

## Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

je to tu, poslední série 34. ročníku FYKOSu!

A co že jsme si to pro vás připravili? Rozebereme si pohyb krasobruslařky při piruetě, pokusíme se určit stabilní polohu matematického kyvadla, ale také prodloužení homogenní pružiny.

V experimentální úloze si zahrajeme na nešiky, kteří vylévají skleničky s vodou (někteří experti naopak upřednostňují mističky s mlékem). Poslední díl letošního seriálu se bude zabývat zejména polarizací.

Závěrem bychom vám chtěli moc poděkovat za krásný, avšak netradiční 34. ročník FYKOSu. Věříme, že se opět shledáme příští školní rok a někteří z vás třeba rozšíří naše řady. A teď už jen pohodově ukončení školního roku a hurá na prázdniny!

*Organizátoři*



## Zadání VI. série

*Termín uploadu: 4. 5. 2021 23.59*

*Termín odeslání: 3. 5. 2021*

### Úloha VI.1 ... krasobruslařka

3 body

Uvažujme krasobruslařku s rozpaženými rukama, točící se úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem své osy. Jakou úhlovou rychlostí  $\omega'$  se bude točit, pokud připaží? Jakou práci musí vykonat, aby připažila? Tvar krasobruslařky aproximujte dle svého uvážení.

### Úloha VI.2 ... rotující kyvadélko

3 body

Mějme matematické kyvadlo délky  $l$  se závažím o hmotnosti  $m$  v tíhovém poli se zrychlením  $g$ . Kyvadélko uvedeme do rotačního pohybu okolo svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ . Určete stabilní polohy kyvadla. Výsledek vyjádřete pomocí úhlu od svislice.

### Úloha VI.3 ... třikrát a dost

5 bodů

Úsek silnice o délce  $a = 2,8$  km začíná semaforem s periodou  $T$ , na kterém signál zeleného světla trvá po dobu  $t_1 = 79$  s. Na konci tohoto úseku je druhý semafor se stejnou periodou, ale délka trvání téhož signálu je pro něj  $t_2 = 53$  s. Na obou semaforech se zelené světlo rozsvítí vždy ve stejný okamžik. Spočítejte, za jak dlouho průměrně přejedete celý úsek silnice (včetně čekání na semaforech), pokud se při jízdě pohybujete rychlostí  $v = 60$  km·h<sup>-1</sup>. Čas potřebný na rozjezdy a brzdění zanedbejte.

### Úloha VI.4 ... spatřil jsem kometu

8 bodů

Dlouhoperiodické a neperiodické komety začnou vyvrhovat plyn zpravidla při překročení dráhy Saturnu. Do té doby se pro pozorovatele na Zemi jeví jen jako malé kusy skal, a jsou tedy téměř

nepozorovatelné. Uvažujte kometu se vzdáleností v přísluní rovnou  $q = 0,5$  au a odhadněte, za jak dlouho od okamžiku, kdy překoná dráhu Saturnu, poprvé překročí dráhu Země. Trajektorie komety má excentricitu velmi blízko jedné.

### Úloha VI.5 ... těžká pružina

9 bodů

Mějme homogenní pružinu s tuhostí  $k$  a hmotností  $m$ , jejíž šířka je zanedbatelná vůči její délce. Pružinu uchytneme na jednom konci tak, aby kolem něj mohla rotovat, a následně ji roztočíme úhlovou rychlostí  $\omega$ . Kolikrát se tato pružina při rotaci prodlouží? Vliv tíhového pole neuvažujte.

### Úloha VI.P ... nebezpečnější korona

10 bodů

Dojde-li k výronu koronální hmoty ze Slunce, začne se tato hmota velkou rychlostí šířit prostorem. Někdy může zasáhnout Zemi a ovlivnit její magnetické pole. Odhadněte, jak velké elektrické proudy by mohl takový výron generovat na Zemi v síti elektrického vedení. Na jakých parametrech to závisí? Okomentujte, jaké by měla taková událost dopady na lidskou civilizaci.

### Úloha VI.E ... rozlitá sklenička

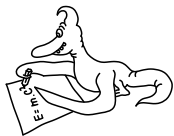
12 bodů

Veźmte si skleničku, plechovku či jinou válcově symetrickou nádobu a změřte závislost úhlu náklonu, při kterém se převrhne, na množství vody uvnitř. Doporučujeme použít nádobu s větším poměrem výšky ku průměru podstavu.

### Úloha VI.S ... nabitá struna

10 bodů

Uvažujte napnutou strunu o délkové hustotě  $\rho$ , která je navíc rovnoměrně nabitá s délkovou nábojovou hustotou  $\lambda$ . Napětí ve struně je  $T$ . Struna se nachází v magnetickém poli o konstantní velikosti  $B$ , jež je ve směru struny v rovnovážné poloze. Vaším úkolem bude popsat několik aspektů kmitání této struny. Nejprve bude třeba sestrojít vlnovou rovnici. Zanedbejte indukční efekty (předpokládejte, že struna je perfektně izolující, a tedy nábojová hustota zůstává konstantní) a určete lorentzovskou sílu na jednotku délky pro malé oscilace struny v obou směrech kolmých na směr jejího napnutí. Tuto sílu použijte pro sestavení vlnové rovnice (ta dále obsahuje sílu plynoucí z napětí struny). Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah v aproximaci malého pole  $B$ ; konkrétně uvažujte členy do prvního řádu v  $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}} \ll 1$ , kde  $k$  je vlnové číslo. Určete dva polarizační vektory, tentokrát pouze do nultého řádu v  $\beta$ . Nyní předpokládejte, že vytvoříme v určitém místě struny vlnu, která bude oscilovat pouze v jednom směru. V jaké vzdálenosti od původního bodu bude vlna stočená o devadesát stupňů?



## Řešení V. série

## Úloha V.1 ... náboj Země

3 body; (chybí statistiky)

Jaký celkový náboj by musela mít Země, aby elektrony blízko jejího povrchu odlétávaly pryč?  
 Jak by se tento náboj lišil pro protony? Karel má rád planetární úlohy.

Elektron blízko povrchu Země je přitahován gravitační silou

$$F_g = G \frac{m_e M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2},$$

kde  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  je gravitační konstanta,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  hmotnost elektronu,  $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  hmotnost Země a  $R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$  poloměr Země. Odstředivou sílu nemusíme uvažovat, i když Země rotuje, protože její vliv je menší než 1 % gravitační síly.

Abyste částice začala stoupat, pak je potřeba, aby elektrická síla (Coulombova) byla vyšší než gravitační, tedy

$$\begin{aligned} F_e &\geq F_g, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_e Q_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} &\geq G \frac{m_e M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}, \\ Q_{\oplus} &\leq 4\pi\epsilon G \frac{m_e M_{\oplus}}{-e} \doteq -2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \end{aligned}$$

kde  $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  je permitivita prostředí, která je ve vzduchu velice blízka permitivitě vakua,  $q_e = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  náboj elektronu (jeden záporný elementární náboj) a  $Q_{\oplus}$  je hledaný náboj Země. Protože jsme dělili záporným  $q_e$ , znaménko v nerovnici se otočilo. Pro elektron nám vyšlo, že pokud by Země měla náboj  $-2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ , pak by se na ní elektrony neudržely a „utíkal“ by nám do vesmíru. Jde o minimální náboj, co se absolutní hodnoty týče. Pokud bude ještě větší (absolutně) záporný náboj, tak budou elektrony ulétávat ještě snadněji (rychleji).

