

## Nový rok a nová série!

Milé řešitelky, milí řešitelé,  
nový rok je tu a s ním i 4. série FYKOSu!

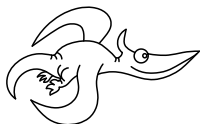
Ve čtvrté sérii si vyzkoušíme netradiční kroucení pružinek, prozkoumáme termodynamické objevy a taktiky mravenců, zjistíme, jak by vypadalo letectví na jiných planetách, a změříme si, jak náročné je pro sestřičky operovat s injekčními stříkačkami (samozřejmě zcela bezpečně).

Nezapomeňte, že řešení 4. série je skvělá příležitost, jak si získat místo na podzimním soustředění FYKOSu (o němž pevně doufáme, že se nám jej i přes nepříznivou situaci podaří uskutečnit).

A v neposlední řadě se určitě přihlaste na Fyziklání, které letos výjimečně proběhne online, a to 12. 2. 2020. Bohužel se tentokrát nemůžeme na soutěži setkat osobně, o to více jsme se ji vám však snažili zpestřit – a nepřijdete ani o tradiční víkendový program! Více se o něm dozvíte na stránkách soutěže [fyziklani.cz](http://fyziklani.cz).

Mnoho úspěchů a pevně zdraví do nového roku přejí

*Organizátoři*



### Zadání IV. série

*Termín uploadu: 23. 2. 2021 23.59*

*Termín odeslání: 22. 2. 2021*

#### Úloha IV.1 ... dvě kapky

3 body

Od vodovodního kohoutku se těsně za sebou odtrhnou dvě kapky a začnou padat dolů. Jak se bude jejich vzájemná vzdálenost měnit v čase? Odpor vzduchu zanedbejte.

*Bonus* Odpor vzduchu započítejte, odhadněte potřebné parametry a určete vzdálenost kapek po dlouhé době.

#### Úloha IV.2 ... pružinek není nikdy dost

3 body

Jakou práci vykonáme při zkroucení pružiny z rovnovážné polohy o úhel  $\alpha = 60^\circ$ , pokud pružinu ve zkrouceném stavu udržujeme momentem síly  $M = 1,0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ?

#### Úloha IV.3 ... křivá optika

5 bodů

Mějme bodový zdroj světla a rovinnou skleněnou desku s indexem lomu  $n = 1,50$ . V místě paty kolmice od zdroje na desku se uvnitř desky nacházejí vlnoplochy s poloměrem křivosti  $R = 5,00 \text{ m}$ . Jaká je skutečná vzdálenost zdroje a desky?

#### Úloha IV.4 ... mravenci

8 bodů

Mravenci přišli na zajímavý způsob vyhřívání mravenišť – vylezou ven, nechají se ohřát slunečním zářením a opět vlezou dovnitř, kde zase předají teplo mraveništi. To aproximujeme kuzelem o výšce  $H = 0,8 \text{ m}$  s poloměrem podstavu  $R_0 = 1,5 \text{ m}$ . Celulózové stěny s tepelnou vodivostí  $\lambda = 0,039 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  jsou široké 2 cm.

Předpokládejme, že veškerá tepelná výměna mezi mraveništěm a okolím (které má teplotu  $T_o = 10^\circ\text{C}$ ) je zprostředkována pouze mravenci a vedením přes stěny, tepelnou výměnu se zemí můžeme zanedbat. Mravenec váží  $m = 5\text{ mg}$  a má měrnou tepelnou kapacitu odhadem  $4000\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Kolik mravenců vyhrátých na  $T_m = 37^\circ\text{C}$  musí každou sekundu přilézt do mraveniště, aby v celém vnitřním objemu udrželi konstantní teplotu  $T_M = 20^\circ\text{C}$ ?

### Úloha IV.5 ... Efhári-Goiteía

8 bodů

Efhári a Goiteía jsou dvě složky dvojplanety okolo nedávno vzniklé hvězdné soustavy. Obíhají okolo společného těžiště po kruhových trajektoriích ve vzdálenosti  $a = 250 \cdot 10^3\text{ km}$ . Efhári má poloměr  $R_1 = 4300\text{ km}$ , hustotu  $\rho_1 = 4100\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a dobu siderické rotace  $T_1 = 14\text{ h}$ . Goiteía je menší s poloměrem  $R_2 = 3800\text{ km}$ , má však větší hustotu  $\rho_2 = 4500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a kratší dobu rotace  $T_2 = 11\text{ h}$ . Osy rotace planet i soustavy jsou rovnoběžné. Za několik set milionů let přejde soustava díky slapovým silám do tzv. vázané rotace. Určete výslednou změnu oběžné doby za předpokladu, že tělesa jsou homogenní a přibližně sférická.

### Úloha IV.P ... pták Fykosák na dovolené

10 bodů

Jak by fungovalo letectví na jiných planetách (s atmosférou)? Zajímejte se hlavně o proudová letadla. Které parametry by působily pozitivněji a které negativněji než na Zemi?

### Úloha IV.E ... dechberoucí stříkačky

13 bodů

Určete velikost třecí síly mezi pístem a stěnou injekční stříkačky, která vám přišla poštou.

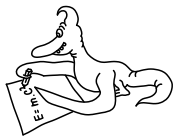
### Úloha IV.S ... oscilace oxidu uhličitého

10 bodů

Budeme modelovat kmity v molekule oxidu uhličitého. Jedná se o lineární molekulu s jedním atomem uhlíku mezi dvěma atomy kyslíku, ležícími společně na jedné přímce. Uvažujme pouze kmity podél této přímky. Předpokládejme, že pro malé výchylky lze molekulu modelovat jako spojení uhlíkového atomu s každým z kyslíkových pomocí pružin o tuhosti  $k$ . Atom uhlíku má hmotnost  $M$ , hmotnost kyslíkového atomu je  $m$ .

Sestavte rovnice určující síly, které působí na atomy při malých výchylkách podél osy uvažované molekuly. Ta je symetrická vůči záměně některých atomů. Vyjádřete tuto symetrii pomocí matice působící na vámi definovaný vektor výchylek. Dále určete vlastní vektory a vlastní čísla této matice. Takováto symetrie však není kompletní – vysvětlete, které stupně volnosti nezahrnuje.

Dále sestrojte maticovou rovnici popisující kmity systému. Dosazením vlastních vektorů z matice symetrie, které rozšíříte o symetrii neomezené stupně volnosti, určete normální módy systému. Dále spočítejte jejich úhlovou rychlost/frekvenci a načrtněte směry oscilací. Jaké další módy (stále pouze ve směru osy molekuly) by systém mohl obsahovat? Určete frekvenci a směr pro každý mod, jež se vám podaří nalézt.

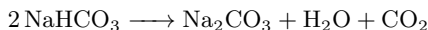


## Řešení III. série

## Úloha III.1 ... pečící

3 body; průměr 2,78; řešilo 80 studentů

Při pečení perníku se do těsta přidává jedlá soda – hydrogenuhličitan sodný ( $\text{NaHCO}_3$ ). Uvažujte, že se při vyšší teplotě rozloží podle rovnice



na uhličitan sodný, oxid uhličitý a vodu. O kolik se díky bublinkám oxidu uhličitého a vodní páry zvětší objem buchty, když do ní přidáme 10 g hydrogenuhličitanu sodného? Počítejte, že oxid uhličitý a vodní pára se chovají jako ideální plyny a těsto v okolí bublinek tuhne při teplotě  $200^\circ\text{C}$  a tlaku  $1\,013\text{ hPa}$ . *Káťa chtěla upéct buchtu.*

Z rovnice je patrné, že počet molů hydrogenuhličitanu sodného je roven počtu molů plynu (vodní páry a oxidu uhličitého). Pro určení počtu molů plynu tedy stačí pouze určit počet molů  $\text{NaHCO}_3$ , a to jako podíl hmotnosti této látky a její molární hmotnosti

$$n_{\text{h}} = \frac{m_{\text{h}}}{M_{\text{h}}}.$$

Molární hmotnost hydrogenuhličitanu sodného získáme součtem molárních hmotností jednotlivých atomů, z nichž se daná molekula skládá. Tyto údaje nalezneme například v periodické tabulce prvků a dostáváme

$$M_{\text{h}} = M_{\text{Na}} + M_{\text{H}} + M_{\text{C}} + 3M_{\text{O}} = 84,02\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Objem plynu určíme pomocí stavové rovnice ideálního plynu

$$pV = nRT,$$

kde  $R = 8,31\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  je molární plynová konstanta.

Pro hledaný objem tedy dostáváme rovnici

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{RTm_{\text{h}}}{pM_{\text{h}}}.$$

Po číselném dosazení vychází objem plynu, o který se perník při pečení zvětší, jako 4,62 litrů. Tuto příliš velkou hodnotu jsme dostali kvůli použití neúplné chemické reakce, unikání plynu z perníku při praskání bublinek, a do značné míry také kvůli idealizovanému modelu tuhnutí těsta kolem bublinek plynu.

*Kateřina Charvátová*

katerina.charvatova@fykos.cz

## Úloha III.2 ... bungee

3 body; průměr 1,76; řešilo 85 studentů

Jirka s Kátou si chtějí vyzkoušet bungee-jumping. Na skok z výšky  $h = 100$  m mají dokonale pružné lano o délce  $l = 40$  m, které je kalibrované tak, že když s ním skočí Káťa o hmotnosti  $m_K = 50$  kg, zastaví se ve výšce  $h_K = 16$  m nad zemí. Může toto lano bezpečně použít Jirka s hmotností  $m_J = 80$  kg? Odpor vzduchu a výšku Káti a Jirky zanedbejte.

*Jirkův pokoj na kolejkách se nachází inspirativně vysoko.*

V úloze nás zajímá pouze počáteční a finální stav, bude tedy výhodné použít výpočet pomocí energií. Konkrétně nás bude zajímat potenciální tíhová energie  $E_g$  a potenciální energie pružnosti  $E_p$  nataženého lana – jelikož v nejvyšším i v nejnižším bodě dráhy bude rychlost pádu nulová, bude v těchto bodech nulová i kinetická energie  $E_k$ . Přitom se nám vyplatí položit nulovou hladinu  $E_p$  do výšky  $h = 100$  m, nikoli do výšky nulové, jak by se mohlo zdát. Uvažme nyní člověka o hmotnosti  $m$ , jenž se po seskoku s lanem ze zadání (o neznámé tuhosti  $k$ ) zastaví ve výšce  $h_0$  nad zemí. Jeho celková energie se nebude měnit, a protože ve výšce  $h$  nad terénem jsou hodnoty všech typů energie rovny nule, musí obecně platit

$$E_p + E_g + E_k = 0. \quad (1)$$

Ve výšce  $h_0$  nad zemí je pak jeho tíhová potenciální energie rovna

$$E_g = m(h_0 - h)g, \quad (2)$$

a jak je vidět, pro  $h_0 < h$  bude tato energie záporná. Energie pružnosti lana v této výšce je pak

$$E_p = \frac{1}{2}k(h - h_0 - l)^2. \quad (3)$$

Rovnice (3) vychází z obecného vztahu pro potenciální energii pružiny  $E_p = ky^2/2$ , přičemž si musíme uvědomit, že než se lano začne napínat, uletí padající člověk  $l$  metrů, a výchylka  $y$  je proto o  $l$  menší než rozdíl  $h_0$  a  $h$ .

Zajímá nás výška nad terénem, ve které se zastaví Jirka – označíme ji  $h_J$ . Dosazením rovnic (2) a (3) do rovnice (1) a uvážením skutečnosti, že Jirkova kinetická energie je ve výšce  $h_J$  nulová, dostaneme rovnici

$$m_J(h_J - h)g + \frac{1}{2}k(h - h_J - l)^2 = 0. \quad (4)$$

Roznásobením závorek převedeme rovnici do tvaru normované kvadratické rovnice s neznámou  $h_J$ , tedy

$$\frac{1}{2}kh_J^2 + h_J(m_Jg - k(h - l)) - m_Jhg + \frac{1}{2}k(h - l)^2 = 0. \quad (5)$$

U této rovnice nám bohužel žádný trik nepomůže, výsledek proto budeme muset zjistit pomocí diskriminantu. Jeho hodnota je

$$D = (m_Jg - k(h - l))^2 + 2km_Jhg - k^2(h - l)^2 = m_Jg(m_Jg + 2kl) \quad (6)$$

a s použitím tohoto výsledku již hodnotu  $h_J$  získáme jednoduše jako

$$h_{J1,2} = \frac{k(h - l) - m_Jg \pm \sqrt{m_Jg(m_Jg + 2kl)}}{k}. \quad (7)$$

Stále však neznáme tuhost lana  $k$ . Tu můžeme zjistit díky tomu, že známe všechny ostatní údaje (včetně  $h_K$ ) pro Kátin skok. Sestavíme rovnici vycházející ze vztahu (4), do nějž pouze dosadíme informace týkající se Káti, a vyjádříme  $k$ . Dostaneme

$$k = \frac{2m_K g (h - h_K)}{(h - h_K - l)^2}. \quad (8)$$

Po dosazení do (7) nám vyjdou dva různé výsledky, a to  $h_{J1} = 84,16$  m a  $h_{J2} = -1,04$  m. První výsledek vychází z toho, že v našem matematickém popisu problému je lano interpretováno jako dokonalá pružina nulové délky upevněná ve výšce  $h - l$  nad zemí. V tomto případě tedy Jirka „sedí na stlačené pružině“, což však nedává z hlediska popisu seskoků smysl. Správným výsledkem je proto pouze  $h_{J2} = -1,04$  m, což znamená, že Jirka by se zastavil asi 1 m pod zemí. Pokud tedy Jirka nechce, aby byl tento seskok jeho posledním, měl by použít jiné lano než Káta.

**Jiří Blaha**

jirka.b@fykos.cz

### Úloha III.3 ... bum-bác, bum-bác

6 bodů; průměr 4,03; řešilo 38 studentů

*Představme si, že na geosynchronní oběžnou dráhu umístíme velké množství satelitů. Shodou okolností dojde ke srážce, která se vymkne kontrole a vytvoří tenkou sférickou vrstvu homogenně posetou desítkami milióny úlomků o průměrné velikosti  $x = 10$  cm. Předpokládejte, že směry rychlostí jednotlivých úlomků jsou v tečné rovině ke sféře orientované náhodně. Kolik času průměrně uplyne mezi dvěma srážkami?*

*Dodo se učil na státnice o transportních jevech v plynu.*

Podľa zadania predpokladáme, že sa všetky úlomky nachádzajú v tenkej vrstve. Geosynchronná dráha je charakterizovaná dobou obehu okolo Zeme a je rovná jednému siderickému dňu  $T = 23^h 56^m 4^s$ . Polomer tejto sférickej vrstvy určíme z rovnováhy dostredivej a odstredivej sily

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

$$R = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42\,164 \text{ km}.$$

Ďalej potrebujeme určiť rýchlosť pohybu objektov. Tú máme jednoducho ako dráhu za čas

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 3,075 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pristúpme k jadrú úlohy. Stredný čas medzi zrážkou jedného konkrétneho telesa s iným určíme ako čas, za ktorý je pravdepodobnosť výskytu iného telesa v potenciálne kolíznom objeme nášho telesa jednotková. Vzhľadom na náhodné rozdelenie smerov rýchlosti je vzájomná rýchlosť stretu objektov v priemere<sup>1</sup>  $u = \sqrt{2}v$ . Náš kolízny objem konštruujeme pozdĺž trajektórie nášho telesa ako „trubicu“, v ktorej ak sa nachádza stred iného telesa, dôjde k zrážke. Na

<sup>1</sup>

$$u = \langle |v\mathbf{n}_1 + v\mathbf{n}_2| \rangle = v \langle \sqrt{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2\mathbf{n}_2} \rangle = v \langle \sqrt{1 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 1} \rangle = v \sqrt{1 + 2 \cdot 0 + 1} = \sqrt{2}v$$

rozdiel od rovnakých úvah v prípade strednej voľnej dráhy častice v ideálnom plyne, vzhľadom na rovnakú výšku všetkých objektov riešime len 2D problém. Trubicu nahradí pás šírky  $x$  na každú stranu od trajektórie telesa.<sup>2</sup> Za čas  $t$  má teda kolízna plocha veľkosť  $A(t) = 2x\sqrt{2}vt$ .

Určíme ďalej plošnú hustotu častíc na sfére  $\rho$ . Na ploche povrchu gule s polomerom  $R$  sa nachádza desať miliónov úlomkov

$$\rho = \frac{N}{S} = \frac{N}{4\pi R^2}.$$

Ak položíme očakávaný počet častíc v kolíznej ploche rovný jednej

$$1 = \rho A = \frac{Nx\sqrt{2}vt}{2\pi R^2},$$

dostávame stredný čas medzi zrážkami jedného konkrétneho telesa s iným telesom

$$t = \frac{\pi R^2}{Nx\sqrt{2}v} = \frac{RT}{\sqrt{2}Nx}$$

Zadanie úlohy sa však pýta na strednú dobu medzi zrážkami ľubovoľných telies. Tieto zrážky budú logicky  $N$ -krát častejšie, čiže čas ešte musíme predeliť počtom objektov. Ale ešte je tu jeden veľmi dôležitý detail – takto sme zarátali každú zrážku dvakrát, musíme teda ešte čas prenásobiť dvomi.

$$t = \frac{2RT}{\sqrt{2}xN^2} \doteq 0,5 \text{ s}.$$

Zrážky medzi týmito objektami by boli teda veľmi časté. Z počtu úlomkov môžeme za predpokladu strednej hustoty približne  $500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  (veľká časť uvažovanej veľkosti úlomkov je prázdny priestor) odhadnúť ich celkovú hmotnosť, ktorá sa pohybuje len okolo 5000 t. V skutočnom prípade budú mať úlomky rôzne veľkosti a samozrejme, že sa nebudú nachádzať len v tenkej vrstve. No už aj náš idealizovaný prípad jasne ukazuje, aké ničivé dôsledky môže mať nekontrolovaný pohyb satelitov.

