislé pouze na poloze, rychlosti či času, jsme schopni druhý Newtonův zákon vyjádřit čistě pomocí času, polohy a derivací poloh.

Kmity ve formalismu derivací

Pokud máme závaží na pružině, platí pro něj rovnice síly

$$F = -kx\,,$$

a aplikací druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,.$$

Rovnici, která obsahuje funkce a jejich derivace, se říká diferenciální rovnice. Abychom tuto rovnici vyřešili, potřebujeme najít polohu jako funkci času $x(t)$ takovou, že druhá derivace této funkce je až na násobící konstantu stejná jako originální funkce. Pokud se podíváme na definice derivací základních funkcí, můžeme si všimnout, že

$$\frac{\mathrm{d}^2\cos(z)}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\cos(z)}{\mathrm{d}z}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}(-\sin(z))}{\mathrm{d}z} = -\cos(z)\,.$$

Vidíme, že tato funkce se nám může hodit, ovšem pracujeme zde s bezrozměrným parametrem z - potřebujeme funkci času t. Jelikož víme, že se jedná o kmity, má smysl vyzkoušet jako bezrozměrný parametr $z = \omega_0 t$, a pokusit se o derivace vzhledem k času místo parametru z. Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{d}\omega_0 t}\frac{\mathrm{d}\omega_0 t}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = -\omega_0\frac{\mathrm{d}sin(\omega_0 t)}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\,.$$

Tato funkce má stále správné chování, akorát nemá rozměr polohy, ale je bezrozměrná. Abychom získali polohu, musíme funkci ještě přenásobit konstantní amplitudou kmitů A, tedy $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Odtud poté plyne

$$m\frac{\mathrm{d}^2A\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{d}t^2} = -kA\cos(\omega_0 t)\,,$$

$$-m\omega_0^2A\cos(\omega_0 t) = -kA\cos(\omega_0 t)\,,$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,,$$

a obdržíme tedy klasický výsledek pro přirozenou frekvenci kmitů.

Vidíme tedy sílu formalismu derivací - za cenu rozvoje matematického aparátu jsme se mohli zcela vyhnout diskuzi o fázovém prostoru, analytické geometrii kružnice a podobným problémům. Cesta derivací je tedy výrazně algebraičtější cestou k zodpovězení fyzikálních problémů. Samozřejmě, ne každému může tento způsob v tomto případě vyhovovat. Trochu se totiž zdá, že jsme museli náhodně uhodnout funkci času s vhodnými vlastnostmi. Nicméně, pro složitější problémy jsou derivace nepostradatelným nástrojem, například protože už odpovídající trajektorie ve fázovém prostoru nemají analyticky popsatelný tvar.

Důležité vztahy derivací ve fyzice kmitů

Často budeme určovat chování pro kmitavé funkce typu $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Je důležité znát derivace těchto funkcí, a proto je zmiňuji ještě zvlášť jako uzavřený problém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0 x\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x\,.$$

S pomocí linearity derivace se můžeme přesvědčit, že tyto definice stačí i pro odvození derivací vyššího řádu.

Princip Superpozice

Princip superpozice výrazným způsobem zjednodušuje počet řešení, které musíme dokázat pro danou *lineární* diferenciální rovnici. Jak vypadá lineární diferenciální rovnice? Opět platí standardní definice linearity, tj. pokud máme funkci $f(x)$, která je řešením naší rovnice, tak i $af(x)$, kde a je nějaká konstanta, je řešením této rovnice. Dále, pokud máme funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou obě samostatně řešením diferenciální rovnice, tak i $f(x) + g(x)$ je řešením dané rovnice. Například, podívejme se na druhý Newtonův zákon pro závaží na pružině, jak zmíněno výše. Pro polohu $x(t)$ ako funkci času platí

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,.$$

Pokud zavedeme $g(t) = ax(t)$, tak platí

$$m\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{g}{a}\right)}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{g}{a}\,.$$

Jelikož je derivace lineární, platí

$$\frac{m}{a}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{g}{a}\,,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = -kg\,,$$

a tedy i $g(t)$ je validním řešením této diferenciální rovnice. Podobně můžeme ukázat, že pokud máme ještě nějaké $h(t) = g(t) + x(t)$, pak sečtením rovnic platí

$$m\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kg - kx = -k(g + x)\,,$$

a jelikož derivace je lineární

$$m\frac{\mathrm{d}^2(g + x)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -kh\,,$$

a tedy i $h(t)$ je řešením naší diferenciální rovnice. Dalo by se říci, že h je lineární kombinací $g(t)$ a $x(t)$, neboli také superpozicí $g(t)$ a $x(t)$.