Podívejme se na variantu úlohy pro protony. Ve výsledku stačí nahradit hmotnost elektronu hmotností protonu  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , náboj elektronu za náboj protonu  $q_p = -q_e = +e$  a opět otočit nerovnost. Dostáváme výsledek

$$Q_{\oplus} \geq 4\pi\epsilon G \frac{m_p M_{\oplus}}{e} \doteq 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

Náboj Země by musel být zhruba 1800krát větší a opačného znaménka, aby od ní odlétávaly protony, pokud situaci srovnáme s elektrony. Další zajímavé porovnání by mohlo být s autobaterií. Typická autobaterie má kapacitu řádově 70 Ah, což při plném nabití odpovídá 250 000 C. Nejde sice o dokonalou analogii a není to „odhalený náboj“, jako by to bylo u Země, ale jde spíše o potenciál toho, kolik náboje nám umožní baterie díky chemickým reakcím přenést elektrickým obvodem.

Vidíme, že Země musí být jako celek relativně dobře neutrální. I když k tomu bychom mohli dojít logickou úvahou. Pokud by totiž celkový náboj Země stačil na to, aby nějaký typ částic

odlétával, tak by přicházela o náboj tohoto znaménka odlétáním těchto částí, až by se její celkový náboj opět vrátil přibližně do neutrální stavu.

**Karel Kolář**  
karel@fykos.cz

### Úloha V.2 ... retardovaný Jupiter

3 body; (chybí statistiky)

*Siderická perioda Jupiteru činí přibližně 11,9 roku, rychlost světla je  $3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , vzájemnou vzdálenost Země a Slunce předpokládejte rovnu  $150 \cdot 10^9 \text{ m}$ . Pomocí těchto veličin odhadněte, jak dlouho poletí světlo z Jupiteru na Zem, jestliže se Jupiter nachází na místě, na které se z opozice dostane za jednu čtvrtinu synodické periody.*

*Vášek si vzpomněl na observace Oleho Rømera.*

Při opozici se nacházejí Slunce, Země a Jupiter na jedné přímce a po čtvrtině synodické periody budou tvořit vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s přeponou Země-Jupiter. Vzdálenost Jupiteru od Slunce je podle třetího Keplerova zákona

$$a_J = a_Z \left( \frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{2}{3}},$$

kde  $T$  jsou periody oběhu planet. Vzdálenost Jupiteru a Země pak spočítáme podle Pythagorovy věty jako

$$l = \sqrt{a_J^2 + a_Z^2}.$$

Světlo tuto vzdálenost urazí za čas

$$t = \frac{l}{c}$$

a po dosazení dostáváme

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{a_Z^2 \left( \frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{4}{3}} + a_Z^2} = \frac{a_Z}{c} \sqrt{\left( \frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{4}{3}} + 1}.$$

Při počítání s hodnotami ze zadání vychází číselně  $t \doteq 44 \text{ min}$ .

**Veronika Hendrychová**  
vercah@fykos.cz

### Úloha V.3 ... nedobrovolné breathariánství

6 bodů; (chybí statistiky)

*Lukáš si chtěl uvařit večeři. Postavil hrnec na plotnu, ale zapomněl do něj dát vodu (nebo cokoliv jiného). Teplota hrnce a vzduchu uvnitř něj se ustálila na  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  (neptejte se, jak se to bez vody podařilo). Lukáš si záhy svoji chybu uvědomil a hrnec z plotny sundal, po vychladnutí na pokojovou teplotu z něj ale nedokázal sejmout poklici o ploše  $S$  a hmotnosti  $m$ . Spočítejte, jakou silou poklice na hrnci držela, pokud ji tam Lukáš dal*

1. těsně před sundáním z plotny,
2. před začátkem přípravy večeře.

Předpokládejte, že vzduch se chová jako ideální plyn.

*Lukáš a jeho kulinářské umění.*

*Poklice položená před koncem varu*

Poklice drží díky rozdílu tlaků vně a uvnitř hrnce. Těsně před položením poklice má vzduch v hrnci atmosférický tlak  $p_1 = p_a$  a teplotu  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ . Objem ani počet částic se při chladnutí nemění, jde o izochorický děj. Po vychladnutí na pokojovou teplotu  $T_2$  má tlak

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Poklice tedy drží silou

$$F = S(p_a - p_2) = Sp_a \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

*Poklice položená před začátkem varu*

V tomto případě bude tlak před začátkem chladnutí jiný, neboť poklice svojí vahou v hrnci udrží přetlak pouze

$$p_1 = p_a + \frac{mg}{S}.$$

Vzduch pak opět chladne izochorickým dějem do výsledného tlaku

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right) \frac{T_2}{T_1}.$$

Poklice nyní bude držet silou

$$F = S(p_a - p_2) = Sp_a \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - mg \frac{T_2}{T_1}.$$

Tento vztah ale platí pouze za předpokladu, že přetlak, který ohrátím vzduchu uvnitř hrnce vznikne, bude větší než hodnota, kterou udrží poklice. Potom část vzduchu unikne a tlak se ustálí na hodnotě, kterou jsme odvodili výše. Tím dostáváme podmínku

$$m \leq \frac{Sp_a}{g} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right).$$

Pokud nebude splněna, poklice se vůbec nepřilepí.

*Lukáš Timko*  
lukast@fykos.cz

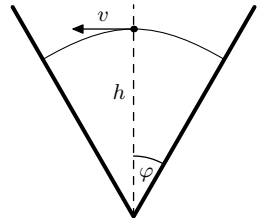
**Úloha V.4 ... perioda velkých kmitů**

Uvažujme dvě poloroviny, které svírají úhel  $2\varphi < \pi$ . Umístíme je tak, aby jejich společná přímka byla vodorovná a jejich rovina symetrie byla svislá, takže vytvoří jakési údolí. Následně vezmeme hmotný bod a z výšky  $h$  nad společnou přímkou jej hodíme rychlostí  $v$  ve vodorovném směru tak, aby začal konat periodický pohyb jako na obrázku. Jak velkou rychlostí ho musíme hodit? Předpokládejte dokonale pružné odrazy od polorovin.

*Legolase už nudí periody malých kmitů.*

Budeme hledat symetrické řešení – čiže hmotný bod bude behat po jedné parabole. Jej vrchol je zřejmě na ose, čiže rychlost, kterou ho máme hodit, bude mat

7 bodů; (chybí statistiky)



nulovou složku v smere  $y$ . Zároveň bude treba, aby  $v \equiv v_x = \text{konst}$ , čiže náš hmotný bod musí na polrovinu dopadnúť vždy kolmo. Splňme teda tieto podmienky.

Súradnice hmotného bodu v čase  $t$  od hodenia budú

$$\begin{aligned}x &= vt, \\y &= h - \frac{1}{2}gt^2,\end{aligned}$$

kde sme počiatok umiestnili do spoločnej priamky rovín. V tejto sústave budú súradnice polroviny ležiacej v prvom kvadrante splňať

$$y \operatorname{tg} \varphi = x.$$

Dosadíme a dostávame kvadratickú rovnicu pre čas dopadu

$$0 = \frac{1}{2}gt_d^2 \operatorname{tg} \varphi + vt_d - h \operatorname{tg} \varphi,$$

ktorej kladný koreň je

$$t_d = \frac{v}{g \operatorname{tg} \varphi} \left( \sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right).$$

No a ako sme spomínali, v tomto čase musí byť vektor rýchlosti kolmý na polrovinu, symbolicky

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|v_y(t_d)|}{v}.$$

Rychlost ve směru  $y$  bude  $v_y(t) = -gt$ . Podosádzame

$$v \operatorname{tg} \varphi = gt_d = \frac{v}{\operatorname{tg} \varphi} \left( \sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right)$$

a vyjadríme

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Čo je zjavne rýchlosť, ktorou musíme náš hmotný bod hodiť (a teda odpoveď na otázku zo zadania).

Ak chceme spočítať periódu, tak to stačí dosadiť späť do vzťahu pre  $t_d$  a využiť, že je to presne štvrtina periódy

$$T = 4t_d = \frac{4v}{g \operatorname{tg} \varphi} \left( \sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right) = 4\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Vidíme, že pre  $\varphi \rightarrow 0$  ide  $T \rightarrow 0$ , čo celkom dáva zmysel. Zároveň pre  $\varphi \rightarrow \pi/2$  by sme čakali, že aj  $v \rightarrow 0$  a pohyb bude čím ďalej tým viac pripomínať voľný pád, odraz späť, voľný pád na opačnú polrovinu a odraz späť, čiže limita  $T \rightarrow 4\sqrt{2h/g}$  presne sedí.