*Jozef Lipták*

liptak.j@fykos.cz

### Úloha III.4 ... větrníkovej katapult

6 bodů; průměr 3,43; řešilo 67 studentů

*Malý myšák Joe se rád katapultuje z konce vrtule ventilátoru tak, že se jednoduše ve vhodnou dobu pustí a odletí. Kdy se má pustit, aby doletěl co nejdál? Vrtule má délku  $l$  a otáčí se s úhlovou rychlostí  $\omega$ , přičemž rovina otáčení je kolmá na vodorovnou rovinu. Dodejme, že střed otáčení je ve výšce  $h$  nad zemí. Honza má rád každého, kdo má rád katapulty.*

Zadání úlohy se dá chápat dvěma způsoby – můžeme se zajímat o to, při jakém úhlu myšák buď uletí největší vzdálenost nebo dopadne nejdál od sloupu ventilátoru.

Zaměříme se nejprve na první případ. Výšku myšáka nad zemí v čase vystřelení spočítáme jako součet délky sloupu a vrtule

$$h_0 = h - l \cos \varphi.$$

<sup>2</sup>Na to, aby sa telesá zrazili, stačí, aby sa ich stredy nachádzali vo vzdialenosti  $x$  od seba, pričom na smere spojnice stredov nezáleží.

Úhel  $\varphi$  volíme tak, že při  $\varphi = 0$  směřuje vrtule orientována svisle dolů. Orientace úhlu  $\varphi$  je pak standardní (proti směru hodinových ručiček). Kladný směr osy  $x$  volíme doprava. Při zanedbání odporu vzduchu bude vektor rychlosti po puštění

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega l \cos \varphi \\ \omega l \sin \varphi - gt \end{pmatrix},$$

kde  $t$  je čas od okamžiku, ve kterém se myšák pustil vrtule. Jako počátek  $x$ -ové osy je výhodné zvolit bod, ve kterém se myšák nacházel v čase  $t = 0$ . Potom pro jeho souřadnice dostaneme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ h_0 + \int_0^t v_y(t') dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega l t \cos \varphi \\ h - l \cos \varphi + \omega l t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix},$$

kde  $y \neq v_y t$ , jelikož  $v_y$  závisí na čase. Je tedy třeba integrovat, případně z hodin fyziky známe vzdálenost uraženou volně padajícím tělesem  $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ .

Pro čas dopadu platí  $y(t) = 0$ . Z této podmínky vyplývá

$$t_{1,2}(\varphi) = \frac{l \omega \sin \varphi \pm \sqrt{l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi - 2g(l \cos \varphi - h)}}{g},$$

což jsou řešení kvadratické rovnice. Kořen se záporným znaménkem vychází záporně, a proto neodpovídá fyzikálnímu řešení, takže dále budeme pracovat jen s kladným časem  $t_1$ . Za tuto dobu myšák uletí vzdálenost  $x_1$ , pro kterou platí

$$x_1 = v_x t_1 = \omega l t_1 \cos \varphi.$$

Dle nutné podmínky pro maximální vzdálenost

$$\frac{dx}{d\varphi} = 0$$

dostáváme rovnici pro úhel  $\varphi$ , pro který bude uletěná vzdálenost největší

$$0 = \frac{dx}{d\varphi} = \omega l \left( \frac{dt_1}{d\varphi} \cos \varphi + t_1 \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} \right),$$

což po zderivování a zjednodušení vede na

$$0 = \cos \varphi \left( \frac{l^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + gl \sin \varphi}{\sqrt{l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi - 2g(l \cos \varphi - h)}} + l \omega \cos \varphi \right) - \sin \varphi \left( \sqrt{l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi - 2g(l \cos \varphi - h)} + l \omega \sin \varphi \right).$$

Tato rovnice nemá analytické řešení pro  $\varphi = \varphi(l, \omega, g, h)$  a musíme se s tímto výsledkem spokojit. Jednu goniometrickou funkci můžeme nahradit druhou pomocí identity  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , čímž získáme racionální rovnici jen pro jednu proměnnou, například  $\sin \varphi$ . Po roznásobení a umocnění dostaneme polynom v této proměnné, který ale bude mít příliš vysoký stupeň na to, aby byl řešitelný analyticky (tj. větší než 4).

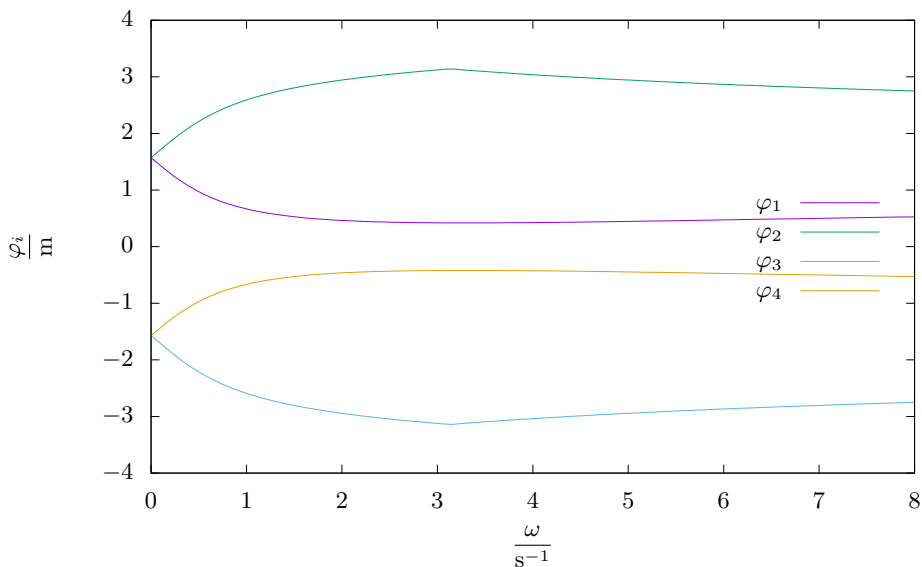
Pro představu můžeme dosadit hodnoty pro nějaký zcela obyčejný větrník. Například pro  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $h = 10 \text{ m}$  vyjde 6 kořenů pro  $\varphi$ , z nichž dva jsou reálné. Největší vzdálenost dostaneme pro

$$\varphi_{\max} \doteq 3,08 \doteq 176^\circ.$$

Pustí-li se myšák pod tímto úhlem, doletí do vzdálenosti

$$x_{\max} = v_x t_{\max} = \omega l t_{\max} \cos \varphi_{\max} \doteq -1,50 \text{ m},$$

kde záporné znaménko je čistě naše konvence směru osy. Všimněme si, že vyšel přibližně přímý úhel, který odpovídá téměř vodorovnému vektoru počáteční rychlosti. To je způsobeno relativně malou úhlovou rychlostí vzhledem k výšce stožáru. Pro dosažení maximální vzdálenosti je potom výhodné investovat většinu rychlosti do  $x$ -ové složky.



Obr. 1: Závislost  $\varphi_i$  na  $\omega$ .

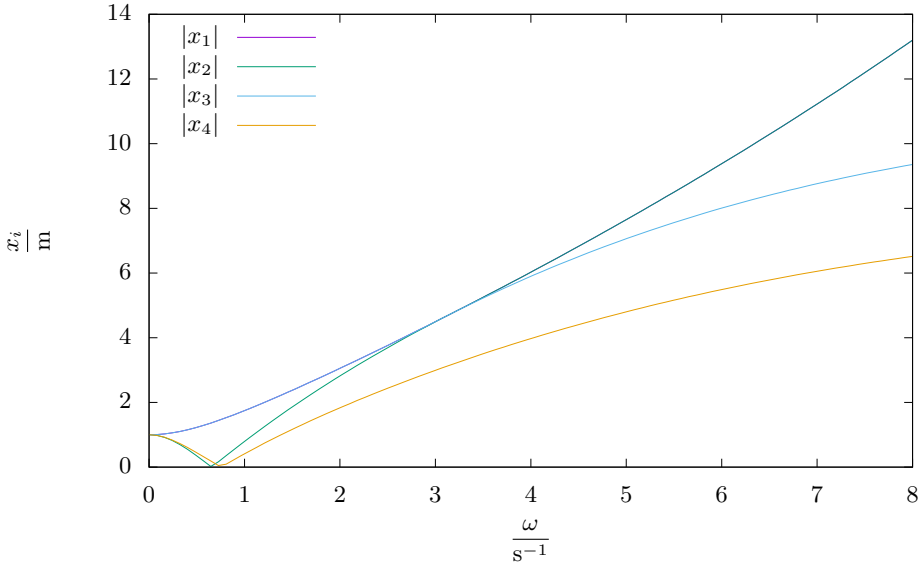
Druhý případ vyřešíme tak, že jako počátek  $x$ -ové osy zvolíme sloup ventilátoru. Vztah pro souřadnici myšáka po vypuštění v závislosti na čase proto přejde na

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin \varphi + v_x t \\ h_0 + \int_0^t v_y(t') dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin \varphi + \omega l t \cos \varphi \\ h - l \cos \varphi + \omega l t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}.$$

Čas letu  $t_1$  v závislosti na  $\varphi$  bude pořád stejný, jenom se změní počátek souřadnicového systému. Pro určení hledaného úhlu znovu použijeme podmínku

$$0 = \frac{dx}{d\varphi} = l \cos \varphi + \omega l \left( \frac{dt_1}{d\varphi} \cos \varphi + t_1 \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} \right),$$



Obr. 2: Závislost  $|x_i|$  na  $\omega$ .

tentokrát s novým vztahem pro  $x$ -ovou souřadnici. Po zderivování a zjednodušení dostaneme

$$0 = \cos \varphi \left[ g + \omega \left( \frac{gl \sin \varphi + l^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{2gh - 2gl \cos \varphi + l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi}} + l \omega \cos \varphi \right) \right] - \\ - \omega \sin \varphi \left( \sqrt{2gh - 2gl \cos \varphi + l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi} + l \omega \sin \varphi \right).$$

Roznásobení vede na kubickou rovnici pro  $\cos \varphi$  ve tvaru

$$(g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh\omega^2) l \cos^3 \varphi - ((g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh\omega^2) h - 2gl^2 \omega^2) \cos^2 \varphi - \\ - (l^2 \omega^2 + 4gh) l \omega^2 \cos \varphi + hl^2 \omega^4 + 2gh^2 \omega^2 = 0.$$

Ta může mít obecně až tři kořeny. V tomto případě máme štěstí, neboť jeden kořen můžeme odhadnout, čímž rovnici rozložíme na lineární a kvadratický člen

$$\left( \cos \varphi - \frac{h}{l} \right) \left( (g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh\omega^2) \cos^2 \varphi + 2gl\omega^2 \cos \varphi - (l^2 \omega^2 + 2gh) \omega^2 \right) = 0.$$

Pro každý rozumný ventilátor lze předpokládat  $h > l$  čili tomuto kořenu neodpovídá žádný reálný úhel  $\varphi$ . Pokud by odpovídal, nejspíš by se stejně jednalo o minimum. Protože funkce  $\cos$  není prostá, dostaneme ze zbývajících dvou kořenů čtyři řešení

$$\varphi_1 = \arccos \frac{A - gl\omega^2}{B}, \quad \varphi_4 = -\arccos \frac{A - gl\omega^2}{B}, \\ \varphi_2 = \arccos \frac{-A - gl\omega^2}{B}, \quad \varphi_3 = -\arccos \frac{-A - gl\omega^2}{B},$$

kde

$$A = \sqrt{g^2 l^2 \omega^4 + \omega^2 (g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh\omega^2) (l^2 \omega^2 + 2gh)},$$

$$B = g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh\omega^2.$$

Toto jsou body podezřelé z extrémů. Může se jednat o lokální extrémy, inflexní body, nebo o úplně normální body (při odvozování kubické rovnice jsme dělali neekvivalentní úpravy, například umocňování). Pro jistotu bychom mohli vyšetřit druhé derivace, ale to by bylo zbytečně pracné a nejspíš by nám stejně nevyšlo nic konkrétního. Dále proto budeme postupovat tak, že pro jednotlivé úhly  $\varphi_i$  spočítáme vzdálenosti  $x_i$  a z nich vybereme tu největší. Uvědomme si, že souřadnice  $x$  může být jak kladná, tak záporná, takže nás ve skutečnosti zajímá veličina  $|x|$ .

Nejdříve ještě ověříme, zda mají výsledné úhly fyzikální smysl. Výrazy v argumentu arccos jsou vždy v absolutní hodnotě menší než 1, což je v pořádku, jinak by nespadaly do definičního oboru funkce arccos. Ta je prostá a klesající s hodnotami  $\langle \pi, \frac{\pi}{2} \rangle$  pro interval  $(-1, 0)$  a s hodnotami  $\langle \frac{\pi}{2}, 0 \rangle$  pro interval  $(0, 1)$ . Označme si kvadranty 1 až 4, kde první přísluší  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , druhý  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  atd. Z nerovností  $A > gl\omega^2 > 0$  a  $B > 0$  je patrné, že úhel  $\varphi_1$  bude vždy v kvadrantu 1, zatímco  $\varphi_2$  bude v kvadrantu 2.

Jelikož  $\varphi_3 = -\varphi_2$  a  $\varphi_4 = -\varphi_1$ , budou vždy v kvadrantech 3 resp. 4. Intuice nám napovídá, že úhel  $\varphi_4$  by nikdy neměl být ten, pro který myšák doletí nejdál. Zkusme si tedy podobně jako v první části vypočítat úhly a vzdálenosti pro různé hodnoty parametrů. Protože ale tentokrát máme analytické řešení, můžeme je počítat například jako funkce parametru  $\omega$ . Ostatní hodnoty si znovu zvolíme  $l = 1 \text{ m}$ ,  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $h = 10 \text{ m}$ .

Výsledné vzdálenosti jsme zobazili v grafu na obrázku 2. Jak je vidět, naše intuice byla správná. Vzdálenost  $x_4$  není nikdy maximální. Vzdálenost  $x_1$  je proti tomu vždy maximální. Pro malé rychlosti otáčení je další maximální vzdálenost  $x_3$ , ale když se úhlová rychlost zvětšuje, tak se postupně stane maximální vzdáleností  $x_2$ . Také je velice zajímavé, že vždy existují dvě stejně velká maxima, jedno odpovídající letu doprava ( $x_1$ ) a jedno doleva ( $x_2$  nebo  $x_3$ ). Odpovídající úhly  $\varphi_i$  jsou na obrázku 1.

**Jan Střeleček**  
strela@fykos.cz

### Úloha III.5 ... pašování ve vesmíru

9 bodů; průměr 2,97; řešilo 37 studentů

Dvě vesmírné lodě letí v jedné přímce proti sobě. Jejich počáteční vzdálenost je  $d$ . První se pohybuje rychlostí  $v_1$ , druhá  $v_2$  (ve stejné vztažné soustavě). První dokáže vyvinout maximální zrychlení  $a_1$ , druhá  $a_2$  (obě v libovolném směru). Posádky lodí si chtějí předat nějaké „zboží“, ale k tomu potřebují, aby se lodě potkaly ve stejný čas na stejném místě a přitom měly stejnou rychlost. Za jaký nejmenší čas je toho možné dosáhnout? Relativistické jevy neuvažujte.

*Jáchym drze ukradl původní Štěpánův nápad.*

Přejdeme do souřadnic s počátkem v jedné z vesmírných lodí. Potom můžeme označit jejich vzdálenost  $x$ , vzájemnou rychlost  $v$  a maximální vzájemné zrychlení, které jsou schopné vyvinout,  $a = a_1 + a_2$ . Na začátku máme obecné  $x = x_0 = x_1 - x_2$  a  $v = v_0 = v_1 - v_2$  a chceme co nejrychleji docílit stavu, kdy bude platit  $x = 0$  a  $v = 0$ .

Situaci si můžeme představit jako graf, kde na vodorovnou osu vynášíme  $x$  a na svislou osu vynášíme  $v$ , viz obrázek 3. Jsme-li v bodě  $(x, v)$ , znamená to, že lodě jsou od sebe vzdálené  $x$  a mají vzájemnou rychlost  $v$ . Tento graf je znázorněním fázového prostoru, neboli prostoru všech možných fyzikálních stavů systému. Nás zajímá, jakou trajektorii v grafu máme zvolit, abychom se co nejrychleji dostali do počátku.

Při pohybu v grafu platí, že nad osou  $x$  je  $v > 0$ , tedy se pohybujeme doprava (ve směru rostoucího  $x$ ), pod osou  $x$  se pohybujeme doleva.

Do levého horního kvadrantu grafu si můžeme nakreslit parabolu danou rovnicí

$$v = \sqrt{-2ax}.$$

Ta odpovídá pohybu s maximálním možným zpomalením  $-a$ . Tato parabola nám horní polovinu rozděluje na dvě části – ze všech bodů nalevo od paraboly se dokážeme dostat do počátku, aniž bychom přitom opustili levý horní kvadrant. Pokud se však nacházíme napravo od paraboly (například v bodě  $A$  na obrázku), nedokážeme zabrzdit včas, takže osu  $x$  protneme v nějakém bodě  $x_1 > 0$ , odkud se pak už přes pravý spodní kvadrant dostaneme do počátku.

Rozmysleme si, že to vždy půjde, protože v dolní polovině grafu je situace bodově obrácená vzhledem k počátku. Rovnice dělicí paraboly tam má tvar

$$v = -\sqrt{2ax}.$$

Platí dvě tvrzení. Zaprvé, čím více budeme zpomalovat, tím dříve dosáhneme vzdálenosti  $x_1$  (a tím bude i menší). Zadruhé, čím bude  $x_1$  menší, tím rychleji se poté přesuneme z bodu  $x_1$  do středu (protože potom se jedná jen o pohyb po dráze dlouhé  $x_1$  s nulovou počáteční i konečnou rychlostí).