Fáze a komplexní čísla

Komplexní čísla rozšiřují obor reálných čísel zavedením imaginární jednotky i. Imaginární jednotka má unikátní vlastnost, kterou nemá žádné reálné číslo, totiž

$$\mathrm{i}^2 = -1\,.$$

Jinak se imaginární jednotka chová jako reálné číslo, tj. lze ji sčítat, odčítat, násobit, mocnit atd. Těmito operacemi vznikají čísla, která jsou z části reálná a z části imaginární - těmto číslům říkáme komplexní. Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v tzv. algebraickém tvaru

$$z = x + \mathrm{i}y\,,$$

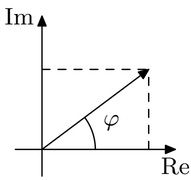
kde x a y jsou reálná čísla. Pak hovoříme o reálné části $\mathrm{Re}\, z = x$ a imaginární části $\mathrm{Im}\, z = y$.

Jelikož i neexistuje v reálných číslech, a můžeme vytvořit celou přímku čistě imaginárních čísel (tj. čísel, která mají nenulovou pouze imaginární část), lze přidání i vnímat jako přidání nové dimenze. Komplexní čísla, která jsou pak kombinací čistě reálných a čistě imaginárních čísel, lze pak vnímat jako vektory v rovině, viz obrázek 1. Můžeme jim tedy přisoudit absolutní hodnotu jako velikost tohoto vektoru

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a úhel, který svírají s reálnou osou

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}\,.$$



Obr. 1: Komplexní číslo jako vektor v komplexní rovině. Horizontální osa je reálná osa a vertikální osa je imaginární osa.

Algebra komplexních čísel je velmi bohatá a v tomto seriálu není dost prostoru na to ji obsáhnout celou. Náš hlavní užitek ze zavedení komplexních čísel je důsledkem jednoho kritického vztahu, kterým je následující rovnice.

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\,,$$

kde x je reálné číslo. Tento vztah nám udává, jak zapsat exponenciálu imaginárního čísla v algebraickém tvaru. Přímo víme, jak zapsat exponenciálu komplexního čísla, jelikož

$$e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x\left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right)\,.$$

K čemu je nám tento vztah užitečný? Tento vztah slouží k převodu algebry goniometrických funkcí na algebru exponenciál. Například, tušíme, že výraz

$$\cos(x)\cos(y)$$

lze převést na výraz obsahující pouze první mocniny sinů a cosinů. Zkusme zkoumat součin exponenciál

$$e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}y} = \left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)\left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right) .$$

Roznásobením dostáváme

$$\cos(x)\cos(y) + \mathrm{i}\sin(x)\cos(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\sin(y) .$$

Reálná část z tohoto součinu je

$$\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}y}\right) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) .$$

Pokud změníme znaménko u y, dostaneme

$$\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}(-y)}\right) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) ,$$

a tedy

$$\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}y} + e^{\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}y}\right) = 2\cos(x)\cos(y) ,$$

a dostáváme se tudíž k našemu původnímu výrazu. Nyní už stačí využít sčítání exponentů, a dostáváme

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}(x+y)} + e^{\mathrm{i}(x-y)}\right) .$$

Použitím našeho vzorce pro exponenciálu imaginárního čísla dostáváme

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) + \cos(x-y) + \mathrm{i}\sin(x-y)\right) ,$$

a tím pádem

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) .$$

Obešli jsme tak použití sčítacích vzorců pro goniometrické funkce. V tomto to možná vypadá jako zbytečná komplikace, ale ve složitějších případech je jednoduchost algebry exponenciál oproti algebře goniometrických funkcí nedocenitelná.