*Šimon Pajger*  
legolas@fykos.cz

## Úloha V.5 . . . rheonomní katapult

10 bodů; (chybí statistiky)

Mějme tenkou obdélníkovou desku, která se otáčí kolem své horizontálně orientované hrany konstantní úhlovou rychlostí. V okamžiku, kdy se deska nachází ve vodorovné poloze a otáčí se směrem nahoru, na ni umístíme malý kvádrík tak, aby se vzhledem k ní zpočátku nepohyboval. Jak se bude kvádrík po desce pohybovat, jestliže je tření mezi oběma tělesy nulové? Kam musíme kvádrík na začátku umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky desky? Diskutujte dále všechny potřebné předpoklady, které pro to musí být splněny.

*Bonus* Jaký výkon dodává deska kvádríku a jakou celkovou práci na něm vykoná?

*Váška už omrzely příklady na skleronomní vazby, tak přišel s vazbou rheonomní.*

## Odvození pohybových rovnic

Jedná se o mechanickou úlohu s vazbou, neboť malý kvádrík můžeme aproximovat hmotným bodem vázaného na desku do okamžiku, kdy z ní vyletí. Deska působí na kvádrík jako vazba závislá na čase, tj. rheonomní vazba (odtud název úlohy). Vazba nezávislá na čase se nazývá skleronomní. Pohyb kvádríku nalezneme vyřešením pohybových rovnic. Nejdříve však potřebujeme zvolit souřadnice. Problém je efektivně dvourozměrný, protože se kvádrík bude pohybovat po desce ve směru kolmém k ose otáčení a také se bude otáčet společně s deskou. Stačí nám proto zvolit dvě kartézské souřadnice  $x$ ,  $y$  s počátkem na ose otáčení. Dále si zavedeme druhou sadu souřadnic, a to polární souřadnice  $r$ ,  $\varphi$ . Souřadnice  $r$  měří vzdálenost od osy otáčení a úhel  $\varphi$  měří orientovaný úhel sevřený spojnicí počátku a daného bodu s kladnou poloosou  $x$ , jak je vidět na obrázku 1. Transformační vztahy z polárních do kartézských souřadnic jsou

$$x = r \cos \varphi, \quad (1)$$

$$y = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Pohyb kvádríku v závislosti na čase  $t$  je pak dán funkcemi  $x = x(t)$  a  $y = y(t)$ , resp. funkcemi  $r = r(t)$  a  $\varphi = \varphi(t)$ . Nachází-li se kvádrík na desce, je souřadnice  $\varphi$  kvádríku totožná s úhlem natočení desky, pro který ze zadání platí  $\varphi(t) = \omega t$ , kde  $\omega > 0$  je konstantní velikost úhlové rychlosti. Kartézské souřadnice  $x$  a  $y$  generují vektorová pole  $\mathbf{e}_x$  a  $\mathbf{e}_y$ . To jsou tečné vektory k souřadnicovým čarám  $y = \text{konst}$  a  $x = \text{konst}$  mající jednotkovou velikost. Vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  kvádríku pak je

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y,$$

kde tečka značí (totální) časovou derivaci. Časovou závislost zdůrazněnou v kulatých závorkách budeme často pro přehlednost vynechávat. Časovou derivací vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  dostaneme zrychlení kvádríku

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y. \quad (3)$$

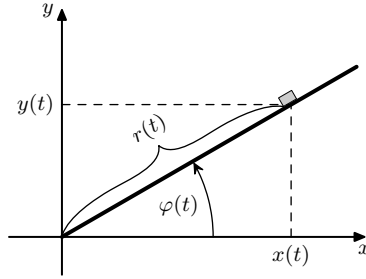
Poznamenejme, že jsme využili faktu, že se vektor  $\mathbf{e}_x$  (jeho velikost i směr) podél trajektorie kvádríku nemění (podobně i vektor  $\mathbf{e}_y$ ), neboli

$$\dot{\mathbf{e}}_x \equiv \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = 0.$$

Nyní využijeme transformační vztahy (1) a (2), do kterých dosadíme konkrétní souřadnice kvádríku a rovnice (totálně) zderivujeme podle času  $t$ , čímž dostaneme

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$



Obr. 1: Kartézské a polární souřadnice.

Další časovou derivací získáme

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.\end{aligned}$$

Tyto rovnice dosadíme do vztahu (3), čímž dostaneme zrychlení ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \mathbf{e}_x + \\ &+ (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (4)$$

Celková síla  $\mathbf{F}$  působící na kvádřík je dána součtem reakce  $\mathbf{N}$  desky na kvádřík a tíhové síly  $m\mathbf{g}$ , neboli

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} = -(N \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (N \cos \varphi - mg) \mathbf{e}_y, \quad (5)$$

kde  $N$  je (orientovaná) velikost reakce  $\mathbf{N}$ ,  $m$  je hmotnost a  $g$  je velikost tíhového zrychlení. Druhý Newtonův pohybový zákon lze matematicky vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Z rovnic (4) a (5) potom dostáváme pohybové rovnice

$$-N \sin \varphi = m (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \quad (6)$$

$$N \cos \varphi - mg = m (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \quad (7)$$

Jedná se o soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic se třemi neznámými funkcemi  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  a  $N(t)$ . Nezapomeňme však, že ještě máme zadán pohyb desky (a tedy i jednu souřadnici kvádříku)  $\varphi(t) = \omega t$ . Ještě před tím, než dosadíme  $\varphi(t) = \omega t$ , upravíme soustavu rovnic (6) a (7) do jednodušší podoby. Rovnici (6) vynásobíme  $(\sin \varphi)/m$  a rovnici (7) vynásobíme  $(\cos \varphi)/m$ , čímž dostaneme

$$\begin{aligned}-\frac{N}{m} \sin^2 \varphi &= \ddot{r} \sin \varphi \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \varphi - r\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \frac{N}{m} \cos^2 \varphi - g \cos \varphi &= \ddot{r} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos^2 \varphi + r\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

Nyní odečteme první rovnici od druhé

$$\frac{N}{m} - g \cos \varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \quad (8)$$



Tuto rovnici vynásobíme  $\sin \varphi$  a sečteme ji s rovnicí (6) vydělenou  $m$ . Výsledek této operace ještě vydělíme  $\cos \varphi$  a dostaneme

$$-g \sin \varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2. \quad (9)$$

Soustavu rovnic (6) a (7) jsme tak zjednodušili na soustavu rovnic (8) a (9). K nalezení pohybových rovnic v takto jednoduchém tvaru bylo potřeba s rovnicemi manipulovat způsobem, který nemusí být na první pohled zřejmý. Ukážeme si proto alternativní postup jejich odvození. Na místo vektorové báze  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  budeme pracovat s bází  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ . Bude to sice vyžadovat jisté matematické operace navíc, za to však dostaneme pohybové rovnice přímo v jednoduchém tvaru.