Kombinací obou tvrzení dostaneme, že pokud se na začátku nacházíme napravo od horní paraboly, nejkratšího času dosáhneme tehdy, když se budeme celou dobu pohybovat s maximální velikostí zrychlení. Přesněji řečeno, do bodu  $x_1$  a pak dál do poloviny vzdálenosti mezi nulou a  $x_1$  to bude  $-a$  a potom to bude  $a$ . Pohybu do  $x_1$  odpovídají rovnice

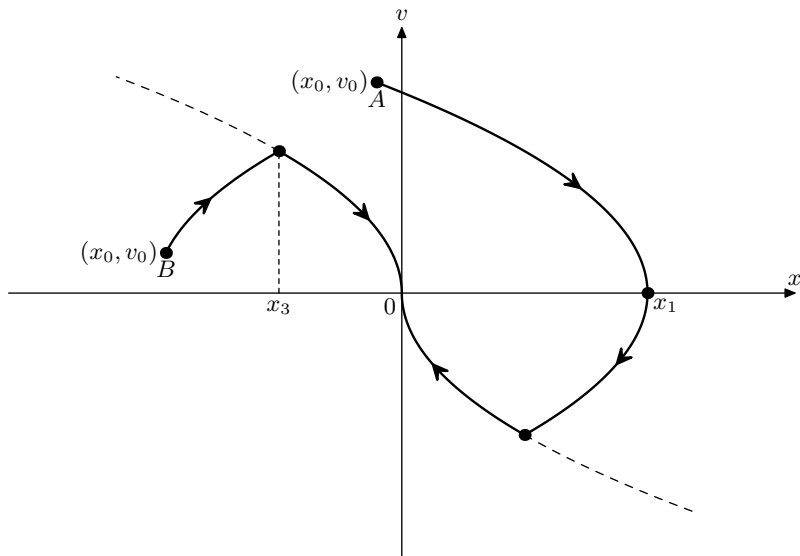
$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v_0}{a}, \\ x_1 - x_0 &= v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{v_0^2}{2a}, \\ x_1 &= x_0 + \frac{v_0^2}{2a}. \end{aligned}$$

Druhá část už je jen pohyb s nulovou počáteční i koncovou rychlostí přes vzdálenost  $x_1$ , zřejmě platí

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2} &= \frac{1}{2} a \left( \frac{t_2}{2} \right)^2, \\ t_2^2 &= \frac{4x_1}{a}. \end{aligned}$$

Máme výsledek

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4ax_0}}{a}.$$



Obr. 3: Nákres situace. Všechny paraboly mají vrchol na ose  $x$  a jsou stejně zakřivené. Dělicí paraboly jsou čárkovaně, čáry se šipkami odpovídají nejrychlejším trajektoriím do počátku.

To bylo samozřejmě řešení jen pro první část příkladu, ve které jsme na začátku v horní části napravo od dělicí paraboly. Jak jsme zmínili výše, pokud bychom zpočátku byli nalevo (například v bodě  $B$  na obrázku), dokážeme se do počátku souřadnicové soustavy dostat přímo (bez změny znaménka rychlosti). Přitom se samozřejmě chceme celou dobu pohybovat s co největší rychlostí, aby byl výsledný čas co nejmenší.

Řešením je opět pohyb s extrémálním zrychlením – nejdříve to bude  $a$ , a to až do bodu, ve kterém protne dělicí parabolu. Poté změníme zrychlení na  $-a$  a po parabole se dostaneme až do počátku. Označme vzdálenost, ve které protne dělicí parabolu, jako  $x_3$ . Dostáváme

$$\begin{aligned}x_3 &= -\frac{v_3^2}{2a}, \\v_3 &= v_0 + at_3, \\x_3 - x_0 &= v_0 t_3 + \frac{1}{2}at_3^2,\end{aligned}$$

což vede na

$$\begin{aligned}-\frac{(v_0 + at_3)^2}{2a} - x_0 &= v_0 t_3 + \frac{1}{2}at_3^2, \\2a^2 t_3^2 + 4v_0 at_3 + 2ax_0 + v_0^2 &= 0, \\t_3 &= \frac{-2v_0 \pm \sqrt{2v_0^2 - 4ax_0}}{2a},\end{aligned}$$

kde smysl má samozřejmě kladný čas, tedy kořen s +. Dále se už jen pohybujeme po známé parabole, takže hledaný čas, za který z  $v_3$  zpomalíme na nulu, je

$$t_4 = \frac{v_3}{a} = \frac{v_0}{a} + t_3,$$

řešením druhé části tedy je

$$t = t_3 + t_4 = \frac{v_0}{a} + 2t_3 = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 - 4ax_0}}{a}.$$

Shodou okolností jsme dostali vizuálně podobný výsledek jako předtím, čímž máme vše vyřešeno. Pro pořádek dodejme, že jsme celou dobu mlčky předpokládali, že se na začátku nacházíme v horní polovině grafu. Pokud by tomu tak nebylo, stačí využít středové symetrie grafu a provést záměnu souřadnic  $(x_0, v_0) \rightarrow (x'_0, v'_0)$ , kde  $x'_0 = -x_0$  a  $v'_0 = -v_0$ . V nových proměnných už budeme v horní části grafu a budou pro ně platit výše odvozené rovnice.

Zbývá jen dosadit hodnoty ze zadání. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $x_1 < x_2$  (v opačném případě bychom pouze prohodili rychlosti). Potom platí  $x_0 = -d$  a počáteční poloha leží v levé polovině grafu. Rozmyslíme si, že mohou nastat dva případy

$$v_1 - v_2 \geq \sqrt{2(a_1 + a_2)d} \Rightarrow t = \frac{(v_1 - v_2) + \sqrt{2(v_1 - v_2)^2 - 4(a_1 + a_2)d}}{a},$$

$$v_1 - v_2 \leq \sqrt{2(a_1 + a_2)d} \Rightarrow t = \frac{-(v_1 - v_2) + \sqrt{2(v_1 - v_2)^2 + 4(a_1 + a_2)d}}{a}.$$

Na závěr dodejme, že existuje i mnohem jednodušší řešení. Konkrétně stačilo vzít výsledek úlohy III.5 z 32. ročníku a vyjádřit z něj minimální čas. Z toho plyne, že ptáme-li se na to, jak nejrychleji překonáme danou vzdálenost, možná jen chceme zjistit, kam nejdál se můžeme za daný čas dostat. Na tom, že se jedná o vzdálenost ve fázovém prostoru souřadnic a rychlostí, vlastně vůbec nezáleží.

**Jáchym Bártík**

tuaki@fykos.cz

**Úloha III.P ... vlnitý elektromagnetismus** 11 bodů; průměr 3,50; řešilo 26 studentů

*Co kdyby přírodní zákony nebyly v celém vesmíru stejné? Co kdyby se nějak měnily s polohou? Zaměřme se na elektromagnetickou interakci. Jak minimálně by se konstanta v Coulombově zákonu musela měnit se vzdáleností, abychom to mohli pozorovat? Jak bychom to pozorovali?*

*Karel se moc díval na YouTube.*

Prvým krokom riešenia je rozmyslieť si, čo sa má vlastne podľa zadania diať. Coulombov zákon má tvar

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

budeme preto uvažovať priestorovú zmenu hodnoty permitivity vákuua  $\epsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ . Ostatné fyzikálne konštanty a vlastnosti elementárnych častíc sa v našej úvahe nebudú meniť. Tu však nastáva menší problém. Takýchto konštant je totiž viac a sú medzi sebou čiastočne previazané. Napríklad pre rýchlosť svetla vo vákuu  $c$  platí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

kde  $\mu_0$  je permitivita vákua. Ako fundamentálnejšiu konštantu, ktorá sa nebude meniť, budeme uvažovať rýchlosť svetla. So zmenou permitivity sa teda bude nepriamoúmerne meniť aj permeabilita vákua. Ďalšou používanou konštantou je tzv. impedancia vákua

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{c\varepsilon_0} \doteq 377 \Omega,$$

ktorá sa teda bude meniť tiež nepriamoúmerne permitivite. Na ďalší problém narazíme v kvantovej fyzike, a to v prípade konštanty jemnej štruktúry

$$\alpha = \frac{e^2}{2hc\varepsilon_0} \doteq \frac{1}{137},$$

kde  $e$  je elementárny náboj a  $h$  je Planckova konštantka, ktoré uvažujeme nemenné. Vidíme teda, že aj konštantka jemnej štruktúry bude nepriamoúmerná permitivite vákua.

### Atomárne spektrá

Začnime so samotným riešením úlohy. Zmenu elektrickej permitivity môžeme chápať najmä ako zmenu sily elektrickej interakcie. Ako prvé sa pozrime na elektrostatické pôsobenie medzi elektrónmi a jadrom v atómoch. Špeciálne pre atóm vodíka máme známe energetické hladiny od hlavného kvantového čísla  $n$

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{2a_B} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \frac{1}{n^2},$$

kde  $a_B$  je Bohrov polomer, ktorý sa s hodnotou permitivity mení, preto po prevedení do konštantných veličín obsahujúcich nemennú hmotnosť elektrónu  $m_e$  vidíme skutočnú závislosť energetických hladín na permitivite  $E \propto \varepsilon_0^{-2}$ . So zmenou permitivity vákua by sa zmenili energie a teda aj vlnové dĺžky (resp. frekvencie) fotónov odpovedajúcim preskokom medzi hladinami. Dá sa očakávať, že táto zmena bude rovnaká pre všetky ostatné atómy,  $E \propto \varepsilon_0^{-2}$ . Toto je pomerne nepríjemné, keďže sa jedná o celkovú relatívnu zmenu všetkých energií. Takúto zmenu totiž ľahko prehliadneme ako chybu kalibrácie (v meraniach na Zemi), či ako Dopplerov posun (v meraniach vo vesmíre), ak budeme energie merať štandardne spektroskopicky. Tento jav však poskytuje možnosť inému experimentu. Atóm, ktorý deexcitáciou uvoľní fotón totiž nemusí byť schopný absorbovať atóm rovnakého prvku v inom bode priestoru (voči prvému v pokoji).

V spektrách sa však budú vyskytovať isté odchýlky od jednoduchej relatívnej zmeny. Presnejším popisom by sme sa mohli dopracovať pre atóm vodíka k hladinám s tzv. jemnou štruktúrou závislou aj na ďalšom kvantovom čísle  $j$  - celkovom momente hybnosti elektrónu<sup>3</sup>

$$E_{j,n} = E_n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right).$$

V spektrách tak vzniká malý posun polohy čiar a ich rozštiepenie. Napríklad hladina pre  $n = 2$  sa rozštiepi na dve pre  $j = 1/2$  a pre  $j = 3/2$ . Preto dochádza aj k rozštiepeniu príslušnej

<sup>3</sup>Ide o kvantovomechanické zloženie spinu  $s$  a orbitálneho momentu hybnosti  $l$  a nadobúda kladné hodnoty, ktoré sú od  $l$  vzdialené o  $1/2$ .

spektrálnej čiary Lyman- $\alpha$  zodpovedajúcej prechodu do základného stavu. Ak sa budeme zaujímať o relatívnu veľkosť tohto rozštiepenia voči energii prechodu, tak získame dobre merateľnú veličinu nadobúdajúcu hodnotu

$$w = \frac{E_{3/2,2} - E_{1/2,2}}{E_{1/2,2} - E_{1/2,1}} \approx \frac{-E_2}{E_2 - E_1} \frac{\alpha^2}{4} \approx \frac{\alpha^2}{12}.$$

Vidíme teda, že energeticky zodpovedá jednému veľkému prechodu asi 225 000 jemných prechodov. Toto číslo závisí na  $\alpha$  a teda aj na  $\varepsilon_0$ , keďže  $w \propto \alpha^2 \propto \varepsilon_0^{-2}$  a sme ho tak schopní pomerne bezproblémovo zmerať.

## Šírenie svetla

Vzhľadom na to, že svetlo je elektromagnetické vlnenie by sme mohli očakávať zmenu v spôsobe jeho šírenia. Pozrime sa preto na situáciu pre rovinnú vlnu na rovinnom rozhraní medzi dvoma prostrediami s rôznou hodnotou permitivity. Na takomto rozhraní musí vlnenie spojiťe naväzovať, podobne ako v prípade rozhrania prostredí s rôznym indexom lomu. Z platnosti podmienky v každom čase dostávame nemennosť frekvencie žiarenia. Ďalej, keďže je rýchlosť šírenia v oboch prostrediach rovnaká, musia mať rovnakú veľkosť vlnovej dĺžky, a teda aj vlnové vektory. Z platnosti podmienky na celej rovine rozhrania máme, že žiarenie buď prejde cez rozhranie priamo, alebo sa odrazí podľa zákona odrazu. To, aká časť žiarenia sa odrazí, určujú Fresnelove vzorce, ktoré majú vo všeobecnej podobe pre podiel komplexných amplitúd vlny tvar

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t},$$

$$r_p = -\frac{Z_2 \cos \theta_t - Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_t + Z_1 \cos \theta_i},$$

pre  $s$ , resp.  $p$  polarizované svetlo,  $\theta_i$  je uhol dopadu,  $\theta_t$  uhol lomu a  $Z$  je impedancia jednotlivých prostredí. V našom prípade je uhol dopadu rovnaký ako uhol lomu a po zjednodušení tak dostávame

$$r_s = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

$$r_p = -r_s.$$

Záporné znamienko vo výslednom koeficiente znamená zmenu fázy na opačnú. Vidíme teda, že sa paprsok šíri cez rozhranie priamo a bez ohľadu na uhol dopadu a polarizáciu žiarenia sa od rozhrania časť dopadajúcej vlny odrazí, na rozdiel od prípadu v štandardnej optike. V prípade komplexnejšieho rozdelenia permitivity v priestore by sme teda mohli dostať dokonca zaujímavé interferenčné javy. Priame pozorovanie tohto javu ale pravdepodobne nie je jednoduché.

## Meranie

Vráťme sa na chvíľu k atómu vodíka. Zmena energií hlavných hladín  $E \propto \varepsilon_0^{-2}$  totiž pôsobí zmenu frekvencie zodpovedajúceho prechodu  $f \propto E \propto \varepsilon_0^{-2}$ . Pre prechod medzi jemnými podhladinami môžeme vidieť zmenu frekvencie  $f \propto E_n \alpha^2 \propto \varepsilon_0^{-4}$ . Sekunda je definovaná pomocou prechodu hyperjemnej štruktúry cézia, ktorej zmena a samotný pôvod sú komplikovanejšie. Vidíme teda, že po zmene permitivity použitím kmitov rôznych sústav dostaneme časy bežiace

rôznou rýchlosťou. Tento jav by mohol byť merateľný využitím atómových hodín bežiacich na rôznych typoch prechodov.

Okrem merania času sa skomplikuje aj meranie dĺžky. Zmena sily elektrickej interakcie zmení hodnotu Bohrovho polomeru atómu vodíka

$$a_B = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} \propto \varepsilon_0.$$

Podobne sa teda zmenia aj polomery ostatných orbitálov. Celkovo tak dôjde k zmene veľkostí atómov a v prípade medziatómových väzieb aj veľkosti molekúl, či vzdialenosti atómov v kryštáloch. Dá sa teda predpokladať, že naše pravítka (či iné fyzické etalóny meraní dĺžky) budú mať na rôznych miestach priestoru rôznu dĺžku. Túto zmenu by sme vzhľadom na nemennosť rýchlosti svetla mohli zmerať. Fyzickú realizáciu tohto experimentu však komplikuje meranie už spomenutého času. Mohlo by nám napadnúť skúsiť merať dĺžku interferometricky a pozorovať posun interferenčných prúžkov. Pre vlnovú dĺžku svetla platí  $\lambda \propto E^{-1} \propto \varepsilon_0^2$  a keďže by sa dĺžka tyče menila úmerne atómovému polomeru  $l \propto a_B \propto \varepsilon_0$ , tak by sme pozorovali zmenu.

Vzhľadom na uvedené zmeny meradiel jednoduchých veličín môžeme len skonštatovať, že s meraním iných veličín budú len ďalšie problémy. Ak by sme napríklad chceli zmerať permeabilitu vákua pomocou rovnobežných vodičov, musíme uvažovať meranie dĺžky vodičov, meranie sily, ktoré obsahuje v jednotkách aj čas aj priestor a meranie elektrického prúdu. V prípade, ak prúd meriame analógovo, máme opäť problém s dĺžkou a časom. V prípade, že je meranie digitálne sa ani neodvažujeme skúmať zmeny súvisiace s mechanizmom merania.

### Experiment na záver

Pokúsme sa detekovať zmenu elektrickej permitivity priamo ako zmenu sily medzi dvomi nábojmi. Majme dve nabité telesá v pokoji vo vzdialenosti  $r$  od seba. Náboj aj hmotnosť týchto telies sú dané ich zložením, meniť sa teda rovnako ako elementárny náboj a hmotnosti elementárnych častíc nebudú. Silu medzi nábojmi nebudeme merať priamo, ale pozrieme sa na vzájomné zrýchlenie v okamihu uvoľnenia nábojov. Všetky vzdialenosti budeme merať pomocou vlnovej dĺžky svetla zodpovedajúcej prechodu hlavnej štruktúry, pomocou ktorého budeme merať aj čas. Výslednú nameranú hodnotu permitivity  $\varepsilon_m$  dostávame zo vzťahu

$$\varepsilon_m = \frac{q_1 q_2}{4\pi F r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi m a r^2},$$

Pri zmene permitivity sa mení hodnota faktoru  $a r^2$ . Vzhľadom na spôsob merania stačí určiť jednotky tohto súčinu  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . Nameranú hodnotu teda dostaneme ako

$$\varepsilon_m \propto \frac{1}{f^2 \lambda^3} \propto f^{-1} \propto \varepsilon_0^2.$$

Vidíme teda, že namerať zmenu sa nám použitím dostatočne presného merania podarí, no nameraná hodnota nezodpovedá skutočnej hodnote permitivity.