Ve fyzikálních systémech se komplexní čísla zavádějí často ve chvíli, kdy je potřeba pracovat s fází kmitání. Fázi kmitu lze totiž reprezentovat úhlem komplexního čísla v komplexní rovině. Kmity samotné lze reprezentovat jako vektor rotující v komplexní rovině. Zde by měla být jasná analogie s fázovým prostorem - ve fázovém prostoru obíhal bod reprezentující stav systému po kružnici. V komplexní rovině bude bod reprezentující stav systému také obíhat po kružnici. Bod tedy má algebraický tvar

$$z = A\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right) ,$$

kde A je amplituda kmitů. Ve fázovém prostoru byla poloha reprezentována jedním z rozměrů prostoru, v komplexní rovině bude poloha reprezentována reálnou částí

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z = A\cos(\omega t) .$$

Nakonec, komplexní bod lze také psát jako

$$z = Ae^{\mathrm{i}\omega t}$$

a tím pádem můžeme psát

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(Ae^{\mathrm{i}\omega t}\right)\,.$$

Mimo zjednodušení algebry goniometrických funkcí lze v tomto formalizmu také velmi jednoduše řešit fázové posuny. Pokud je fázový posun bodu roven φ, pak bod v komplexní rovině bude dán jako

$$z = Ae^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} = Ae^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\omega t} = A'e^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

tedy můžeme fázy zcela přesunout do násobící konstanty, ze které uděláme komplexní číslo.

Derivace komplexních funkcí a Fourierova substituce

V tomto seriálu se budeme zabývat pouze derivacemi funkcí, které mají reálný argument (tj. definiční obor leží zcela na reálné ose), ale komplexní hodnoty. Typickým příkladem je exponenciála reprezentující kmity

$$f(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Pravidla pro derivace, která jsme odvodily pro čistě reálná čísla, fungují v tomto případě i pro funkce s komplexními hodnotami. Toto je vlastně důsledkem linearity derivace, kdy lze psát

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{Re}\,f + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{Re}\,f}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathrm{Im}\,f}{\mathrm{d}t}\,.$$

V tomto výrazu už figurují pouze derivace reálných funkcí.

Víme tedy, že

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e^{\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\mathrm{i}\omega t}{\mathrm{d}t} = e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{i}\omega = \mathrm{i}\omega f(t)\,.$$

Dále, obdobným způsobem lze ukázat

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{i}^2\omega^2 e^{\mathrm{i}\omega t} = -\omega^2 f(t)\,,$$

což je vlastně přímo rovnice harmonických kmitů. V případě, že $f(t)$ popisuje kmitání tedy dostáváme jednoduchý předpis, jak nahrazovat derivace v našich rovnicích

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \mathrm{i}\omega\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \rightarrow -\omega^2\,,$$

a obdobně pro vyšší mocniny. Pro tuto substituci jsem nenašel odborný název, ve zkratce ji zde budu označovat jako Fourierovskou substituci.

Jednoduchá molekula

Uvažujme nyní jednoduchý fyzikální systém, na kterém si ukážeme některé postupy, které jsme odvodili. Mějme dvě částice o identické hmotnosti m, které jsou spojené pružinou o tuhosti k. Částice se mohou pohybovat pouze v jednom směru, a jejich pozice budeme udávat v souřadnicích x_1 a x_2.

Síly působící na částice jsou shodně velké a opačné. Položme druhou částici před první částici ve směru rostoucí souřadnice x_1. Pak platí, že síla na první částici je

$$F_1 = k(x_2 - x_1)$$

a na druhou částici

$$F_2 = -k(x_2 - x_1)\,.$$

Druhý Newtonův zákon lze použít na každou částici zvlášť

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = F_1 = k(x_2 - x_1)\,,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = F_2 = k(x_1 - x_2)\,.$$

Lze předpokládat, že tento systém bude nějakým způsobem oscilovat, tj. že řešení pohybových rovnic bude ve formě

$$x_1 = Ae^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

$$x_2 = Be^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

kde A a B jsou (potenciálně komplexní) konstanty, a ω je neznámá frekvence oscilací. Již nepíšeme explicitně reálnou část komplexního výrazu, jelikož by se vyskytovala všude. Můžeme tedy využít Fourierovskou substituci na místo derivací, což vede k

$$-m\omega^2 x_1 = kx_2 - kx_1\,,$$

$$-m\omega^2 x_2 = kx_1 - kx_2\,.$$

Vidělíme první rovnici m a zavedeme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Dostáváme tedy