### Alternativní odvození pohybových rovnic

Poloha kvádříku je tedy dána funkcemi  $r = r(t)$  a  $\varphi = \varphi(t)$ . Vektor rychlosti je proto roven

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \dot{r} \boldsymbol{\partial}_r + \dot{\varphi} \boldsymbol{\partial}_\varphi, \quad (10)$$

kde  $\frac{\partial}{\partial r} \equiv \boldsymbol{\partial}_r$ , resp.  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \boldsymbol{\partial}_\varphi$  jsou vektory tečné k souřadnicovým čárám  $\varphi = \text{konst}$ , resp.  $r = \text{konst}$ . Vektory  $\boldsymbol{\partial}_r$  jsou normalizované na jednotku ( $\boldsymbol{\partial}_r^2 \equiv \boldsymbol{\partial}_r \cdot \boldsymbol{\partial}_r = 1$ ) a proto jsou v každém bodě shodné s jednotkovým vektorem  $\mathbf{e}_r$  mířícím v radiálním směru, tj.

$$\boldsymbol{\partial}_r = \mathbf{e}_r.$$

Vektory  $\boldsymbol{\partial}_\varphi$  mířící v tangenciálním směru však už nejsou normalizované na jednotku, neboť  $\boldsymbol{\partial}_\varphi^2 \equiv \boldsymbol{\partial}_\varphi \cdot \boldsymbol{\partial}_\varphi = r^2$ . Místo nich proto budeme používat normalizované vektory  $\mathbf{e}_\varphi$ , pro které v každém bodě platí

$$\boldsymbol{\partial}_\varphi = r \mathbf{e}_\varphi.$$

Rychlost  $\mathbf{v}$  z rovnice (10) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi, \quad (11)$$

ve kterém rozeznáváme člen odpovídající radiální rychlosti a člen odpovídající tangenciální rychlosti. Zrychlení kvádříku  $\mathbf{a}$  získáme totální časovou derivací vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$ . Teď ovšem musíme být obezřetní. Bázové vektory na pravé straně rovnice (11) jsou závislé na čase  $t$ , protože se vyčísľují v bodech, které odpovídají poloze kvádříku v daném čase. Totální časovou derivací rovnice (11) dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}. \quad (12)$$

Časovou změnu bázových vektorů podél trajektorie vyjádříme pomocí změny bázových vektorů v souřadnicových směrech a pomocí časové změny souřadnic polohy kvádříku, neboli aplikujeme pravidlo o derivaci složené funkce na vektory

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

Parciální derivace obou bázevých vektorů podle času jsou nulové, neboť v pevné poloze nezávisí bázevé vektory na čase. Začneme se členem  $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi$ , neboli se změnou vektoru  $\mathbf{e}_r$  podél souřadnice  $\varphi$ . K nalezení výsledku nám pomůže obrázek 2. V bodě o souřadnicích  $(r, \varphi)$  máme vektor  $\mathbf{e}_r(r, \varphi)$  a v bodě pootočeném o malý úhel  $\delta\varphi$  máme vektor  $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)$ . Vzhledem k tomu, že směřujeme k derivaci, chceme od sebe tyto vektory odečíst. Umíme však odečítat pouze vektory v jednom bodě, a proto vektor  $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)$  paralelně přeneseme z bodu  $(r, \varphi + \delta\varphi)$  do bodu  $(r, \varphi)$  a získáme tak nový vektor  $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)'$ . V bodě  $(r, \varphi)$  už je dobře definovaný rozdíl  $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r, \varphi)$ . Jeho výsledkem je vektor, jehož velikost je  $2 \sin(\delta\varphi/2)$ . Budeme-li úhel  $\delta\varphi$  limitně zmenšovat k nule, dostaneme vektor mířící ve směru  $\mathbf{e}_\varphi(r, \varphi)$ . Zároveň pro malé úhly  $\delta\varphi$  platí přiblížení  $2 \sin(\delta\varphi/2) \approx \delta\varphi$ , proto celkově dostáváme

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r(r, \varphi)}{\partial \varphi} \equiv \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r, \varphi)}{\delta\varphi} = \mathbf{e}_\varphi(r, \varphi).$$

Zjednodušeně zapsáno jsme získali

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi.$$

Se členem  $\partial \mathbf{e}_\varphi / \partial \varphi$  budeme postupovat opět s pomocí obrázku 2. Postup je analogický, a proto ho ponecháme bez slovního komentáře. Výsledkem je vztah

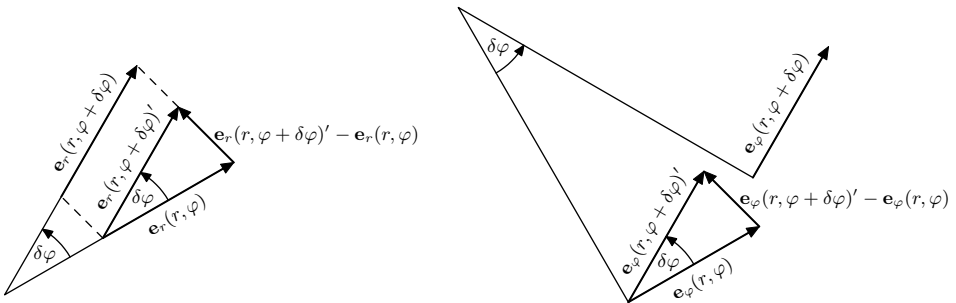
$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r.$$

Vybaveni zkušenostmi z příkladů výše již snadno nahlédneme, že následující parciální derivace jsou nulové

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r}.$$

Pro totální časové derivace bázevých vektorů (rovnice (13) a (14)) tak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= -\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$



Obr. 2: Odvození parciálních derivací bázevých vektorů v polárních souřadnicích.

Na základě předchozích výpočtů se nám rovnice (12) pro zrychlení  $\mathbf{a}$  zjednoduší na

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Jedná se o obecný tvar zrychlení při pohybu v rovině vyjádřený v polárních souřadnicích. Jako cvičení se můžete sami pokusit interpretovat každý jednotlivý člen na pravé straně. Výslednou sílu  $\mathbf{F}$  působící na kvádřík lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F} = -(mg \sin \varphi) \mathbf{e}_r + (N - mg \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi.$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona pak dostáváme soustavu pohybových rovnic přímo v jednoduché formě – rovnice (8) a (9).

### Řešení pohybových rovnic

Pokračujeme v hledání pohybu kvádříku. Ze zadání známe pohyb desky a tedy souřadnici kvádříku  $\varphi = \omega t$ . Dosazením do pohybových rovnic (8) a (9) dostaneme

$$\frac{N}{m} - g \cos \omega t = 2\omega \dot{r}, \quad (15)$$

$$-g \sin \omega t = \ddot{r} - \omega^2 r. \quad (16)$$

Rovnice (16) je sama o sobě nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu pro funkci  $r(t)$ . Její řešení se skládá z homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení hledáme ve tvaru

$$r_{\text{H}}(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

kde  $A, B$  jsou konstanty. Pomocí převodních vztahů mezi exponenciálou a hyperbolickými funkcemi jej můžeme přepsat do (pro následující výpočty) výhodnější podoby

$$r_{\text{H}}(t) = a \sinh \omega t + b \cosh \omega t,$$

kde  $a, b$  jsou konstanty. Partikulárním řešením je například

$$r_{\text{P}}(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

Tím jsme našli obecné řešení

$$r(t) = r_{\text{H}}(t) + r_{\text{P}}(t) = a \sinh \omega t + b \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t, \quad (17)$$

odkud pro první časovou derivaci získáme

$$\frac{\dot{r}(t)}{\omega} = a \cosh \omega t + b \sinh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t. \quad (18)$$

Označme počáteční vzdálenost od osy otáčení  $r_0 = r(0)$ . Ze zadání vyplývá, že kvádřík se po desce ze začátku nepohybuje, neboli  $\dot{r}(0) = 0$ . Dosazením počátečních podmínek do rovnic (17) a (18) dostaneme

$$r_0 = b, \quad 0 = a + \frac{g}{2\omega^2}. \quad (19)$$

Pohyb po desce je tedy dán rovnicí

$$r(t) = r_0 \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \sinh \omega t). \quad (20)$$

*Podmínka pádu kvádříku z desky*

Teď nás bude zajímat kam kvádřík umístít, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky, kdy  $\varphi = \pi/2$ . To může nastat dvěma způsoby. Na kvádřík působí deska pouze tlakovou silou ( $N > 0$ ), a proto kvádřík může odletět od desky v okamžiku, kdy tato síla v čase spojitě vymizí ( $N = 0$ ). Jednoduše deska nebude dost rychlá na to, aby dohonila kvádřík. Druhou možností je, že kvádřík právě po čtvrtině otáčky dojde na konec desky.