**Jozef Lipták**  
liptak.j@fykos.cz



## Úloha III.E ... difuze

12 bodů; průměr 7,84; řešilo 31 studentů

Určitě jste ve škole slyšeli o tepelném pohybu molekul, jako je difuze či Brownův pohyb. Změřte časovou závislost velikosti barevné skvrny ve vodě a vypočítejte difuzní konstantu. Proveďte měření pro několik různých teplot a sestrojte graf teplotní závislosti difuzní konstanty. Jak byste mohli zařídit, aby byla teplota v průběhu každého měření konstantní?

*Káťa si užívá praktika i v době karantény.*

## Teorie

Difuze je popsána rovnicí

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n = 0,$$

kde  $n = n(\mathbf{x}, t)$  je koncentrace a  $D$  difuzní konstanta. Tento vztah je také známý pod názvem rovnice vedení tepla a má fundamentální řešení

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4Dt}}. \quad (9)$$

Můžeme si povšimnout, že se jedná o statistické normální rozdělení s rozptylem  $\sigma^2 = 2Dt$ . Ztotožníme-li posunutí částic  $x$  za čas  $t$  s tímto rozptylem, dostáváme

$$x = \sqrt{2Dt}. \quad (10)$$

Při výpočtech budeme předpokládat, že tento vztah platí, a jeho validitu podrobněji rozebereme na konci.

Pro posuvný pohyb kulové částice o hmotnosti  $m$  a poloměru  $r$ , která se nachází v prostředí charakterizovaném teplotou  $T$  a dynamickou viskozitou  $\eta$ , lze konstantu  $D$  vyjádřit jako

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}, \quad (11)$$

kde  $k_B$  je Boltzmannova konstanta.

Chyby určujeme pomocí zákona přenosu chyb pro nezávislé proměnné

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial P_i} \sigma_{P_i} \right)^2}, \quad (12)$$

kde hledáme chybu veličiny  $V$ , jež závisí na proměnných  $P_1, \dots, P_n$ .

## Výsledky měření

## Pohyb částic

Měření probíhalo přibližně za normálního tlaku při teplotách 4 °C, 11 °C, 20 °C a 23 °C.

Nejprve jsme naplnili misku či talířek vodou a nechali odstát, aby pro následné měření měla voda teplotu okolního vzduchu. Pouze pro teplotu  $T = 4$  °C se nám takové podmínky nepodařilo zajistit, okolní vzduch měl tedy teplotu pokojovou.

Poté jsme do vody nasypali potravinářské barvivo. Kamerou mobilního telefonu se zapnutým programem *FrameLapse* jsme misku natáčeli (program udělal jeden snímek za pět sekund),

přičemž pro referenci jsme k ní položili pravítko a nechali jsme barevnou skvrnu expandovat ve vodě.

Následně jsme v programu *OpenShot Video Editor* pro jednotlivé snímky odečetli jejich indexy  $f$ , ze kterých jsme díky znalosti periody snímků získali jejich časy  $t$ . Pro nejnižší index snímku v daném měření jsme položili  $t = 0$  s, zbylé časy pak odpovídají pětinasobku (perioda snímků) rozdílu mezi nějakou hodnotou  $f$  a  $f_0$ , jíž odpovídá  $t = 0$  s. Pro každou teplotu jsme v programu *PixelZoom* stanovili měřítko (kolik pixelů odpovídá jednomu centimetru) a změřili rozměry barevné skvrny, a to vždy podél dvou (náhodných) na sebe kolmých os, jež budeme dále označovat  $a$  a  $b$ . Tyto veličiny v rámci našeho experimentu popisují prakticky stejný jev (nemělo by záležet na tom, v jakém směru rychlost difuze měříme), nebudeme proto jejich vztah dále uvažovat a budeme s nimi počítat jako s nezávislými veličinami.

Veličina  $x$  z teorie značí polovinu rozměru barevné skvrny, platí tedy  $x_a = a/2$ ,  $x_b = b/2$ . Ve vzorcích budou obě proměnné reprezentovány společně písmenem  $x$ . Záměrně se vyhýbáme slovům „průměr“ a „poloměr“. Teoreticky by totiž skvrna měla být po celý experiment kruhová, nicméně reálně mohl být tvar mírně odlišný. Proto také měříme dva na sebe kolmé rozměry, nikoliv jen jeden.

Nejistotu odečtení jedné vzdálenosti odhadujeme jako 5 px. Nejistota určení rozměrů skvrny tedy závisí na tom, kolik pixelů odpovídá jednomu centimetru. Konstanta přepočtu – označme ji  $k$  (její jednotkou je pixel na centimetr) – byla různá pro každé měření a její hodnoty jsou zaznamenány v tabulce 1.

Potom platí

$$a \text{ [cm]} = k^{-1} \cdot a \text{ [px]},$$

přičemž chyba je dle zákona přenosu chyb

$$\sigma_a \text{ [cm]} = k^{-1} \cdot \sigma_a \text{ [px]} = k^{-1} \cdot 5 \text{ px}.$$

Chyba  $x_a$  je pak jednoduše  $\sigma_{x_a} = \sigma_a/2$ . Pro  $b$  a  $x_b$  postupujeme zcela analogicky. Ve zbytku textu je výrazem  $x$  vždy myšleno  $x \text{ [cm]}$ . V tabulce 1 jsou uvedeny také nejistoty  $\sigma_x \text{ [cm]}$  pro odpovídající měření.

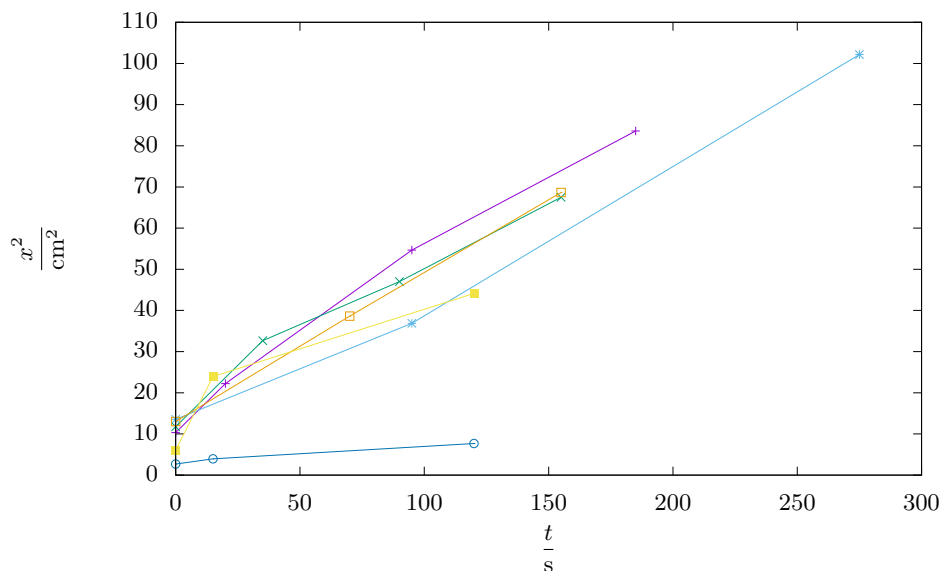
Pro  $T = 23^\circ\text{C}$  jsme provedli dvě různá měření se dvěma různými měřítky. Závislost druhých mocnin veličin  $x_a$  a  $x_b$  na čase znázorňují grafy 4 až 8.

Tab. 1: Přepočty  $k$  a nejistoty měření  $x_a$  a  $x_b$ .

$T$ °C	$k$ px·cm <sup>-1</sup>	$\sigma_x$ cm
4	28	0,17
11	14	0,35
20	20	0,25
23	20	0,25
23	31	0,16

### Difuzní koeficient

Pro každou hodnotu  $x_a$  a  $x_b$  jsme pomocí vzorce (10) stanovili hodnotu difuzního koeficientu.

Obr. 4: Závislost vzdálenosti na čase pro  $T = 4^\circ\text{C}$  a  $k = 28 \text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$ 

Nejistotu měření  $i$ -té hodnoty difuzního koeficientu jsme spočítali ze zákona přenosu chyb (12) dle vzorce

$$\sigma_{D_i} = \frac{2D_i}{x_i} \sigma_x,$$

přičemž jsme neuvažovali nejistotu při určení času, která je vzhledem k ostatním chybám zanedbatelná (čas byl měřen velmi přesnými hodinami mobilního telefonu).

Celkově jsme difuzní koeficient pro danou teplotu stanovili aritmetickým průměrem jednotlivých hodnot. Chybu určení difuzního koeficientu jsme pak spočítali ze vztahu

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_{D_{\text{stat}}}^2 + \sigma_{D_{\text{sys}}}^2},$$

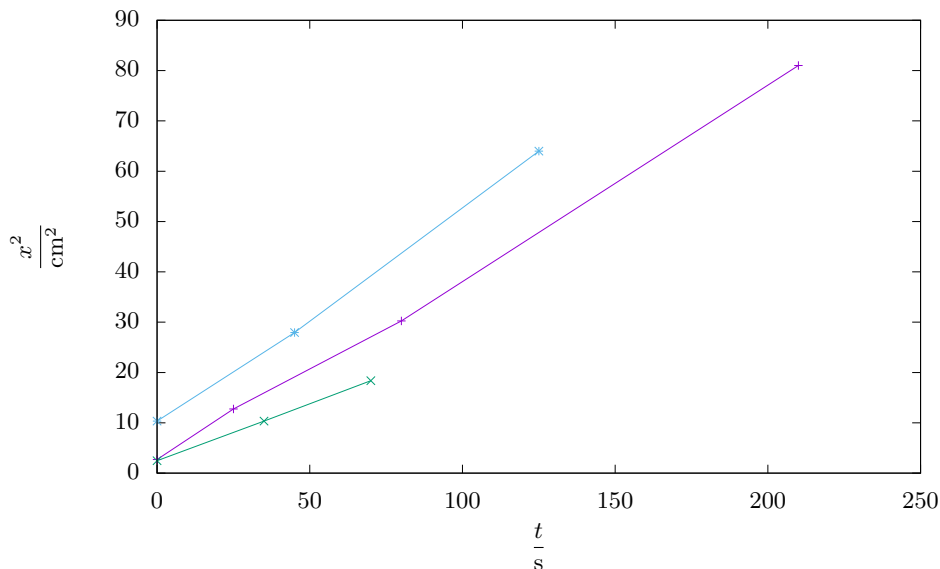
kde

$$\sigma_{D_{\text{stat}}}^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

je statistická chyba aritmetického průměru a

$$\sigma_{D_{\text{sys}}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{D_i}^2$$

je chyba systematická.



Obr. 5: Závislost vzdálenosti na čase pro  $T = 11\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $k = 14\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

Výsledné hodnoty difuzních koeficientů včetně odpovídajících chyb jsou zaznamenány v tabulce 2. Závislost  $D(T)$  jsme vynesli do grafu 9.

Tuto závislost jsme lineárně fitovali v programu *gnuplot* podle teoretické závislosti (11), čímž jsme získali konstantu úměrnosti mezi  $D$  a  $T$  s hodnotou  $(-0,1 \pm 2,1) \cdot 10^{-4}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

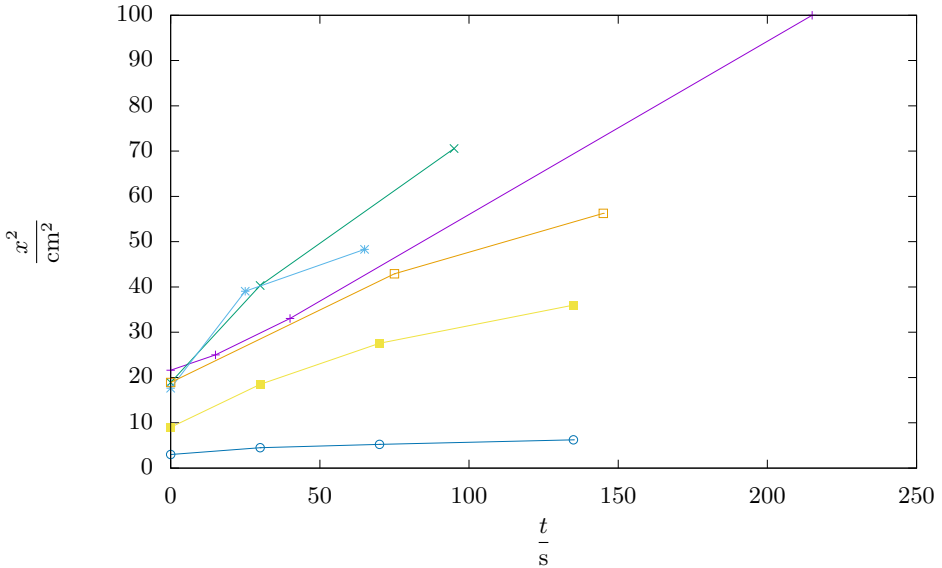
Tab. 2: Difuzní koeficienty.

$T$ $^{\circ}\text{C}$	$k$	$\frac{D}{10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}$	$\frac{\sigma_D}{10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}$
4	28	0,9	0,3
11	14	0,4	0,5
20	20	1,2	0,7
23	20	1,3	0,4
23	31	0,5	0,1

## Diskuze

### Zanedbání a aproximace

V celém postupu jsme předpokládali, že dynamická viskozita vody  $\eta$  se s teplotou nemění, díky čemuž je závislost  $D(T)$  lineární. Ve skutečnosti však viskozita na teplotě závisí, což by



Obr. 6: Závislost vzdálenosti na čase pro  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $k = 20\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

bylo možné zahrnout do výpočtu. V námi použitým rozsahu teplot jsou ovšem změny viskozity zanedbatelné.

Na experiment také mohlo mít vliv povrchové napětí vody, jež mohlo ovlivňovat způsob pohybu částic barvy. Dá se ale předpokládat, že tento jev není v experimentu výrazný, proto byl zanedbán.

Model difuze předpokládá, že jak molekuly vody, tak molekuly barvy jsou pouze „kuličky“, které na sebe (vyjma srážek) nijak silově nepůsobí. Reálné molekuly na sebe samozřejmě působí i jinými silami, které zde však také zanedbáváme.

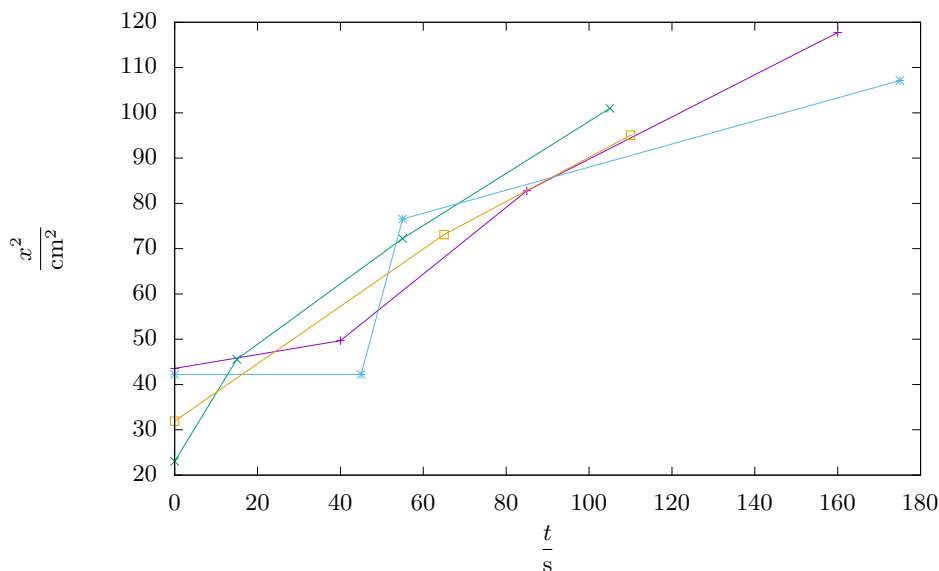
### Ověření předpokladů

Vztahem (9) jsme se dopustili poměrně velkého teoretického skoku. Pojďme se nyní tímto skokem a validitou vztahu (10) více zabývat.

Je rozumné předpokládat, že stav systému v čase závisí na počátečních podmínkách. Ty ale mohou být v každém případě jiné – vyjadřují se ve tvaru  $n_0(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}, 0)$ . Z tohoto důvodu při řešení diferenciálních rovnic zpravidla neexistuje obecné řešení a musíme použít právě fundamentální řešení. To má velmi výhodnou vlastnost

$$n(\mathbf{x}, t) = (n_0 * \Phi)(\mathbf{x}, t),$$

kde  $*$  označuje konvoluci přes všechny prostorové proměnné. Tato rovnice nám tedy z funkce, která popisuje stav systému na začátku, „vyrobí“ funkci popisující systém v libovolném čase.



Obr. 7: Závislost vzdálenosti na čase pro  $T = 23\text{ °C}$  a  $k = 20\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

Konvoluce je matematická operace, jež má zásadní fyzikální využití. Můžeme ji chápat jako vyjádření, jak moc se grafy vstupních funkcí překrývají. Přesná definice je

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

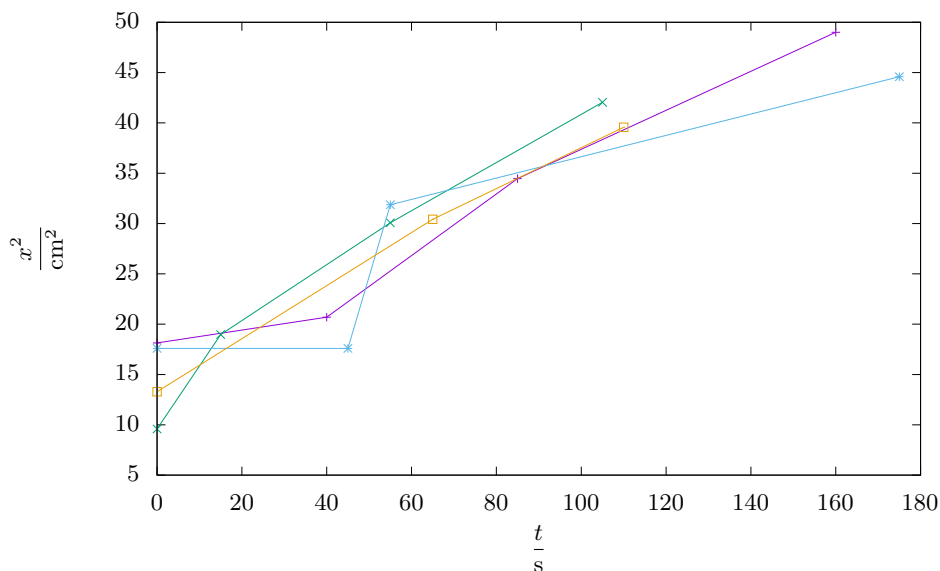
kde  $\mathbb{R}^n$  indikuje, že integrace probíhá přes všechny body prostoru.