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_1 = \omega_0^2 x_2\,.$$

Pokud $\omega_0 \neq \omega$

$$x_2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) x_1\,.$$

Dosazením za formu x_1 a x_2 vede k

$$Be^{\mathrm{i}\omega t} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) Ae^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

$$B = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) A\,.$$

Stále neznáme frekvenci ω. Dosazením do druhé rovnice, kterou opět vydělíme $me^{\mathrm{i}\omega t}$, dostáváme

$$(\omega_0^2 - \omega^2)B = \omega_0^2 A\,,$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega^2 + \frac{\omega^4}{\omega_0^2}\right) A = \omega_0^2 A\,.$$

Můžeme tedy vydělit pomocí A, za předpokladu, že $A \neq 0$,

$$\omega^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right) = 0\,.$$

Máme tedy **dvě** řešení - $\omega = 0$ nebo

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\,.$$

Existence dvou řešení je typická, neboť máme dvě oscilující částice, celkově tedy dva stupně volnosti v našem systému. Lehce atypická je přítomnost řešení s $\omega = 0$ - neoscilující řešení. V tomto případě je $B = A$, a tedy

$$x_1 = x_2 = A = B\,.$$

Tedy, platí $x_2 - x_1 = 0$, a tím pádem se rovnice pohybu stávají rovnicemi volného pohybu. Tento případ tedy odpovídá rovnoměrnému přímočarému obou částic tak, že pružina mezi nimi není vůbec protažená.

Pro druhý případ platí

$$B = \left(1 - \frac{2\omega_0^2}{\omega_0^2}\right) A = -A\,.$$

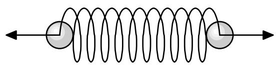
V každém čase tedy platí

$$x_1(t) = -x_2(t)\,,$$

a částice tedy oscilují v přesné atnifázy. Tento výsledek bychom také mohli interpretovat pomocí fázového posunu jako

$$B = -A = e^{\mathrm{i}\pi} A\,,$$

což znamená, že mezi oscilacemi částic je fázový posun π - přesná antifáze, jak jsme již říkali.



Obr. 2: Naznačený pohyb částic při oscilujícím řešení.

Můžeme také zkontrolovat princip superpozice. Určili jsme, že rovnoměrný přímočarý pohyb v případě, kdy částice jsou na stejné pozici, je řešením systému. Máme tedy řešení

$$x_1 = vt + x_0\,,$$

$$x_2 = vt + x_0\,,$$

kde v je rychlost rovnoměrného pohybu a x_0 je počáteční souřadnice. Zároveň máme oscilující řešení

$$x_1' = A e^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

$$x_2' = -A e^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

kde A je amplituda oscilací. Můžeme tedy zkontrolovat, že pokud sečteme $x_1 + x_1'$ a $x_2 + x_2'$, dostaneme také řešení našeho systému

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(vt + x_0 + Ae\mathrm{i}\omega t\right) = k(vt + x_0 - Ae^{\mathrm{i}\omega t} - Ae^{\mathrm{i}\omega t} - vt - x_0)\,,$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_1 + A\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega t}\right) = -2kAe^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

$$mA\mathrm{i}^2\omega^2 e^{\mathrm{i}\omega t} = -2kAe^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}\,.$$

Tato rovnost pro oscilace platí, a tedy i tato superpozice translace a oscilací je správným řešením pohybových rovnic.

Výhled na příště - vše je lineární

V tomto díle jsme si ukázali, jak linearita harmonických oscilací umožňuje relativně jednoduché řešení i zdánlivě složitých systémů. Stačí nám vždy nalézt pouze několik speciálních řešení našich pohybových rovnic, a ostatní možné pohyby můžeme vyjádřit jako superpozice těchto speciálních řešení. Odborně se těmto speciálním řešením říká normální mody, a budeme se jimi zabývat i v příštím díle seriálu, kde si představíme další velmi užitečný matematický formalismus - lineární algebru.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.