Předpokládáme-li, že je deska dostatečně dlouhá, vyletí kvádřík z desky v okamžiku, kdy na něj přestane silově působit, tj. když bude platit  $N = 0$ . Navíc, aby kvádřík skutečně odletěl, požadujeme, aby čistě matematicky v tomto bodě přecházelo  $N$  do záporných hodnot. Fyzikálně korektněji požadujeme, aby mělo  $N$  v daném okamžiku zápornou časovou derivaci zleva. Dosazením nalezeného řešení (20) do první pohybové rovnice (15) dostaneme

$$\frac{N(t)}{m} = 2r_0\omega^2 \sinh \omega t - g \cosh \omega t + 2g \cos \omega t. \quad (21)$$

Z požadavku, aby kvádřík vyletěl po čtvrtině otáčky, máme podmínku

$$0 = 2r_0\omega^2 \sinh \frac{\pi}{2} - g \cosh \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{g}{2\omega^2} \coth \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Dostáváme tak výslednou závislost vzdálenosti kvádříku od osy otáčení

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{g}{2\omega^2} \left( \coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t \right), \\ \dot{r}(t) &= \frac{g}{2\omega} \left( \coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + \cos \omega t \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Všimněme si, že  $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$ , což znamená, že kvádřík bude vystřelen ve vodorovném směru. Stále však nemáme zaručeno, že nám v průběhu čtvrtotáčky nepřekmitne  $N$  do záporných hodnot. Pro velikost reakce  $\mathbf{N}$  desky na kvádřík podle rovnice (21) platí

$$\frac{N(t)}{mg} = \coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2 \cos \omega t. \quad (24)$$

Ověříme si, že na začátku ( $t = 0$ ) je  $N(0) = mg > 0$ . Pro  $\omega t \in (0, \pi/2)$  se o tom přesvědčíme s pomocí grafu 3. Vidíme, že funkce je pro  $\omega t \in (0, \pi/2)$  kladná a že v bodě  $\omega t = \pi/2$  má zápornou derivaci, což lze ukázat i výpočtem. Platí

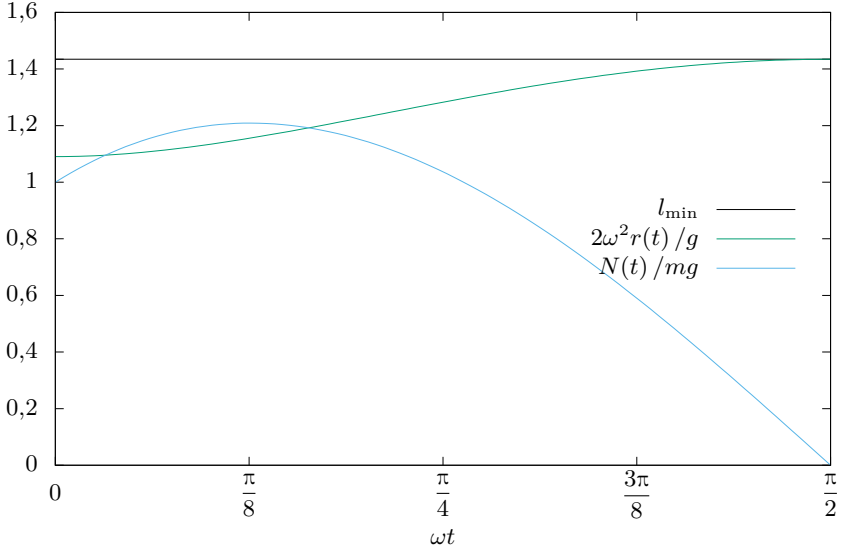
$$\begin{aligned} \frac{1}{mg} \frac{dN}{d(\omega t)} \left( \frac{\pi}{2} \right) &= \coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \left( \cosh^2 \frac{\pi}{2} - \sinh^2 \frac{\pi}{2} \right) - 2 = \\ &= \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} - 2 < 0, \end{aligned}$$

takže kvádřík od desky skutečně odletí.

Další nutná podmínka proto, aby kvádřík nevyletěl dříve, je dostatečná délka desky v radiálním směru. Její minimální délka  $l_{\min}$  musí být rovna vzdálenosti, do jaké se kvádřík po čtvrtině otáčky dostane. Dosadíme do vztahu (23) a vyjde nám

$$l_{\min} = r \left( \varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{g}{2\omega^2} \left( \coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right). \quad (25)$$

Délka desky  $l_{\min}$  je skutečně postačující, neboť, jak je patrné z grafu 3, v průběhu celé čtvrtotáčky je  $0 < r(t) \leq l_{\min}$ . Poznamenejme ještě, že kdyby byla deska příliš dlouhá, mohla by do kvádříku po vystřelení znovu narazit. Zařízení by pak úkol katapultu příliš nespĺňovalo.



Obr. 3: Funkce  $N(t)$  a  $r(t)$  během první čtvrtotáčky desky.

#### Podmínka druhého způsobu pádu kvádříku z desky

Podívejme se na situaci, kdy kvádřík dojede po čtvrtině otáčky na konec desky, jejíž délku v radiálním směru označíme  $l$ . Dostáváme podmínku

$$r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = l = r_0 \cosh \frac{\pi}{2} + \frac{g}{2\omega^2} \left(1 - \sinh \frac{\pi}{2}\right).$$

Odtud máme pro počáteční vzdálenost vztah

$$r_0 = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2} (\sinh \frac{\pi}{2} - 1)}{\cosh \frac{\pi}{2}} > 0. \quad (26)$$

Pro úplnost uvedeme plnou závislost radiální vzdálenosti na čase

$$r(t) = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2} (\sinh \frac{\pi}{2} - 1)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \sinh \omega t). \quad (27)$$

Ovšem řešení (27) není vždy smysluplné. Vzhledem ke konečné délce desky musí po celou čtvrtotáčku platit  $r(t) \leq l$ . Pro  $\varphi = \omega t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$  přepíšeme tuto nerovnost do tvaru

$$\left(1 - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}}\right) \tilde{l} \geq \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} + (\sin \varphi - \sinh \varphi), \quad (28)$$

kde jsme zavedli bezrozměrný parametr  $\tilde{l} = 2l\omega^2/g$ . Hledáme tedy nejmenší hodnotu parametru  $\tilde{l}$ , pro který je nerovnost splněna pro všechna  $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ , což není zrovna jednoduché. Začneme proto nutnou, avšak ne nutně postačující, podmínkou  $\dot{r}(\varphi = \pi/2) \geq 0$ . Zderivováním (27) a dosazením  $\varphi = \pi/2$  dostaneme

$$\left(l + \frac{g}{2\omega^2} \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\cosh \frac{\pi}{2}} - \frac{g}{2\omega^2} \cosh \frac{\pi}{2} \geq 0.$$

Tuto nerovnost převedeme ekvivalentními úpravami na podmínku

$$\tilde{l} \geq 1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}}. \quad (29)$$

Zkusme nyní zjistit, zda je nutná podmínka (29) zároveň postačující, tj. zda  $\tilde{l}$  splňující (29) splňuje také  $r(t) \leq l$ . Ptáme se tedy, zda je splněna nerovnost

$$\left(1 - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}}\right) \geq \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} - (\sinh \varphi - \sin \varphi).$$

Roznásobením a dalšími úpravami dostaneme

$$1 + \sinh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi \geq \cosh \frac{\pi}{2} \cosh \varphi - \sinh \frac{\pi}{2} \sinh \varphi.$$

Použitím součtového vzorce  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$  a přičtením  $\sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi$  převedeme nerovnost na tvar

$$1 + \sinh \frac{\pi}{2} \geq \cosh\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi. \quad (30)$$