Počítat tento integrál pro obecné  $n_0$  nemusí být nic snadného. Naštěstí se tomu můžeme vyhnout vhodnou volbou počátečních podmínek, například  $n_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ . Tomuto výrazu se říká  $\delta$ -funkce a její základní charakteristikou je, že se ve skutečnosti nejedná o funkci. Nemusíme zacházet do podrobností, důležité však je, co tento vztah vyjadřuje – totiž že na počátku je všechna barva v jednom bodě. Jelikož je  $\delta$ -funkce radiálně symetrická, tuto vlastnost si zachová i výsledné řešení, a proto můžeme přejít do polárních souřadnic, kde  $x$  bude vyjadřovat vzdálenost od počátku.

Významnou vlastností  $\delta$ -funkce je, že se vůči konvoluci chová jako jednotka. To znamená, že pro libovolnou funkci  $f$  platí  $f * \delta = f$ . Vybaveni touto znalostí už snadno najdeme řešení rovnice

$$n(x, t) = (\delta * \Phi)(x, t) = \Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Tento výsledek má jednu nepříjemnou vlastnost – že koncentrace není v žádném bodě nulová, ačkoli exponenciálně klesá do nuly. Vskutku, řešení se už v prvním možném okamžiku rozšíří do celého prostoru. To je způsobeno tím, že uvažujeme ideální částice, které jsou nekonečně



Obr. 8: Závislost vzdálenosti na čase pro  $T = 23\text{ °C}$  a  $k = 31\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

malé a je jich nekonečně mnoho. Reálné částice se tak samozřejmě nechovají, lepší model však bohužel nemáme.

Za hranici barevné skvrny budeme proto považovat takovou vzdálenost od počátku  $x$ , v níž je koncentrace  $c$ -krát menší než v počátku. Pro tuto vzdálenost potom dostáváme

$$\frac{n(x, t)}{n(0, t)} = \frac{1}{c} \Rightarrow x = \sqrt{4Dt \ln c} = \sqrt{CDt},$$

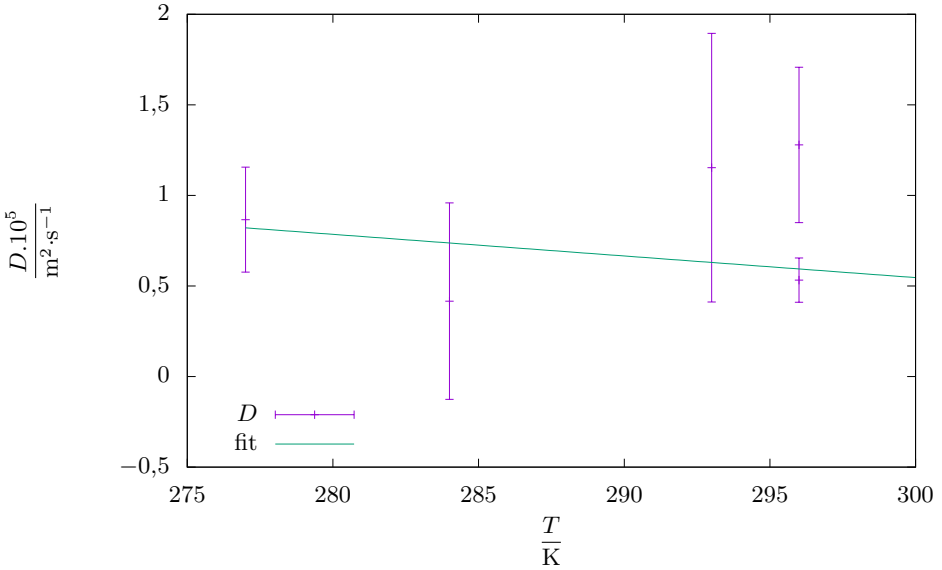
kde  $C = 4 \ln c$ .

V tomto vzorovém řešení jsme předpokládali  $C = 2$ , nicméně dopočet konstanty  $C$  je obecně velmi netriviální. Víme pouze to, že  $c$  je poměr koncentrace uprostřed a koncentrace na hranici – ten samozřejmě neznáme, ale může to být velmi vysoké číslo. Koncentrace uprostřed bude (řádově) v procentech, koncentrace za okrajem může být prakticky nulová. Naneštěstí si tedy nemůžeme být jisti ani řádem správného výsledku.

### Přesnost výsledku

Vodu jsme před měřením nechali odstát, aby získala teplotu okolního vzduchu a aby teplota během experimentu byla konstantní. Výjimkou je měření při  $4\text{ °C}$ , které jsme z technických důvodů prováděli při pokojové teplotě okolního vzduchu. Tento fakt mohl mít negativní vliv na přesnost měření.

Chyby měření by pravděpodobně bylo možné snížit šetrnějším dávkováním barvy do vody (např. pipetováním). Pro lepší ověření závislosti (11) by také bylo vhodné provést měření ve větším rozsahu teplot.



Obr. 9: Závislost difuzního koeficientu na teplotě.

Graf 9 zobrazuje závislost  $D(T)$ , jež by měla podle (11) být lineární a rostoucí. Takovou závislost ovšem ani podle fitu, ani vizuálně nepozorujeme. Směrnice má dokonce špatné znaménko. Chyby měření jsou značné a pouhým okem v grafu vidíme, že přesnost takového výsledku je diskutabilní.

Srovnáme ještě výsledky s teoretickými hodnotami ze vztahu (11). Neznáme sice poloměr částic  $r$ , ale ostatní hodnoty jsou snadno dohledatelné; teplotu volme například  $T = 300$  K. Pak

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \approx \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{6\pi \cdot 9 \cdot 10^{-4} r} \approx \frac{2,4 \cdot 10^{-19}}{r}.$$

Vidíme, že aby difuzní konstanta měla námi naměřené hodnoty (v řádu  $10^{-5}$ ), pak by poloměr molekul barvy musel být řádově  $10^{-14}$  m, což je bohužel o několik řádů méně, než je poloměr jediného atomu. Mírně nás může uklidnit diskuse parametru  $C$  výše a z ní vyplývající fakt, že  $C$  může být řádově nižší než námi zvolená hodnota  $C = 2$ . Výsledek tedy pravděpodobně není vzdálen příliš mnoho řádů od skutečnosti, nicméně nic bližšího říct nedokážeme.

## Závěr

Thomas A. Edison jednou řekl: *I have not failed. I've just found 10 000 ways that won't work.* (Neselhal jsem, jen jsem objevil 10 000 způsobů, které nefungují.)

My jsme právě objevili jeden způsob, jak nezměřit spolehlivě difuzní konstantu.



## Poznámka ke získaným řešením

V řešeních nalézáme pozoruhodný rozptyl hodnot difuzních konstant, celkově činí asi deset řádů. Do této skutečnosti se zřejmě promítla i složitost teorie – často docházelo k záměnám středního kvadratického posunutí jedné částice, přes které lze difuzní konstantu počítat mikroskopicky, a poloměru barevné skvrny, jenž je s difuzní konstantou svázán jiným vztahem než mikroskopická veličina.

**Martin Vaněk**  
martin@fykos.cz

### Úloha III.S ... elektron v poli

10 bodů; průměr 4,00; řešilo 16 studentů

Uvažujte částici s nábojem  $q$  a hmotností  $m$ , která je přichycená k pružině o tuhosti  $k$ , jejíž druhý konec je ukotven v jednom bodě. Předpokládejte, že pohyb částice je omezen na pohyb v jedné rovině. Celý systém je v magnetickém poli o velikosti  $B_0$ , které je kolmé na rovinu pohybu částice. Pokusíme se popsat možné oscilace této částice. Začněte sestavením rovnic pohybu pro tuto částici – nezapomíňte započítat vliv magnetického pole.

Poté předpokládejte oscilující pohyb pro obě kartézské souřadnice částice, a proveďte Fourierovskou substituci, tj. nahraďte derivace násobky  $i\omega$ , kde  $\omega$  je frekvence oscilací. Vyřešte výslednou soustavu rovnic tak, abyste získali poměr amplitud oscilací a frekvenci oscilací. Takto získané řešení je poměrně složité, a abychom mu lépe porozuměli, je vhodné přiblížit si ho v jednodušším případě. Předpokládejte tedy dále, že magnetické pole je velmi silné, tj.  $\frac{q^2 B_0^2}{m^2} \gg \frac{k}{m}$ . Určete přibližnou hodnotu (hodnoty)  $\omega$  v této aproximaci, hledejte vždy nejvyšší nenulový řád přiblížení. Dále načrtněte pohyb (pohyby) částice v reálném prostoru při této aproximaci.

*Stěpán chtěl vytvořit klasický diamagnet.*

Na částici působí dvě síly. První silou působí pružina, která vrací částici zpět ke kotvícímu bodu. Zaveďme soustavu souřadnic s počátkem v tomto kotvícím bodě. Pozice částice je  $\mathbf{r}$  a síla, kterou působí pružina, je tedy

$$\mathbf{F}_p = -k\mathbf{r}.$$

Dále na částici působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

kde  $\mathbf{v}$  je rychlost částice. Rychlost částice lze vyjádřit jako derivaci pozice částice

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Necht rovina, ve které se částice pohybuje, je rovinou  $xy$  naší soustavy souřadnic. Pak má vektor  $\mathbf{B}$  nenulovou složku pouze ve směru  $z$ , a platí tedy

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y B_z, -v_x B_z, 0),$$

kde  $v_y$  je  $y$ -vá složka vektoru  $\mathbf{v}$ , a obdobně to je pro ostatní složky a vektory. Zaveďme nyní  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  a označme velikost vektoru  $\mathbf{B}$  jako  $|\mathbf{B}| = B_z = B_0$ . Pak

$$\mathbf{F}_L = \left( qB_0 \frac{dy}{dt}, -qB_0 \frac{dx}{dt}, 0 \right).$$

Newtonův druhý zákon nám dá

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_L = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

V komponentu  $x$  je tato rovnice

$$-kx + qB_0 \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

a v komponentu  $y$  pak

$$-ky - qB_0 \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Pokud předpokládáme, že jak  $x$ , tak  $y$  s časem oscilují, lze psát

$$x = \alpha e^{i\omega t},$$

$$y = \beta e^{i\omega t}$$

a můžeme tedy provést Fourierovskou substituci pro  $x$

$$\frac{dx}{dt} = i\omega x,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

a obdobně pro  $y$ . Pohybové rovnice jsou tedy

$$-kx + i\omega q B_0 y = -m\omega^2 x,$$

$$-ky - i\omega q B_0 x = -m\omega^2 y.$$

Z první rovnice vyjádříme  $y$

$$i\omega q B_0 y = (k - m\omega^2) x.$$

Vydělením oscilačním faktorem, který je společný pro  $x$  i  $y$ , pak dostáváme

$$i\omega q B_0 \beta = (k - m\omega^2) \alpha,$$

$$\beta = \frac{k - m\omega^2}{i\omega q B_0} \alpha = -i \frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0} \alpha.$$

Získali jsme tedy poměr amplitud oscilací

$$\frac{\beta}{\alpha} = -i \frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0}.$$

Dosazením do druhé rovnice (a vydělením oscilačním faktorem) dostáváme

$$-k\beta - i\omega q B_0 \alpha = -m\omega^2 \beta,$$

$$-i\omega q B_0 \alpha = (k - m\omega^2) (-i) \frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0} \alpha.$$

Při vydělení  $\alpha$  můžeme získanou rovnicí řešit pro  $\omega$

$$\begin{aligned} -i\omega q B_0 &= -i \frac{(k - m\omega^2)^2}{\omega q B_0}, \\ q^2 B_0^2 \omega^2 &= (k - m\omega^2)^2, \\ \pm q B_0 \omega &= (k - m\omega^2). \end{aligned}$$

Vydělíme rovnicí  $m$  a zavedeme  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  a  $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ . Pak

$$\pm \omega_c \omega = \omega_0^2 - \omega^2.$$

Tuto rovnici řešíme jako kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} \omega^2 \pm \omega_c \omega - \omega_0^2 &= 0, \\ \omega &= \frac{\pm \omega_c \pm' \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \end{aligned}$$

kde  $\pm'$  je nezávislé na  $\pm$ . Aby byla frekvence kladné číslo, máme dvě možnosti; buď

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_0^2} - \frac{\omega_c}{2} = \sqrt{\frac{q^2 B_0^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} - \frac{qB_0}{2m}$$

nebo

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_0^2} + \frac{\omega_c}{2} = \sqrt{\frac{q^2 B_0^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} + \frac{qB_0}{2m}.$$

Nyní situaci zjednodušíme předpokladem ze zadání. Všimněme si, že z něj přímo plyne

$$\omega_c^2 \gg \omega_0^2.$$

Pro frekvence tedy platí

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} - \frac{\omega_c}{2} \approx \frac{\omega_c}{2} \left( 1 + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} \right) - \frac{\omega_c}{2}, \\ \omega_1 &= \frac{\omega_0^2}{\omega_c} = \frac{km}{mqB} = \frac{k}{qB_0}, \\ \omega_2 &= \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} + \frac{\omega_c}{2} \approx \frac{\omega_c}{2} \left( 1 + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} \right) + \frac{\omega_c}{2}. \end{aligned}$$

Do prvního nemulového řádu lze tento výraz přiblížit jednoduše jako

$$\omega_2 = \omega_c = \frac{qB_0}{m}.$$

Vidíme tedy, že frekvence  $\omega_1$  odpovídá pomalým oscilacím, zatímco frekvence  $\omega_2$  odpovídá spíše rychlejším oscilacím (rychlými oscilacemi myslíme ty s frekvencí okolo  $\omega_c \gg \omega_0$ ). Dosazením do vzorce pro poměr amplitud získáváme poměry amplitud  $\rho_1$  a  $\rho_2$

$$\rho_1 = \frac{\beta(\omega_1)}{\alpha(\omega_1)} = -i \frac{k - m \frac{k^2}{q^2 B_0^2}}{k} = -i \left( 1 - \frac{m^2 k}{q^2 B_0^2 m} \right).$$

Zde si můžeme všimnout, že druhý člen v závorce je zanedbatelný, a tím pádem dostaneme

$$\rho_1 = -i.$$

Pro druhou frekvenci je

$$\rho_2 = -i \frac{k - m \frac{q^2 B_0^2}{m^2}}{\frac{q^2 B_0^2}{m}} = -i \left( \frac{km^2}{mq^2 B_0^2} - 1 \right).$$

Opět, první člen v závorce je zanedbatelný, a platí tedy

$$\rho_2 = i.$$

Pro první typ kmitů jsou tedy rovnice oscilací

$$\begin{aligned} x &= Ae^{i\omega_1 t}, \\ y &= -iAe^{i\omega_1 t}, \end{aligned}$$

kde  $A$  je nějaká konstanta. Pokud zapíšeme  $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ , můžeme pro oscilace (tentokrát vezmeme opravdu reálnou část explicitně) psát

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_1 t), \\ y &= A \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega_1 t). \end{aligned}$$

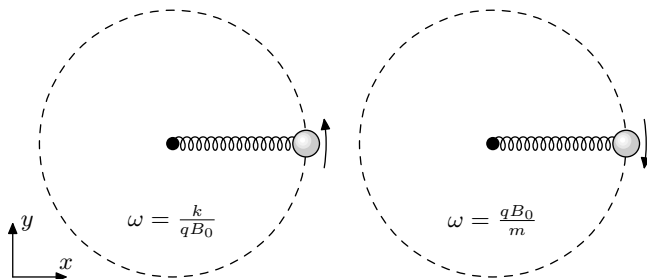
Toto je rovnice pro pohyb po kružnici o poloměru  $A$ . Směr pohybu je proti směru hodinových ručiček. Pro druhý typ kmitů máme obdobně

$$\begin{aligned} x &= Ae^{i\omega_2 t}, \\ y &= iAe^{i\omega_2 t}, \\ x &= A \cos(\omega_2 t), \\ y &= -A \sin(\omega_2 t) \end{aligned}$$

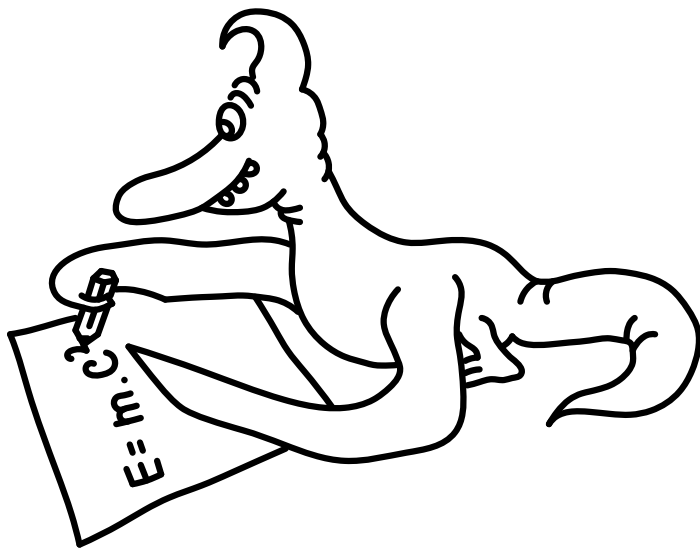
a pohyb probíhá po stejné kružnici, ale po směru hodinových ručiček. Můžeme si všimnout, že pomalejší kmitů (tedy kmitů s menší energií) odpovídají kmitům, které vytváří magnetický moment ve stejném směru jako pole  $\mathbf{B}$  (znázorněno vlevo na obrázku 10). Naopak druhý typ kmitů má opačný směr k poli  $\mathbf{B}$  a vyšší energii.