Definujme funkci  $P(\varphi)$  jako levou stranu této nerovnosti. Její maximum na intervalu  $\langle 0, \pi/2 \rangle$  se nachází buď na krajích tohoto intervalu, nebo ve stacionárních bodech  $P' = 0$ . Derivací dostáváme podmínku pro stacionární body

$$P' \equiv \frac{dP}{d\varphi} = -\sinh\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sinh \frac{\pi}{2} \cos \varphi = 0.$$

Tato rovnice má na hledaném intervalu dvě řešení a sice 0 a  $\pi/2$ . Dosazením těchto hodnot do  $P(\varphi)$  se přesvědčíme, že maximum  $P$  je rovno  $P(\pi/2) = 1 + \sinh \pi/2$ . Vidíme, že nerovnost (30) je tak splněna. Zjistili jsme, že pro

$$\tilde{l} \geq 1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \quad (31)$$

je řešení pohybu s počáteční vzdáleností  $r_0$  danou rovnicí (26) smysluplné, neboli (31) je postačující podmínkou pro  $r(t) \leq l$ . Vypadá to tedy tak, že i v případě druhé možnosti vystřelení

kvádříku existuje pro pevné  $\omega$  minimální potřebná délka desky, která je shodná s délkou potřebnou pro první možnost, viz vztah (25). Zbývá však ještě ověřit, že kvádřík neodletí od desky dříve, neboli že platí  $N(\varphi) \geq 0$ . Dosazení za  $r_0$  z rovnice (26) do (21) vede na

$$\frac{N(t)}{mg} = \frac{\tilde{l} + \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi. \quad (32)$$

A protože platí (31), musí také platit

$$\frac{N(t)}{mg} \geq \frac{1 + \sinh^{-1} \frac{\pi}{2} + \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi.$$

Společně s požadavkem  $N(\varphi) > 0$  to vede na podmínku

$$\coth \frac{\pi}{2} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi \geq 0.$$

Pro tuto nerovnost jsme již ověřili, že je pro všechna  $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$  splněna, viz (24).

### Bonus

Dalším úkolem je zjistit mechanický výkon  $P$  dodávaný kvádříku deskou. Deska působí na kvádřík silou  $\mathbf{N}$ , a proto

$$P = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = N \mathbf{e}_\varphi \cdot (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = Nr \dot{\varphi},$$

kde jsme využili rovnice (11) a ortonormality bázevých vektorů. Ke stejnému vztahu můžeme také dojít z jiného úhlu pohledu. Deska působí na kvádřík momentem síly

$$\mathbf{M} = r \mathbf{e}_r \times N \mathbf{e}_\varphi = Nr (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$$

a kvádřík se otáčí s vektorem úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$ . Výkon  $P$  je pak roven

$$P = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = Nr \dot{\varphi}. \quad (33)$$

V případě první možnosti vystřelení kvádříku dosadíme  $\dot{\varphi} = \omega$ ,  $N$  z rovnice (24) a  $r$  z rovnice (23), čímž dostaneme výkon

$$P = \frac{mg^2}{2\omega} \left( \coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2 \cos \omega t \right) \left( \coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t \right).$$

Celková práce  $W$  vykonaná na kvádříku je rovna přírůstku mechanické energie kvádříku, tj. součtu přírůstku kinetické energie  $E_k$  a přírůstku tíhové potenciální energie  $E_p$ , neboli

$$\begin{aligned} W &= E_k \left( \varphi = \frac{\pi}{2} \right) - E_k(\varphi = 0) + E_p \left( \varphi = \frac{\pi}{2} \right) - E_p(\varphi = 0) = \\ &= \frac{1}{2} m \left( \mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0) \right) + mgl_{\min}. \end{aligned}$$

Za rychlost  $\mathbf{v}$  dosadíme z rovnice (11) a dostaneme

$$W = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \left( \varphi = \frac{\pi}{2} \right) + (l_{\min} \omega)^2 - (r_0 \omega)^2 \right) + mgl_{\min}.$$

Nyní za  $r_0$  a  $l_{\min}$  dosadíme z rovnic (22) a (25) a využijeme toho, že  $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$ , čímž získáme hledaný vztah pro vykonanou práci

$$\begin{aligned} W &= \frac{mg^2}{8\omega^2} \left( \left( \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right)^2 - \coth^2 \frac{\pi}{2} \right) + \frac{mg^2}{2\omega^2} \left( \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right) = \\ &= \frac{mg^2}{2\omega^2} \left( \frac{3}{2 \sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Ke stejnému výsledku lze dojít i přímou integrací výkonu  $P$ . Jedná se však o delší výpočet.

V případě druhé možnosti vystřelení kvádříku dosadíme do rovnice (33) opět  $\dot{\varphi} = \omega$ ,  $N$  z rovnice (32) a  $r$  z rovnice (27), čímž dostaneme výkon

$$P = \frac{mg^2}{2\omega} \left( \frac{\tilde{l} + \sinh \frac{\pi}{2} - 1}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi \right) \left( \frac{\tilde{l} + \sinh \frac{\pi}{2} - 1}{\cosh \frac{\pi}{2}} \cosh \varphi + \sin \varphi - \sinh \varphi \right).$$

Celková práce  $W$  vykonaná na kvádříku bude rovna

$$W = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0)) + mgl.$$

Dosazením za rychlost  $\mathbf{v}$  z rovnice (11) dostaneme

$$W = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \left( \varphi = \frac{\pi}{2} \right) + (l\omega)^2 - (r_0\omega)^2 \right) + mgl.$$

Zbývá už jen dosadit s užitím rovnice (27) pro  $r$  a rovnice (26) pro  $r_0$ .

**Václav Mikeska**  
v.mikeska@fykos.cz

## Úloha V.P ... to nechceš

9 bodů; (chybí statistiky)

*Jistě jste již někdy slyšeli, že skořápka běžného slepičího vejce dokáže vydržet i poměrně velký tlak. Vysvětlete, jak je to možné, když je přeci velmi snadné vejce rozbít. V jakém směru snese skořápka největší zatížení? Proč a jak se rozbije, když ji zatížíme příliš? Popište různé mechanismy a určete, který je nejpravděpodobnější. Nezapomeňte, že se zabýváme skutečnými, nikoli ideálními vejci. Kde to bude možné, zkuste svá tvrzení podpořit výpočty.*

*Napadla Jáchyma při sledování kultovního českého filmu.*

## Introduction

Despite simple looks, actually solving the problem of an egg-shaped shell under external load is very involved and even significantly simplified models are beyond the scope of a FYKOS problem. Here we will try to use a very simple 2D spherical shell model and discuss its limitations, but primarily we will use simple arguments to come to a conclusion as this approach is more instructive than writing and attempting to solve a large system of partial differential equations.

Before we start, let us introduce some basic concepts to make sure we are all on the same page.



## Stress

Stress is a quantity describing internal forces between particles in the material. You will already be familiar with stress in simple cases such as a weight hanging from a string, causing normal stress within the string given by  $\sigma = F/A$ , where  $A$  is the cross sectional area of the string (i.e. perpendicular to the direction of the force). As you can see from this simple example, stress has the units of pressure. The string will be in tension and the stress here can be described as tensile. If we were to instead use a rod and put the weight on top, the stress will instead be compressive. The fact that we had to replace the string illustrates is an extreme example of an important point: some materials handle compression and tension differently. Another form of stress is shear stress, which arises when material (or its part) is pulled in two directions parallel to its surface (e.g. trying to pull apart two pieces of paper glued together or using scissors to *shear* different parts of material apart). Same as before we have shear stress  $\theta = F/A$  but here  $A$  is the cross-sectional area of *parallel* to the direction of the force (so in the earlier case of scissors, this would depend on the thickness of the paper). While for most of our discussion an understanding of what shear and normal stress is sufficient, we will need to introduce a tensor description when we attempt to construct a 2D model later.

## Eggs

Let's now look at some properties of an egg. It is fairly reasonable to assume that the shape is cylindrically symmetric. The shell of a chicken egg is typically  $(0.3 - 0.4)mm$  thick <sup>1</sup> and with typical height of approximately 50 mm and width slightly less than that, the radius to thickness ratio is close to 100.

The material is a type of bio-ceramic, which in chicken eggs is composed of 96 % calcium carbonate, 2 % organic matrix and smaller amounts of magnesium, phosphorus and other trace elements. The internal microstructure is non-trivial and can generally be split radially into 5 layers: mammillary knob, cone, palisade, vertical crystal layer, and cuticle. Interested readers can find extensive description (and images) of the structure in literature <sup>2</sup>, but the most important points for our purposes here are that the material is a ceramic made of mostly calcite but with a complex internal structure.

While properties of the specific eggshell material are difficult to find, in general, we know that ceramics tend to be stiff (have a high Young modulus), they tend to be brittle, and they are typically much stronger (often 10x stronger) in compression than in tension because they have internal structure defects that concentrate stress and can propagate under tension but not under compression.

Experimental results indicate that the contents of the shell do not significantly change its strength, so we will consider the egg an empty shell.

## *But eggs aren't very strong!*

As we all know eggs are very easy to break, but as the problem statement asserts, they can indeed survive a lot of pressure if applied correctly. To answer why that is, we first need to consider the difference between applying pressure to the egg, for example by squeezing it in one

<sup>1</sup><https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/1828051X.2017.1344935>

<sup>2</sup>[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-3060-2\\_1](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-3060-2_1) <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4118947/> <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22201802/>

hand and trying to crack the egg on the rim of a pan or dropping it on the floor. There are two key differences, both of which contribute to the difference in strength.

One is simply the area where the force is applied; if we squeeze the egg, the force is applied on a fairly large area and so the resulting pressure is not as high. In the case of an egg, or indeed any object of a similar shape, distributing the force over a larger area helps us in another way. When we apply a force on the egg, we need to consider the direction in which this force is acting, if this is normal to the surface, we are causing shear stress in the material, and as the shell is thin it will not survive much stress in this direction, whereas if we distribute the force, the shape of the shell will have more area to convert this shear stress into tension and compression within the shell.

When the egg is squeezed, pressure is applied slowly, in what we would call an isostatic manner, that is we can ignore the dynamic forces and only treat any one instance on its own, whereas if we hit the egg, we apply the force quickly, which requires the material to adjust rapidly, increasing peak stress.

### *So how strong are eggs?*

We established that this is a complex problem, so let's look at some experimental results. It is also possible to use finite element analysis to estimate strength, but it would not capture the details of an imperfect biological material. We can find several papers discussing the strength of eggs online, for example<sup>3</sup> shows that chicken eggs can under appropriate loading along their axis withstand significant forces, but also that there is a large variance between individual eggs. In general, it seems chicken eggs can typically withstand an impressive 700 N of force.

### *Failure modes*

So how does an egg break? There are multiple methods in which an egg can break, depending on properties of the egg and how the force is applied.

#### *Shear failure*

We already alluded to the case of breaking the egg by hitting it in a small spot, when the shear stress around the point of contact exceeds the strength of the material. The strength is further reduced by the rapid nature of the impact, which would require a very high strain rate to compensate.

But the case of axial compression, when we apply a force over a significant area from two opposing directions is more complicated and there could be multiple failure modes in play.

#### *Buckling*

You might be familiar with the buckling of an Euler strut, that is when you apply enough force along the axis of a beam it becomes mechanically unstable and will buckle to the side. As you can probably imagine and may even have seen in some toys made out of thin plastic or metal this is also possible with curved shells. However, as the ceramic of the egg is not flexible this does not seem likely.

---

<sup>3</sup><https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/>

### *Tension on inner surface*

When we try to bend a structure, its two sides are under opposing stresses (imagine bending a beam) when the outer surface is under tension, the inner is under compression (inner and outer here refer to the direction of the induced bending). To compensate for stress a material will always experience some strain so in the case of an egg, this means we are bending the top against its original shape, so we create compression on the outer surface and tension on the inner surface. As the ceramic is much weaker in tension, it might fracture on the inner surface in the area where we are applying force. This appears to be a frequent failure mode in eggs<sup>4</sup>, but depending on the specific loading configuration, it may not result in a complete failure. The top will crack and deform and the load will be more effectively applied to the rest of the shell.

### *Hoop tension*

As we apply compression along the axis a tension is induced along the lines of latitude. This is a fairly intuitive result if you just imagine the forces acting along meridians of the egg, as the meridians diverge due to the curvature of the surface, hoop tension is required to balance the forces. Again this acts to convert compression to tension and might push the egg beyond its breaking point. This tensile stress also acts on a large area which will become important later. This is the typical failure mode in some experiments<sup>5</sup>.

### *A 2D model*

We will now try to come up with a simplified 2D model, discussing a spherical shell (though it turns out the solution for any shell of rotation is broadly the same). The following section will be rather advanced and is definitely not required to obtain full marks, so it's only here for the interested reader.

### *Cauchy stress tensor*

In general, a material can experience stresses in all directions and as such a simple description with normal and shear stress is not sufficient as the force a plane within the material feels will depend on the orientation of this plane. That means for a full description we will need to describe stress in a way that can give us the force acting on any plane (defined by its normal vector). We need an object mapping a vector to another vector, that is we need to describe stress as a *tensor*. While tensors may seem intimidating at first, we do not need anything fancy here, so we will treat it simply as a matrix.

The tensor fully describing stress in a material is known as the Cauchy stress tensor. We can readily figure out its components in Cartesian coordinates based on the previous discussion of shear and normal stresses. We want a matrix such that when it is applied on a vector normal to a plane gives the force acting on this plane ( $\vec{F} = \vec{n}\sigma$ ). We know that normal stresses  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  act on planes perpendicular to  $x, y, z$  axes in the direction along these axes (e.g.  $\sigma_x$  will act along  $x$  on a  $yz$  plane). Any shear stress will act in perpendicular directions so it will not contribute here. This immediately gives us the diagonal components of the matrix as

<sup>4</sup><https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00071666708415678>

<sup>5</sup><https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/>

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . The shear components are somewhat less intuitive but we know that they form the off-diagonal components as they act along the planes. We can therefore write

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

In general, this tensor will depend on position in static situations, so stress actually forms a tensor field. An observant reader might notice that as we are dealing with an equilibrium, there will be some conditions we can impose on the stress tensor so that forces on all elements within the body are in equilibrium.

Consider an arbitrary volume  $V$  within the material surrounded by a surface  $S$ . Every point on the surface is acted on by a force  $T(x, y, z)$  due to stresses within the material and there are body forces  $F$  (e.g. gravity) acting on every volume element within the material independently of stress (we will neglect these later). We know that the net force needs to be zero, so summing the forces on the surface and the body forces

$$\int_V F_i dV + \int_S \sigma_{ji} n_j dS = 0,$$

where we used suffix notation and Einstein summation convention (repeated indices imply summation, the equation  $\vec{F} = \vec{n} \sigma$  can be rewritten as  $F_i = n_j \sigma_{ji}$  in this way), we will continue to use this convention throughout the next part as it greatly simplifies the expressions. We can use Gauss's theorem to replace the surface integral with a volume integral and we obtain

$$\begin{aligned} \int_V F_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV &= 0, \\ \int_V F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV &= 0, \\ F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

where the last line follows as we are talking about arbitrary volume and the only way the integral over any volume is zero is if the integrand is zero. This gives us 3 equations (notice the remaining index  $i$ ) which must be satisfied by the stress tensor.