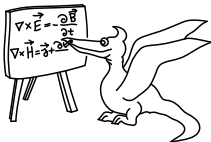
V dané aproximaci (v silném magnetickém poli) se tedy systém snaží minimalizovat energii vstupem do paramagnetického stavu. V reálných materiálech ovšem zprostředkovávají magnetismus elektrony, pro které je náboj záporný. To způsobí změnu znaménka v poměru amplitud, a tedy změnu směru oběhu částice – nižší stav energie je v diamagnetickém uspořádání.

*Štěpán Marek*  
stepan.marek@fykos.cz



Obr. 10: Načrtnutí oscilačního systému - částice obíhá po nebo proti směru hodinových ručiček. Magnetické pole ukazuje ven z papíru, tj. předpokládáme kladné  $B_0$ . Dále předpokládáme kladné  $q$ . Vyšší frekvence je frekvence oběhu po směru hodinových ručiček.





## Seriál: Symetrie a Lineární Algebra

V minulém díle jsme rozšířili náš matematický aparát, což nám umožnilo nahlédnout a popsat některé složitější systémy. Viděli jsme, že pokud osciluje více částic, nebo se částice pohybuje ve více rozměrech, objevuje se více typů možných oscilací. Pro každý rozměr, případně každou další částici, existuje příslušný počet rovnic, které nám umožní najít řešení. Obecně tento počet rozměrů problému nazýváme počet stupňů volnosti problému. Viděli jsme také, jak u oscilací můžeme určit relativní fázový rozdíl a poměr amplitud.

Nyní tyto poznatky převedeme do ještě silnější formy – místo toho, abychom řešili jednotlivé rovnice oscilací, budeme řešit všechny rovnice zároveň, s využitím formalismu lineární algebry. Tento formalismus si tedy musíme nejprve představit.

### Lineární algebra

Úkolem lineární algebry je obecně popis chování lineárních transformací vektorů. Rozeberme tedy jednotlivé pojmy v této větě.

Vektory jsou kolekce čísel, pro které definujeme některé základní operace. Většinou značíme vektory pomocí šipky či tlustého fontu, zde budeme používat  $\mathbf{v}$ . Komponenty vektoru značíme pomocí znaku pro vektor spolu s dolním indexem označujícím daný komponent, tedy první komponent vektoru  $\mathbf{u}$  by byl označen jako  $u_1$ . Někdy je vhodné použít pro index komponentu znak používaný k označení určité osy souřadnic, tedy v kartézské soustavě souřadnic můžeme mluvit o  $x$ -komponentu vektoru  $\mathbf{t}$ , který značíme jako  $t_x$ . V našem případě budou vektory sdružovat polohy jednotlivých částic ve všech možných rozměrech pohybu, tj. pokud budeme zkoumat systém tří částic, z nichž dvě se pohybují v rovině a jedna v celém prostoru, bude mít náš vektor 7 komponentů.

Pro vektory definujeme vektorový součet, který lze v jednotlivých komponentech zapsat jako

$$\mathbf{t} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \iff \forall n : t_n = u_n + v_n,$$

kde  $n$  vybíráme z možných indexů  $\mathbf{u}$ , které jsou shodné s možnými indexy  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{t}$ . Dále definujeme násobení skalárem

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} \iff \forall n : v_n = au_n.$$

Vektorové odčítání je pak interpretovatelné jako kombinace násobení skalárem a sčítání

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}.$$

Poslední důležitou operací, kterou pro vektory zde definujeme, je skalární součin. Pomocí něho převedeme dva vektory na jeden skalár. Pro vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  je definován jako

$$s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_n u_n v_n,$$

kde opět  $n$  jde přes všechny indexy  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Pokud je skalární součin dvou vektorů roven 0, pak říkáme, že vektory jsou navzájem *kolmé*.

Můžeme si všimnout, že provádění vektorových součtů bude v našem případě odpovídat superpozici dvou pohybů. Vidíme tedy, že zavedení vektorů přímo replikuje vlastnosti, které očekáváme od řešení lineárních diferenciálních rovnic, o nichž víme, že představují náš oscilující systém.

### Báze vektoru

Pokud si představíme vektor jako pozici v kartézských souřadnicích, je zřejmé, že ho můžeme rozložit na součet jiných vektorů, přičemž tyto vektory mohou být navzájem kolmé. Takovémuto rozkladu vektoru se říká *bázový rozklad*. V našem algebraickém pojetí vektorů bychom mohli například napsat

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2,$$

kde jsme definovali bázové vektory  $\mathbf{e}_1$  a  $\mathbf{e}_2$ . Kolmost bázových vektorů můžeme ověřit skalárním součinem, jelikož platí

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \iff \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Výběr báze ovšem není jedinečný - například, mohli bychom zvolit bázi

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kteřá stále obsahuje dva navzájem kolmé vektory a platí

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2.$$

Obecně je vhodné používat pro báze vektory, které mají jednotkovou délku, tj. které splňují

$$\forall n : \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = 1,$$

což třeba předchází příklad nespĺňuje.

Algebraicky lze rozklad do tzv. ortonormální báze (tj. báze skládající se z navzájem kolmých jednotkových vektorů) realizovat pomocí skalárních součinů, které udávají složku jednoho vektoru ve směru druhého vektoru. Při takovém výběru báze lze psát

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2.$$

Všimněme si, že takový rozklad do báze můžeme provést pro libovolné množství bázových vektorů. Nemusíme se tedy omezovat maximálně na 3 dimenze, jak jsme možná zvyklí z geometrické interpretace vektorů.

### Lineární transformace vektorů

Operace jako násobení skalárem či skalární součin jsou lineární operace, ale zdaleka nevyčerpávají všechny možnosti, kterými lze vektor lineárně změnit. Například, co kdybychom chtěli vytvořit vektor  $\mathbf{v}$  tak, že  $v_1 = u_2 + u_1$  a  $v_2 = 0$ , kde  $\mathbf{u}$  je jiný vektor? Definujme obecnou lineární transformaci  $T$  vektoru  $\mathbf{u}$  jako nový vektor  $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})$ , pro který platí

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}).$$

Uvažujme nyní nad tím, jak bychom mohli takovou transformaci rozložit na co nejmenší díly. Víme, že vektory můžeme rozdělit na jednotkové vektory přenásobené komponenty vektoru – tomuto říkáme báze rozklad vektoru. Například,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 .$$

Poté pro lineární transformaci  $T$  platí

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{e}_1) u_1 + T(\mathbf{e}_2) u_2 .$$

Jak bychom našli komponenty nového vektoru  $\mathbf{v}$ ? Musíme získat komponenty podél báze vektorů, tedy

$$v_1 = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) u_1 + \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_2) u_2 ,$$

$$v_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_1) u_1 + \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) u_2 ,$$

přičemž báze vektory  $\mathbf{e}$  a  $\mathbf{e}'$  mohou, ale nemusí být ze stejné báze. Vidíme tedy, že k určení transformovaného vektoru nám stačí znát komponenty originálního vektoru ( $u_1$  a  $u_2$ ) a série koeficientů, které můžeme označit jako

$$m_{11} = \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) , m_{12} = \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_2) , m_{21} = \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_1) , m_{22} = \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) .$$

Tyto koeficienty jsou *nezávislé* na konkrétním vektoru  $\mathbf{u}$ . Jsou pouze odrazem vlastností transformace  $T$  a zvolené báze (popřípadě zvolených bází). Tyto koeficienty můžeme uskupit do objektu, kterému říkáme matice.

### Maticová algebra

Pokud porovnáme naše výrazy pro komponenty matice  $m_{ij}$  a rozklad vektoru do báze, zjišťujeme, že matici lze vlastně také vnímat jako vektor skládající se z dalších vektorů. Transformaci vektoru  $\mathbf{u}$  pak můžeme vnímat jako aplikaci skalárního součinu mezi vektory obsaženými v matici a vektorem  $\mathbf{u}$ . Tento poznatek, mimo jiné, vedl k definici maticového součinu, který je základní operací maticové algebry. Abychom maticovému součinu porozuměli, představme si nejprve matici jako kolekci vektorů

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} .$$

Tato matice může působit na vektor  $\mathbf{u}$ , čímž získáme transformovaný vektor  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}u_1 + m_{12}u_2 \\ m_{21}u_1 + m_{22}u_2 \end{pmatrix} .$$

Obyčejně ovšem píšeme matici jako souhrn jednotlivých komponentů. V takovém případě je potřeba psát vektory horizontálně – význam tohoto zápisu zanedlouho poznáme. Pak tedy matice  $M$  je

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} .$$



Maticový součin pak lze definovat bez reference k vektorům tvořící matici. Komponent  $i$  vektoru  $\mathbf{v} = M\mathbf{u}$  totiž můžeme zapsat jako

$$v_i = (M\mathbf{u})_i = \sum_j M_{ij}u_j,$$

kde indexy  $j$  jdou přes všechny indexy vektoru  $\mathbf{u}$ . Zde můžeme poprvé vidět první důležitou podmínku maticového součinu – rozměr vektoru  $\mathbf{u}$  musí být stejný jako počet sloupců matice  $M$ .

Tato definice maticového součinu je velmi lehce zobecnitelná ze součinu matice a vektoru na součin dvou matic  $A = MB$  jako

$$A_{ij} = \sum_k M_{ik}B_{kj}.$$

Příklad maticového součinu je pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}.$$

Další důležitou operací s maticemi je tzv. transpozice, při které efektivně prohodíme řádky a sloupce matice. Transponovanou matici  $M$  značíme jako  $M^T$ . Uvádíme jednoduchý příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

V komponentech matice toto můžeme zapsat jako

$$(M_{ij})^T = (M_{ji}).$$

Speciálně pro vektory platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Správně bychom tedy původní rovnici pro násobení vektoru  $\mathbf{u}$  maticí  $M$  měli psát jako

$$M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Můžeme si všimnout, že skalární součin dvou vektorů lze zapsat jako maticový součin, kde jeden z vektorů je transponovaný, tedy

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

Dále, matice lze po komponentech sčítat a násobit skaláry, obdobně jako vektory

$$\begin{aligned} A = B + M &\iff A_{ij} = B_{ij} + M_{ij}, \\ sA &\iff (sA)_{ij} = sA_{ij}. \end{aligned}$$

Toto jsou základy maticové algebry. My je použijeme k řešení rovnic, které složitějším způsobem kombinují různé stupně volnosti. Ke kompletnímu řešení se nám bude hodit ještě jedna část lineární algebry, kterou je koncept vlastních vektorů a vlastních čísel.

## Vlastní vektory a vlastní čísla

Pro čtvercové matice platí, že transformují vektory do nových vektorů, které mají stejný počet komponentů. Je tedy možné, že existuje takový vektor, který zůstává transformací nezměněný, až na určitý skalární násobek. Takovému vektoru se říká vlastní vektor dané matice a příslušnému skalárnímu násobku říkáme vlastní číslo matice pro daný vlastní vektor. Tyto veličiny jsou důležitou vlastností matice. Vlastní vektor  $\mathbf{v}$  matice  $M$  můžeme definovat rovnicí

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

kde  $\lambda$  je příslušné vlastní číslo. Čtvercová matice o rozměru  $n$  může mít až  $n$  různých vlastních vektorů, každý s příslušným vlastním číslem. Jak tyto vlastní vektory odvodit? Buď můžeme vlastní vektor uhádnout na základě vlastností systému, jako je symetrie (viz níže), nebo lze vektor spočítat na základě rovnice

$$(M - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

kde  $I$  je tzv. jednotková matice – čtvercová matice, u které jsou nenulové pouze diagonální prvky, které jsou obsazeny jedničkami. Lze se snadno přesvědčit, že jakýkoliv validní maticový součin vektoru (nebo čtvercové matice) s jednotkovou maticí nezmění původní vektor (nebo matici). Výše zmíněná rovnice má buďto triviální řešení, kdy všechny komponenty  $\mathbf{v}$  jsou rovny nule, nebo matice  $M - \lambda I$  obsahuje ve svých řádcích vektory, které se smíchají dohromady tak, že vytvoří nulu v každém řádku  $\mathbf{v}$ . To ale znamená, že tyto vektory v řádcích jsou nutně lineárně závislé, tj. alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Důležitým výsledkem z teorie lineárních rovnic je, že v tomto případě se veličina, kterou nazýváme determinant matice, rovná nule.

Determinant lze určit pro libovolnou čtvercovou matici, my budeme ovšem zejména potřebovat chování pro  $2 \times 2$  matice. Pro ty se determinant spočítá následovně

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = ad - bc,$$

kde  $|M|$  značí determinant matice  $M$  (nikoli nějakou absolutní hodnotu). Dále nás zajímá determinant diagonální matice, který je určen jednoduše součinem všech diagonálních prvků. Pokud se větší matice skládá z více navzájem oddělených bloků ležících na diagonále, lze determinant určit jako součin determinantů jednotlivých bloků. Například

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = ef(ad - bc),$$

přičemž determinant matice  $1 \times 1$  je prostě jediný komponent dané matice.

Pojďme si ukázat příklad výpočtu vlastního vektoru a vlastního čísla. Uvažujte matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abychom našli vlastní čísla, vyřešíme rovnici

$$0 = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4.$$

Výsledkem je  $\lambda = 1 \pm 2$ , neboli  $\lambda \in \{3, -1\}$ . Se znalostí  $\lambda$  již můžeme vyřešit rovnice pro vlastní vektor. Zvolme  $\lambda = -1$ , potom dostaneme

$$(M - \lambda I) \mathbf{v} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 2 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení je v tomto jednoduchém případě nasnadě – platí  $v_1 = -v_2$ , a vlastní vektor je například

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Říkáme například, protože vektor můžeme libovolně násobit skaláry, a bude se při transformaci maticí  $M$  chovat stejně. Důležitý je tedy poměr jednotlivých komponentů vlastních vektorů, nikoliv jejich absolutní velikost.

Jako poznámka – mohlo by nás zajímat, proč jsme zkrátka neřešili jednotlivé řádky v rovnici  $(M - \lambda I) \mathbf{v} = 0$ ? Problémem je, že v dané soustavě  $n$  rovnic máme  $n + 1$  neznámých –  $n$  komponentů vektoru  $\mathbf{v}$ , a vlastní číslo  $\lambda$ . Ukáže se, že kdybychom tyto rovnice řešili, tak v posledním kroku vydělíme hodnotou nenulového komponentu na obou stranách rovnice, čímž budeme moci získat vzájemné poměry všech komponentů a vlastní číslo. Je ale mnohdy snazší snažit se získat determinant matice, jelikož z něho rovnou získáme vlastní číslo, které má samo o sobě určitý význam. Fakt, že stále máme  $n + 1$  neznámých na  $n$  rovnic se projeví v tom, že vlastní vektory můžeme volně násobit skaláry.

## Normální mody

Dostí bylo obskurní matematiky, pojďme se věnovat fyzice. Na následujících dvou příkladech se pokusím ilustrovat užitečnost výše zmíněných nástrojů – budeme schopni přesně popsat kmitání netriviálních oscilátorů. V tomto případě jsem si vybral zaprvé dvě závaží, která jsou navzájem spojená pružinou a kmitají pouze ve vertikálním směru, za druhé pak dvě částice, které jsou spojené jednou pružinou a zároveň je každá zvlášť uchycena ke stěnám, mezi nimiž je mezera.

### Dvě závaží od stropu

Uvažujme následující systém: první pružina s tuhostí  $k$  je přichycená k pevnému stropu na jednom konci a k závaží o hmotnosti  $m$  na druhém konci. Druhá pružina, také o tuhosti  $k$ , je připevněná k prvnímu závaží na jednom konci a k druhému závaží o stejné hmotnosti  $m$  na druhém konci. Rovnovážná poloha systému (kdy systém neosciluje) nastane ve chvíli, kdy gravitační síly vybalancují napětí v pružinách. Touto rovnovážnou polohou se nyní nebudeme zabývat, na její výpočet stačí použít známé poznatky ze statiky. Uvažujme tedy malé výchylky z této rovnovážné polohy. Výchylku prvního závaží označme jako  $x_1$ , výchylku druhého závaží jako  $x_2$ . Předpokládáme, že obě výchylky oscilují, a lze je tedy zapsat jako

$$x_1(t) = \operatorname{Re} (Ae^{i\omega t}),$$

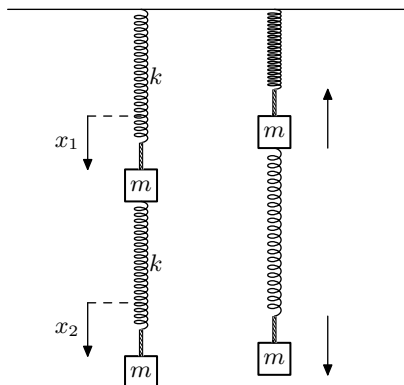
$$x_2(t) = \operatorname{Re} (Be^{i\omega t}).$$

Případný fázový rozdíl mezi oscilacemi můžeme vyjádřit jako součást konstanty  $B$ , pro kterou můžeme psát

$$B = |B| e^{i\varphi},$$

kde  $\varphi$  je fázový rozdíl. Tedy

$$x_2(t) = \operatorname{Re}(|B| e^{i(\omega t + \varphi)}).$$



Obr. 11: Nalevo je znázorněna geometrie problému a zobrazena definice  $x_1$  a  $x_2$ . Napravo je znázorněn jeden okamžik během kmitání jednoho normálního modu. Šipky naznačují směr pohybu.

První pružina je tedy prodloužená oproti rovnovážné poloze o délku  $x_1$ , zatímco druhá pružina je prodloužená o  $x_2 - x_1$ . V druhé pružině je síla

$$F_2 = -k(x_2 - x_1).$$

V první pružině je síla

$$F_1 = -kx_1 - F_2,$$

jelikož síla z druhé pružiny se přenáší na první pružinu. Dle druhého Newtonova zákona v diferenciální formě tedy můžeme psát

$$F_1 = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$F_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1).$$

Provedením fourierovské substituce dostáváme

$$-m\omega^2 x_1 = -2kx_1 + kx_2,$$

$$-m\omega^2 x_2 = kx_1 - kx_2.$$

Tuto rovnici lze přepsat do maticové rovnice – snažíme se najít oscilace v  $x_1$  a v  $x_2$ , které jsou nezávislé, takže je vlastně lze vnímat jako různé dimenze oscilací. Konkrétně, definujme vektor  $\mathbf{x}$  jako

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\omega^2 M \mathbf{x} = K \mathbf{x},$$

kde  $K$  je matice

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix},$$

a  $M$  je matice

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

přičemž jsme obě strany obou původních rovnic vynásobili  $-1$ . Naše soustava rovnic je tedy vyjádřena jednou maticovou rovnicí

$$\omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Z toho můžeme odvodit

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$(K - \omega^2 M) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Tato rovnice je obdobou té, kterou jsme řešili při hledání vlastních čísel matice. Opět, je potřeba zjistit, kdy je determinant matice roven nule, tedy  $|K - \omega^2 M| = 0$ . Determinant této matice je

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0,$$

takže

$$\begin{aligned} 2k^2 - 2km\omega^2 - km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 &= 0, \\ m^2\omega^4 - 3mk\omega^2 + k^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vydělením  $m^2$  a zavedením  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  dostáváme

$$\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0.$$

Vyřešíme bikvadratickou rovnici jako kvadratickou rovnici, ale pro  $\omega^2$ . Jejím řešením je

$$\omega^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2}.$$

Máme tedy dvě možné frekvence oscilací

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

Jaký bude poměr amplitud oscilací, popřípadě fázový rozdíl? K tomu musíme najít kromě vlastních čísel také vlastní vektory matice  $M$ . První řádek matice v naší maticové rovnici udává

$$m\omega^2 x_1 = 2kx_1 - kx_2.$$

Nyní už známe hodnotu  $\omega^2$ , kterou můžeme dosadit. Dostáváme tedy

$$m\omega_0^2 \left( \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) x_1 = 2kx_1 - kx_2,$$

$$\omega_0^2 \left( \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) x_1 = 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2,$$

Můžeme vydělit  $\omega_0^2$  a zároveň také vydělit faktorem  $e^{i\omega t}$ , který je obsažen jak v  $x_1$ , tak v  $x_2$ , takže dostaneme

$$\left( \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) A = 2A - B,$$

$$\left( -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) A = -B,$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Poměr oscilací je tedy různý pro různé frekvence. Pro vyšší frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

osciluje systém tak, že poměr amplitudy druhého závaží ku prvnímu závaží je

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Tento poměr je menší než nula, což znamená, že v každý moment oscilace se závaží pohybují opačným směrem. Nižší frekvence oscilací

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

odpovídá situaci, kdy poměr amplitud je

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a závaží oscilují ve stejném směru. V jazyku fázových rozdílů jsme mohli psát

$$-1 = e^{i\pi}$$

a tedy usoudit, že v prvním případě jsou kmity prvního a druhého závaží v perfektní antifázi – výsledek, ke kterému jsme dospěli i bez této úvahy.

Uvědomme si, co jsme vlastně nyní dokázali. Zjistili jsme, že pro systém **dvou** částic existují **dvě** speciální frekvence, při kterých jsou dynamické rovnice splněny. Tyto frekvence odpovídají dvěma různým typům oscilací, které jsou charakterizované komponenty  $A$  a  $B$  určitého vektoru. Těmto typům oscilací říkáme normální módy.

Mohli byste namítnout, že sice jsme popsali velmi specifický případ, kdy obě polohy oscilují, ale že zajisté lze vymyslet pohyb závaží, který je výrazně složitější. Klíčem k síle normálních módů je zde linearita našich dynamických rovnic. Zjišťujeme totiž, že pokud najdeme dva vektory, které splňují dynamické rovnice (jako jsme našli my), pak i jakákoliv jejich lineární kombinace splňuje dynamické rovnice. Matematicky řečeno, jestliže máme  $\mathbf{A}_1$  takové, že

$$\omega^2 M \mathbf{A}_1 = K \mathbf{A}_1,$$

a jiné  $\mathbf{A}_2$ , které splňuje

$$\omega^2 M \mathbf{A}_2 = K \mathbf{A}_2,$$

pak pro libovolné skaláry  $a$  a  $b$  platí

$$\omega^2 M (a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2) = K (a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2),$$

a tedy i vektor  $a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2$  je řešením dynamických rovnic. Kromě dvou speciálních případů oscilací jsme tedy odhalili i nekonečné množství pohybů systému, které lze interpretovat jako *superpozici* pohybu dvou normálních módů. Právě kvůli této vlastnosti se lineární systémy popisují tak jednoduše – pro popsání velkého množství možných jevů nám stačí určení pouze několika základních parametrů.

## Elementární struna

Uvažujme nyní druhý příklad. Mějme dvě částice o shodné hmotnosti  $m$ . První je ukotvená ke zdi, která prochází počátkem souřadnic, pružinou o tuhosti  $k$ . Druhá je přichycená pružinou o stejné tuhosti ke zdi rovnoběžně s první zdí a procházející bodem  $\mathbf{R}$ , přičemž  $\mathbf{R}$  je vektor kolmý na roviny zdí. Nakonec jsou částice navzájem spojeny ještě jednou pružinou o tuhosti  $k$ . Částice se mohou volně pohybovat v rovině kolmé na tyto dvě zdi.

Řešení tohoto příkladu uvádíme pouze zrychleně, abyste si mohli procvičit výpočet některých konkrétních veličin. Začneme nalezením rovnovážné polohy. Nechť je souřadnice první částice dána vektorem  $\mathbf{r}_1$  a poloha druhé částice nechť je dána vektorem  $\mathbf{r}_2$ . Na první částici působí síla

$$\mathbf{F}_1 = -k \mathbf{r}_1 + k (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Na druhou částici působí síla

$$\mathbf{F}_2 = -k (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}) + k (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

V rovnováze budou síly nulové, což vede k

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{R},$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{2}{3} \mathbf{R}.$$

Označme tyto pozice jako  $\mathbf{r}_{1,0}$  a  $\mathbf{r}_{2,0}$ . Malé výchylky z těchto pozic označíme jako  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$ , takže platí  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,0} + \mathbf{x}_1$ , obdobně pro druhou částici. Zjistíme, že při těchto malých výchylkách budou výslednice sil rovny

$$\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{x}_1 + k(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

pro první částici a

$$\mathbf{F}_2 = -k\mathbf{x}_2 + k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

pro druhou částici. Z druhého Newtonova zákona víme

$$\mathbf{F}_1 = m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2},$$

$$\mathbf{F}_2 = m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}.$$

Jelikož  $\mathbf{r}_{1,0}$  a  $\mathbf{r}_{2,0}$  jsou konstantní vektory, platí

$$\mathbf{F}_1 = m \frac{d^2 \mathbf{x}_1}{dt^2},$$

$$\mathbf{F}_2 = m \frac{d^2 \mathbf{x}_2}{dt^2}.$$

Opět budeme předpokládat, že systém osciluje. Z fourierovské substituce odvodíme  $\mathbf{F}_1 = -m\omega^2 \mathbf{r}_1$ , obdobně pro druhou rovnici. V maticové formě můžeme tyto rovnice zapsat jako

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & 0 & k & 0 \\ 0 & m\omega^2 - 2k & 0 & k \\ k & 0 & m\omega^2 - 2k & 0 \\ 0 & k & 0 & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $x_{11}$  je první komponent vektoru  $\mathbf{x}_1$  atd. Determinant této matice nemůžeme ihned najít, jelikož se nejedná o diagonální matici. Ale můžeme si všimnout, že se mezi sebou vážou pouze komponenty s indexem 1, resp. 2. Pokud tyto komponenty dáme dohromady v našem vektoru, což determinant matice nezmění, dostaneme následující rovnici

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Tato matice se již skládá z dvou matic na diagonále, a umíme tedy určit její determinant, tj.

$$D = \begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix}^2 = \left( (m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 \right)^2.$$



Položíme  $D = 0$ , a dostáváme

$$\begin{aligned}k^2 &= (m\omega^2 - 2k)^2, \\k &= \pm (m\omega^2 - 2k), \\(2 \pm 1)k &= m\omega^2.\end{aligned}$$

Zavedeme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

což vede k

$$\omega = \sqrt{2} \pm 1\omega_0.$$

Získali jsme tedy pouze dvě frekvence, ačkoliv počet normálních módů bude 4. To znamená, že některé módy mají shodné frekvence. Dosazením do původní rovnice získáme vztah pro vlastní vektory. Začneme s  $\omega = \omega_0$ . Pak

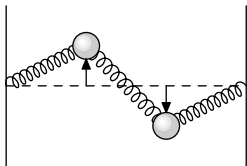
$$\begin{pmatrix} m\frac{k}{m} - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\frac{k}{m} - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{k}{m} - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\frac{k}{m} - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opět narážíme na fakt, že dva bloky matice jsou nezávislé. Takže první dva komponenty našeho vlastního vektoru vůbec nemíchají zbývající dva komponenty, a naopak. Lze tedy určit dva vlastní vektory z této jedné frekvence (jak jsme očekávali), které mají hodnoty například

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro  $\omega = \sqrt{3}\omega_0$  lze poté určit, že vlastní vektory budou

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 12: Naznačený směr pohybu částic při kmitání v jednom normálním modu.

## Vliv symetrie

Mnoho problémů oscilací obsahuje určité symetrie. Například, v předchozím problému jsme mohli bez problému prohodit souřadnice používané pro popis první a druhé částice – dostali bychom přesně stejnou sadu dynamických rovnic. Systém byl tedy tzv. symetrický při výměně částic.

Takovouto symetrii můžeme definovat i pomocí matice – efektivně hledáme matici  $S$ , pro kterou platí (pro popis druhého příkladu)

$$S \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{11} \\ x_{22} \\ x_{12} \end{pmatrix},$$

což znázorňuje prohození označení částic. Určení takovéto matice je poměrně jednoduché – každý komponent nového vektoru určíme jedním komponentem z originálního vektoru, který musí matice  $S$  vybrat. Platí

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tušíme, že výsledné mody systému budou tuto symetrii nějakým způsobem respektovat. Ukazuje se, že platí velmi obecné pravidlo. Pokud oscilující systém splňuje určitou symetrii, pak vlastní vektory těchto oscilací jsou alespoň zčásti dány vlastními vektory matice, která popisuje tuto symetrii. Důkaz tohoto pravidla je poměrně složitý a nebudeme se jím zde přímo zabývat. Pro ty zvědavější z vás, symetrii systému lze rigorózněji definovat jako invarianci Hamiltoniánu systému při aplikování dané symetrie. Můžete se také zamyslet, jaké má toto tvrzení důsledky v kontextu teorému Noetherové, pokud ho znáte. K řešení problémů v tomto seriálu tento přesah však není potřeba.

Co však potřeba bude, je schopnost určit matice aplikující danou symetrii (zejména permutace částic) a najít pro tyto matice vlastní vektory. Můžeme zkontrolovat, že vlastní vektory nalezené v předchozím příkladě skutečně jsou vlastními vektory matice  $S$ , s vlastními čísly  $\pm 1$ . Mody jsou tedy symetrické nebo antisymetrické při výměně částic.

Výhoda hledání vlastních vektorů v maticích symetrie spočívá v tom, že tyto matice jsou zpravidla jednodušší než dynamická matice, která řídí oscilace. Poté, co najdeme vlastní vektory matice symetrie, můžeme získat vlastní čísla jednoduchým dosazením vlastního vektoru do dynamické rovnice.

## Neúplné symetrie

Může se stát, že systém má určitou symetrii, avšak tato symetrie nedeterminuje celé chování systému. Například, uvažujte míček, který se pohybuje údolím, které by vzniklo protažením paraboly ležící v rovině  $xy$  (danou třeba vzorcem  $y = x^2$ ) do směru  $z$  – rovnice povrchu by stále byla  $y = x^2$ , nezávislá na  $z$ . Zřejmě platí symetrie zrcadlení přes rovinu  $yz$ , tedy

symetrie  $x \rightarrow -x$ . Pokud bychom oscilace charakterizovali třemi souřadnicemi míčku  $\mathbf{r} = (x \ y \ z)$ , operace symetrie by byla

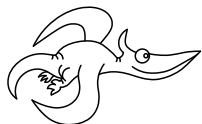
$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že blok spodních dvou řádků a pravých dvou sloupců matice představují vlastně jednotkovou matici v komponentech  $y$  a  $z$ . To znamená, že symetrie definovaná maticí  $S$  neklade žádné nároky na komponenty  $y$  a  $z$ , tyto složky mohou být cokoliv (neboli působením  $S$  na  $\mathbf{r}$  se tyto komponenty nikdy nezmění). To znamená, že tato symetrie by nám mohla pomoci zbavit se maximálně jednoho stupně volnosti. Můžeme ji tedy použít k nalezení pouze jednoho vlastního vektoru. Nicméně, jelikož víme, že vlastní vektory jsou navzájem kolmé, můžeme zkusit uhádnout ostatní vlastní vektory oscilací, a stačí nám už určit menší počet neznámých.

Při dosazování vlastních vektorů symetrie do vlastních vektorů kmitů musíme na neúplné symetrie dávat pozor - pokud daný komponent není symetrií nijak omezen, musíme za něj dosadit obecné číslo. To, že symetrie daný komponent neomezuje, totiž ještě neznamená, že není omezen dynamikou systému a symetrií samotné dynamiky. Například, zákon zachování hybnosti může klást nároky na komponent, který jinak není omezen symetrií kvůli záměně částic.

### *Nekonečno oscilátorů*

Už víme, jak řešit soustavy obsahující určitý počet oscilátorů. Co když ale oscilátorů bude efektivně nekonečno? V takovém případě můžeme někdy přejít k popisu systému pomocí kontinuálních veličin a začínáme popisovat fenomén vlnění. Některými základními vlastnostmi vln, jako jsou disperzní vztahy či superpozice, se budeme zabývat v příštím díle.



## Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		6	6	6	6	9	11	12	10	66	100	18	198
1. Lukáš Linhart	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	6	6	3	6	2	4	12	2	41	79	13	148
2. Vojtěch Kadeřábek	G Mensa, Praha	6	6	5	2	6	–	–	–	25	68	9	105
3. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	4	2	–	1	2	–	7	–	16	60	7	82
4. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	4	52
5. David Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	6	2	–	3	–	–	4	–	15	59	4	47
6. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	6	2	4	–	2	–	–	–	14	70	4	45
7. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	2	–	–	–	–	–	–	8	57	3	39
8. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	6	–	1	–	–	–	–	9	53	3	32
9. Sandeep Kandi	IMSA, Aurora, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	2	27
10. Lukáš Jarábek	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39	2	23
11. Vítězslav Lamoš	G, Omská, Praha	–	2	–	–	–	–	–	–	2	57	2	21
12. Boris Pasterňak	Leaf Academy	6	–	–	–	–	–	–	–	6	86	1	19
13. Kristián Matuš	G, Nový Jičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	1	15
14. Samuel Ševčík	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	1	13
15.–16. Jakub Ebringer	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	1	10
15.–16. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	37	1	10
17. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	0	8
18. Krishna Kumar Sah	Awasiya Public School	–	6	–	–	1	–	–	–	7	47	0	7
19. Isuru Liyanawaduge	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6
20. Patrik Pecina	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	31	0	5
21. Václav Vinkler	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17	0	3

## Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		6	6	6	6	9	11	12	10	66	100	18	198
1. David Bálek	G Legionářů, Příbram	6	6	6	4	6	–	–	7	35	85	11	120
2. Pavel Provazník	G Dašická, Pardubice	6	4	4	6	7	0	2	–	29	65	10	115
3. Jonáš Dej	Wichterlovo G, Ostrava	6	6	4	6	2	–	3	6	33	75	10	114
4.–5. Barbora Čemanová	G, Park mládeže, Košice	6	2	–	4	–	–	12	1	25	74	9	99
4.–5. Jan Lepič	G, Strakonice	6	2	5	6	1	0	9	–	29	56	9	99
6. Jakub Hadač	G V. Hlavatého, Louny	6	2	5	5	–	–	8	–	26	70	8	94
7. Martin Kysela	G, Český Krumlov	6	6	4	5	2	–	8	–	31	63	8	93
8. Alexander Stoyanov	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	6	6	6	1	2	3	7	0	31	42	7	84
9. Vojtěch Juza	G, Litomyšl	6	2	4	3	2	–	6	–	23	57	6	74
10. Lukáš Létal	G J. Škody, Přerov	6	2	–	–	–	3	9	–	20	58	6	67
11. Miruna Neacsu	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	6	6	–	4	2	–	4	–	22	51	6	65
12. Tomáš Patsch	Slovanské G, Olomouc	6	2	5	–	–	–	–	–	13	84	5	59
13. Daniela karpíšková	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	5	56

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>III</b>	<b>„%“</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
		<b>6</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>66</b>	<b>100</b>	<b>18</b>	<b>198</b>
<b>14.</b> <i>Evan Kim</i>	Tesla STEM High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	5	<b>54</b>
<b>15.–16.</b> <i>Vít Brázda</i>	G Dašická, Pardubice	6	6	–	–	1	–	–	–	<b>13</b>	80	4	<b>53</b>
<b>15.–16.</b> <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	2	2	1	1	1	2	5	–	<b>14</b>	32	4	<b>53</b>
<b>17.</b> <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	4	<b>51</b>
<b>18.</b> <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	6	2	1	4	–	–	–	–	<b>13</b>	74	4	<b>48</b>
<b>19.</b> <i>Vojtěch Kysilka</i>	G, Roudnice nad Labem	6	2	–	4	1	1	–	–	<b>14</b>	51	4	<b>43</b>
<b>20.</b> <i>Karolína Šedová</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	–	–	–	–	–	–	<b>12</b>	91	3	<b>41</b>
<b>21.</b> <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	4	2	–	3	–	–	–	–	<b>9</b>	54	3	<b>40</b>
<b>22.</b> <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	6	6	–	–	2	–	–	–	<b>14</b>	73	3	<b>37</b>
<b>23.</b> <i>Ioana Milea</i>	CN Mihai Eminescu, Romania	6	2	4	4	–	3	11	5	<b>35</b>	61	3	<b>35</b>
<b>24.</b> <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	3	<b>32</b>
<b>25.</b> <i>Ivy Qin</i>	RC Palmer Sec. Sc.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	2	<b>28</b>
<b>26.–27.</b> <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	6	2	–	1	–	–	–	–	<b>9</b>	65	2	<b>26</b>
<b>26.–27.</b> <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	2	<b>26</b>
<b>28.</b> <i>Jakub Genčur</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	96	2	<b>22</b>
<b>29.</b> <i>Jiří Mládek</i>	G, Soběslav	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	1	<b>18</b>
<b>30.</b> <i>Ashmit Dutta</i>	Wayzata High School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	1	<b>16</b>
<b>31.</b> <i>Jan Cícha</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	6	2	–	1	–	–	–	–	<b>9</b>	42	1	<b>15</b>
<b>32.</b> <i>Pragun Pudukoli</i>	Sishu Griha HS, India	6	2	–	–	–	–	–	–	<b>8</b>	58	1	<b>14</b>
<b>33.</b> <i>Dominik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	2	–	–	–	–	–	–	<b>2</b>	50	1	<b>12</b>
<b>34.</b> <i>Petr Vitko</i>	G Teplice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	37	1	<b>10</b>
<b>35.</b> <i>Barbora Peřinová</i>	Česká zemědělská akademie Humpol	–	–	–	–	–	–	–	–	–	31	0	<b>9</b>
<b>36.</b> <i>Jakub Koňárek</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	0	<b>8</b>
<b>37.</b> <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	<b>6</b>
<b>38.</b> <i>Damián Tancoš</i>	G, Kukučínova, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	14	0	<b>5</b>
<b>39.</b> <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	0	<b>4</b>
<b>40.</b> <i>Timotej Marhefka</i>	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0	<b>2</b>

## Kategorie třetích ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>III</b>	<b>„%“</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
		<b>3</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>100</b>	<b>16</b>	<b>180</b>
<b>1.</b> <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	3	3	5	6	9	7	13	6	<b>52</b>	91	15	<b>164</b>
<b>2.</b> <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	3	3	5	6	–	–	–	9	<b>26</b>	94	12	<b>130</b>
<b>3.</b> <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	5	6	6	6	–	3	<b>32</b>	79	10	<b>114</b>
<b>4.</b> <i>Yahya Numan INCIR-KUS</i>	Yasar Acar High School	3	3	5	3	5	3	7	–	<b>29</b>	65	10	<b>110</b>
<b>5.</b> <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	3	3	5	5	–	5	11	–	<b>32</b>	70	9	<b>101</b>
<b>6.</b> <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	3	3	–	2	1	0	8	0	<b>17</b>	55	8	<b>95</b>
<b>7.–8.</b> <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	3	1	5	3	–	–	–	4	<b>16</b>	81	7	<b>83</b>
<b>7.–8.</b> <i>Nikita Ustínov</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	6	5	1	–	–	6	<b>24</b>	73	7	<b>83</b>
<b>9.</b> <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	3	1	–	2	2	3	9	–	<b>20</b>	50	7	<b>75</b>
<b>10.</b> <i>Elena Chocholaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	3	2	–	5	–	–	–	–	<b>10</b>	75	6	<b>70</b>
<b>11.</b> <i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	1	2	0	4	1	2	8	–	<b>18</b>	47	6	<b>69</b>
<b>12.</b> <i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	5	<b>62</b>
<b>13.</b> <i>Daniël Skýpala</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	3	–	6	–	–	–	–	<b>12</b>	74	5	<b>58</b>
<b>14.</b> <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	3	1	5	4	–	5	–	–	<b>18</b>	72	5	<b>56</b>
<b>15.–16.</b> <i>Jan Bajer</i>	G, Jihlava	3	1	1	1	1	1	7	0	<b>15</b>	30	5	<b>54</b>
<b>15.–16.</b> <i>Pavlána Zavřelová</i>	Biskupské G, Brno	2	3	–	4	–	–	–	–	<b>9</b>	64	5	<b>54</b>
<b>17.–18.</b> <i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	3	2	–	4	–	7	–	–	<b>16</b>	73	4	<b>52</b>

<b>jméno</b> <i>Student Pílný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>III</b>	<b>„%“</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
		<b>3</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>100</b>	<b>16</b>	<b>180</b>
<b>17.–18.</b> <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	3	3	–	1	–	–	–	–	<b>7</b>	<i>69</i>	<i>4</i>	<b>52</b>
<b>19.</b> <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Lito- měrice	3	1	–	4	–	2	–	–	<b>10</b>	<i>52</i>	<i>4</i>	<b>50</b>
<b>20.</b> <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	3	–	2	–	–	–	–	<b>5</b>	<i>63</i>	<i>4</i>	<b>49</b>
<b>21.</b> <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	3	3	–	1	1	–	–	–	<b>8</b>	<i>49</i>	<i>4</i>	<b>45</b>
<b>22.</b> <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	3	1	–	1	1	–	3	–	<b>9</b>	<i>39</i>	<i>4</i>	<b>44</b>
<b>23.</b> <i>Adam Hášta</i>	European School Luxem- bourg II	3	2	–	–	–	–	–	–	<b>5</b>	<i>66</i>	<i>3</i>	<b>41</b>
<b>24.</b> <i>Lukáš Fidler</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	–	3	2	–	–	–	<b>11</b>	<i>69</i>	<i>3</i>	<b>40</b>
<b>25.</b> <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	3	1	5	1	–	–	–	–	<b>10</b>	<i>75</i>	<i>3</i>	<b>39</b>
<b>26.</b> <i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tá- bor	3	1	–	5	–	–	–	–	<b>9</b>	<i>76</i>	<i>3</i>	<b>37</b>
<b>27.</b> <i>Aleksandar Rusev</i>	First Language school, Bulgaria	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>72</i>	<i>3</i>	<b>34</b>
<b>28.–29.</b> <i>Matej Korž</i>	G J. A. Raymana, Prešov	3	1	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<i>72</i>	<i>3</i>	<b>33</b>
<b>28.–29.</b> <i>Aneta Píková</i>	G, Strakonice	3	1	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<i>43</i>	<i>3</i>	<b>33</b>
<b>30.–31.</b> <i>Wiktoria Macura</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	2	–	–	–	–	–	8	–	<b>10</b>	<i>65</i>	<i>2</i>	<b>31</b>
<b>30.–31.</b> <i>Jáchym Mraček</i>	Akademická G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>52</i>	<i>2</i>	<b>31</b>
<b>32.–33.</b> <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	3	1	–	1	–	–	–	–	<b>5</b>	<i>55</i>	<i>2</i>	<b>28</b>
<b>32.–33.</b> <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězný pláni, Pra- ha	1	1	2	6	2	–	–	–	<b>12</b>	<i>44</i>	<i>2</i>	<b>28</b>
<b>34.–35.</b> <i>Dávid Brodňanský</i>	G J. A. Raymana, Prešov	3	1	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<i>79</i>	<i>2</i>	<b>26</b>
<b>34.–35.</b> <i>Matouš Hofmeister</i>	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>62</i>	<i>2</i>	<b>26</b>
<b>36.–37.</b> <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	1	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<i>58</i>	<i>2</i>	<b>25</b>
<b>36.–37.</b> <i>Anička Chu Ngoc</i>	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>49</i>	<i>2</i>	<b>25</b>
<b>38.–39.</b> <i>Lubomír Břoušek</i>	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>60</i>	<i>2</i>	<b>24</b>
<b>38.–39.</b> <i>Eliška Malá</i>	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>42</i>	<i>2</i>	<b>24</b>
<b>40.–41.</b> <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystri- ca	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>43</i>	<i>2</i>	<b>23</b>
<b>40.–41.</b> <i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budě- jovice	1	1	–	3	–	–	–	–	<b>5</b>	<i>49</i>	<i>2</i>	<b>23</b>
<b>42.</b> <i>Jevhenij Vorochta</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	1	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<i>43</i>	<i>2</i>	<b>21</b>
<b>43.</b> <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>83</i>	<i>1</i>	<b>20</b>
<b>44.–45.</b> <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>66</i>	<i>1</i>	<b>19</b>
<b>44.–45.</b> <i>Matúš Jakubec</i>	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>79</i>	<i>1</i>	<b>19</b>
<b>46.</b> <i>Martin Polák</i>	G Masaryk.nám.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>34</i>	<i>1</i>	<b>18</b>
<b>47.</b> <i>Tereza Skořepová</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>18</i>	<i>1</i>	<b>15</b>
<b>48.</b> <i>Bishoy Roushdy</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>25</i>	<i>1</i>	<b>14</b>
<b>49.</b> <i>Ondrej Korbel</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>81</i>	<i>1</i>	<b>13</b>
<b>50.</b> <i>Michaela Šídová</i>	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>57</i>	<i>1</i>	<b>12</b>
<b>51.</b> <i>Eliška Věnečková</i>	G J. Vrchlického, Klato- vy	3	1	–	2	–	–	–	–	<b>6</b>	<i>41</i>	<i>1</i>	<b>11</b>
<b>52.</b> <i>Michal Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>63</i>	<i>1</i>	<b>10</b>
<b>53.–54.</b> <i>Štěpán Kozák</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>50</i>	<i>0</i>	<b>8</b>
<b>53.–54.</b> <i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>73</i>	<i>0</i>	<b>8</b>
<b>55.–56.</b> <i>Samuel Stanek</i>	G Grösslingová, Bratisla- va	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>88</i>	<i>0</i>	<b>7</b>
<b>55.–56.</b> <i>Kristián Štastný</i>	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>44</i>	<i>0</i>	<b>7</b>
<b>57.–58.</b> <i>Abanoub Osama</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>10</i>	<i>0</i>	<b>6</b>

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1 3	2 3	3 6	4 6	5 9	P 11	E 12	S 10	III 60	„%“ 100	% 16	Σ 180
57.–58. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	0	6
59. <i>Mohamed Sayed</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10	0	5
60.–67. <i>Hamdy Amen</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	0	4
60.–67. <i>Zyad Ekramy</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	0	4
60.–67. <i>Lukáš Hubáč</i>	SPŠ a VOŠ, Písek	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	0	4
60.–67. <i>Mahmoud Shawky</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	0	4
60.–67. <i>Mahmoud Shawky</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	0	4
60.–67. <i>Radim Skála</i>	G, Hořovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	0	4
60.–67. <i>Martin Václavíček</i>	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	31	0	4
60.–67. <i>Nabil Youssef</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9	0	4
68.–69. <i>Moaz Ahmed</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	0	3
68.–69. <i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
70.–71. <i>Akram Haitham</i>	G, Frenštát pod Radhoštěm	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	0	2
70.–71. <i>Akmal Hashad</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	0	2
72.–75. <i>Hamdy Nour El-din Mansour</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	0	1
72.–75. <i>Mohammed Meshrif</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	0	1
72.–75. <i>Ahmed Ragab</i>	Tesla STEM High School, USA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	0	1
72.–75. <i>Seif Eldein Walid</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	0	1
76.–83. <i>Mahmoud El-Nezely</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>Saif El-said</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>Moemen Ibrahim</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>Mahmoud Kassem</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>Ahmed Moussa</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>Ahmed Nassar</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>Omar Sharaf</i>	Egypt High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
76.–83. <i>ahmed waleed</i>	STEM High School,	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1 3	2 3	3 5	4 4	5 1	P 10	E 12	S 6	III 44	„%“ 86	% 14	Σ 155
1. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	3	3	5	4	1	10	12	6	44	86	14	155


<b>jméno</b>	<b>škola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>III</b>	<b>„%“</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>9</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>10</i>	<i>60</i>	<i>100</i>	<i>16</i>	<i>180</i>
<b>2.</b> Vojtěch Kuchař	Wichterlovo G, Ostrava	3	3	5	2	2	11	13	6	<b>45</b>	78	13	<b>140</b>
<b>3.</b> Šimon Kurz	G Luďka Pika, Plzeň	3	1	5	4	4	2	5	3	<b>27</b>	63	10	<b>109</b>
<b>4.</b> Marek Milička	G dr. K. Polesného., Znojmo	3	3	5	4	–	–	–	–	<b>15</b>	79	9	<b>99</b>
<b>5.</b> Štěpán Pressl	G J. Vrchlického, Klatovy	1	1	5	5	2	3	11	–	<b>28</b>	73	8	<b>96</b>
<b>6.–7.</b> Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	3	3	2	6	9	4	–	–	<b>27</b>	64	8	<b>89</b>
<b>6.–7.</b> Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	8	–	–	–	<b>8</b>	95	8	<b>89</b>
<b>8.</b> Tomáš Volf	G Jura Hronca, Bratislava	3	1	2	5	–	–	6	–	<b>17</b>	59	7	<b>77</b>
<b>9.</b> Dominik Farhan	G Mikulášské n. 23, Plzeň	2	1	–	–	–	–	–	–	<b>3</b>	66	7	<b>76</b>
<b>10.</b> Daniel Fousek	G, Špitálská, Praha	3	1	3	2	–	2	10	–	<b>21</b>	54	6	<b>66</b>
<b>11.</b> Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	1	–	2	–	–	–	–	<b>6</b>	66	5	<b>59</b>
<b>12.</b> Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	3	3	2	5	–	–	–	–	<b>13</b>	75	5	<b>57</b>
<b>13.–14.</b> Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	3	1	5	1	–	–	–	–	<b>10</b>	73	4	<b>51</b>
<b>13.–14.</b> Matúš Kolenka	G Konštantínova, Prešov	–	1	4	1	–	2	5	–	<b>13</b>	39	4	<b>51</b>
<b>15.</b> Marek Broul	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	1	–	4	1	–	–	–	<b>6</b>	66	3	<b>35</b>
<b>16.</b> Viduranga Landers	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	2	<b>30</b>
<b>17.–18.</b> Lívia Čerešňová	ŠpMNDaG, Bratislava	2	1	–	1	–	–	–	–	<b>4</b>	53	2	<b>29</b>
<b>17.–18.</b> Aneta Pjatkanová	G, Kralupy	3	1	–	6	–	–	–	–	<b>10</b>	57	2	<b>29</b>
<b>19.–20.</b> Mona Alizadeh	St Paul's GS	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	2	<b>26</b>
<b>19.–20.</b> Marika Kosohorská	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	90	2	<b>26</b>
<b>21.</b> Andrew Pun	M. Garneau Collegiate Institute	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	2	<b>23</b>
<b>22.</b> Martin Opat	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	2	<b>21</b>
<b>23.–24.</b> Log Franc	Cumberland Valley HS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	1	<b>20</b>
<b>23.–24.</b> Agra Navaratne Navaratne	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	1	<b>20</b>
<b>25.–26.</b> Aahana Aahana	CHIREC International School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	1	<b>19</b>
<b>25.–26.</b> Ondřej Sladký	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	1	<b>19</b>
<b>27.–28.</b> Jaroslav Grulich	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	1	<b>17</b>
<b>27.–28.</b> Konstantin Tripunovskí	American HS Skopje, Macedonia	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	1	<b>17</b>
<b>29.–30.</b> Zsolt Beke	G H. Selyeho Komárno	–	1	–	1	–	–	–	–	<b>2</b>	56	1	<b>15</b>
<b>29.–30.</b> Riley Loggren	Lambert High School, USA	–	–	–	6	9	–	–	–	<b>15</b>	100	1	<b>15</b>
<b>31.</b> Makar Kuznietsov	Lviv Lyceum	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	1	<b>12</b>
<b>32.–34.</b> Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	1	<b>10</b>
<b>32.–34.</b> Gauri Shankar H	Pondicherry University	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	1	<b>10</b>
<b>32.–34.</b> Patrik Kočan	G M. Hattalu, Trstená	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28	1	<b>10</b>
<b>35.–36.</b> Gauri Shankar H	Pondicherry University	–	–	–	–	–	–	–	–	–	21	0	<b>9</b>
<b>35.–36.</b> Martin Polyácko	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	0	<b>9</b>
<b>37.</b> Jakub Kliment	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	0	<b>8</b>
<b>38.</b> Dávid Benko	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	0	<b>7</b>
<b>39.–40.</b> Martina Daňková	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	0	<b>5</b>
<b>39.–40.</b> Jan Klivan	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	0	<b>5</b>
<b>41.</b> Kian Kyars	Harry Ainlay Highschool	3	1	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	67	0	<b>4</b>
<b>42.–44.</b> Youssef Abdelmoneim	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	<b>3</b>
<b>42.–44.</b> Philopater Gabra	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0	<b>3</b>
<b>42.–44.</b> Le Vu Neumann	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	<b>3</b>
<b>45.</b> Anna Kaiserová	SPŠS a OA Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	0	<b>2</b>
<b>46.–49.</b> Hussein Hassan	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	<b>0</b>
<b>46.–49.</b> Islam Hassan	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	<b>0</b>
<b>46.–49.</b> Andrew Henin	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	<b>0</b>
<b>46.–49.</b> Ahmed Jaheen	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	<b>0</b>





**FYKOS**  
**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**18000 Praha 8**

www: <https://fykos.cz>  
e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/FYKOS>

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.