This is not the only condition. We also need to satisfy the conservation of angular momentum and thus the sum of all moments with respect to any axis must be zero. Using a similar approach as above, denoting forces on the surface  $\vec{T}$  and body forces  $\vec{F}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\vec{r} \times \vec{T}) dS + \int_V (\vec{r} \times \vec{F}) dV, \\ 0 &= \int_S \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{mk} n_m dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV, \\ 0 &= \int_V \frac{\partial \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{mk}}{\partial x_m} + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV, \\ 0 &= \int_V \varepsilon_{ijk} \left( \sigma_{mk} \frac{\partial x_j}{\partial x_m} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + x_j F_k \right), \end{aligned}$$

where we have rewritten the cross products using the Levi-Civita symbol  $\varepsilon^6$ , used Gauss's theorem and expanded the derivative. We can notice that the term

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_m}$$

is one if  $i = m$  (as this would be  $\partial x/\partial x$ ) and zero otherwise. A tensor behaving in this way is known as the Kronecker delta  $\delta_{ij}$  and its effect within the summation is essentially to *rename* the index  $j \rightarrow i$  (or vice versa). Using this we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \varepsilon_{ijk} \left( \sigma_{jk} + x_j \left( \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + F_k \right) \right) dV, \\ 0 &= \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV, \\ 0 &= \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}, \end{aligned}$$

where we obtained the second line by noticing that the expression multiplied by  $x_j$  is the same as in the condition above (34). Expanding the last expression, from the properties of  $\varepsilon$  we get  $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{13} = \sigma_{31}$ , i.e.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , that is the stress tensor is symmetric.

### Spherical coordinates

Until now we only concerned ourselves with Cartesian coordinates but for our problem these are not particularly useful. We can approximate the egg as an object with cylindrical symmetry, but for now, let's look at an even simpler case of spherical symmetry. To do this we simply need to transform the equation (34) to spherical coordinates. We do this by transforming the stress tensor and applying the derivatives<sup>7</sup> and we obtain the three equations (neglecting any body forces (i.e. the weight of the eggshell))

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left( 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\tau_{r\theta}}{\text{tg } \theta} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \theta_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\text{tg } \theta} + 3\tau_{r\theta} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left( 3\tau_{r\varphi} + \frac{2\tau_{\sigma\varphi}}{\text{tg } \theta} \right). \end{aligned}$$

Well, great. We now have 3 partial differential equations and 6 unknown functions. Let's step back now and look at the situation we are trying to address. We will simplify the problem first by assuming cylindrical symmetry, that is all functions are independent of  $\varphi$ . We immediately know that we can remove all  $\partial/\partial\varphi$  terms, but that is not all. This symmetry also sets  $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$  (these would have to be independent of  $\varphi$  and integrating them along  $\varphi$  cannot produce a

<sup>6</sup>This is a totally antisymmetric tensor, giving 1 when  $ijk$  is an even permutation of 123 (e.g. 123), -1 when it is an odd permutation of 123 (e.g. 132) and 0 otherwise.

<sup>7</sup>or look up tensor divergence in spherical coordinates online

net force). This does simplify the equations greatly, but unfortunately, it also removes the last equation completely, leaving us with

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg} \theta} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\operatorname{tg} \theta} + 3\tau_{r\theta} \right). \end{aligned}$$

That's looking a lot better. For boundary conditions, we know that the both inner and outer surfaces are free apart from the area where we are applying pressure and, neglecting air pressure on both sides, that gives us on both free surfaces

$$\sigma_{rr}(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = \sigma_{rr}(R + t, \theta) = \tau_{r\theta}(R + t, \theta) = 0,$$

where  $t$  is the thickness of the shell and  $R$  is its inner radius.

To get the first actual result, we will now consider the shell in the limit  $t \rightarrow 0$ , so that the shell becomes two dimensional. This essentially removes all dependency on  $r$ , as  $r = R$  becomes a constant within the shell, but it also means the shell is unable to support the shear stress  $\tau_{r\theta}$  or the normal stress  $\sigma_{rr}$  as the initial conditions means  $\tau_{r\theta}(R, \theta) = \sigma_{rr}(R, \theta) = 0$  and we only have  $r = R$ . Plugging this into our equations, we obtain in this 2D case

$$\begin{aligned} -\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\operatorname{tg} \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Combining these we obtain an ordinary differential equation for  $\sigma_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{d\theta} + 2 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\operatorname{tg} \theta} &= 0, \\ \int \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{\theta\theta}} &= - \int \frac{d\theta}{\operatorname{tg} \theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{C}{\sin^2 \theta}, \sigma_{\varphi\varphi} = - \frac{C}{\sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Here  $C$  is a constant depending on the external force. For simplicity, we assume that the external force is applied over circular regions near the axis in the normal direction (i.e. contributing to  $\sigma_{rr} = p$  for  $\theta < \theta_0$  or  $\theta > \pi - \theta_0$  where  $\theta_0$  sets the size of the area where the force is applied). Looking at our solutions, we see that applying the force over a very small area will result in very large stresses due to the  $1/\sin^2 \theta$  term.

We can see that compressive stress along the meridians leads to tensile stress along the circumference. We can also see that this 2D solution is incomplete, in the 3D reality, the shear stress  $\tau_{r\theta}$  will be non-zero. We could consider a fuller version of this pseudo-2D theory by assuming there is constant stress within a very thin shell, with the stress given as a function of  $\theta$  and integrating the equations through the shell. This will give us 2 equations for the 3 remaining stresses from the continuity equations, but that is obviously insufficient to get a solution. The remaining piece of the puzzle is the actual equations for mechanical deformation, which would introduce substantial new complications.

To get the constant  $C$ , all we need to consider is the total force from the spherical cap where external pressure exists, giving

$$2\pi \sin^2 \theta_0 R \sigma_{\theta\theta}(\theta_0) t = -F$$

$$\frac{C}{\sin^2 \theta_0} = -\frac{F}{2\pi R t \sin^2 \theta_0}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta) = -\frac{F}{2\pi R t \sin^2 \theta} \quad \theta > \theta_0,$$

where  $F$  is the total external force applied to the sphere.

As we established, ceramics typically have much lower strength in tension than in compression, and so in this model, the egg will break due to the induced tensile stress.

The fact that compression along meridians results in tension along the parallels can also be seen from the geometry alone, but we would not expect this stress to peak at  $\theta_0$ . This is the consequence of a 2D model which cannot support the inevitable shear stress at  $\theta_0$ . The  $F/R$  dependence here is interesting, if we think of pressure instead of force  $F \propto pR^2$ , we get the stress as  $\sigma_{\theta\theta} \propto pR$ , so small spheres (or small local radii of curvature) resist pressure better.

There is another mode of failure for the sphere, as we mentioned earlier: it could become unstable and buckle. This happens in the area where the pressure is applied, so our earlier solution is not applicable, but the fact that the geometry results in circumferential tension is still true, and this tension will help stiffen the surface and prevent buckling. Extending this line of thought, we know that surfaces with smaller radii of curvature will result in a faster conversion to circumferential tension and will therefore be less likely to buckle under stress. Putting this all together, we know that the egg will be stronger when pressure is applied along the long axis.

### Membrane theory

What we obtained is known a model from membrane theory of shells and, backtracking a bit, we saw that shear stresses were necessarily zero. This makes sense as the shell has zero thickness, but this means all external forces must act tangentially to the surface, which is a major limitation as we are definitely not applying a force tangentially in in this case.

This explains why we got maximum hoop tension at  $\theta_0$ : if the force here is applied tangentially it will require high hoop tension to hold it together (imagine the forces on a cylinder holding gas under pressure).

### Full spherical solution

As the 2D model did not provide a satisfactory solution, we could look for a full solution, using the equations for elastic deformation and getting estimates for elastic properties of the shell online. The general idea is to use the 3 continuity equations above, write the six stress-strain relations and six equations relating strains and deformations in the 3 directions in the chosen coordinates, getting a set of 15 partial differential equations. Requiring cylindrical symmetry then sets  $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$  and simplifies the set of equations somewhat. As it happens a full analytical solution exists for the spherical case, where stresses can be expressed as an infinite series of Legendre's polynomials. This solution is described fully in <sup>8</sup>.

<sup>8</sup><https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1081286518783217>

## *Surface curvature and strength*

As we know intuitively and as we have seen in the 2D model, eggs are strongest along their axis. This relates to how the stresses get distributed in the material, the higher the curvature the faster it can convert shear stress to tensile and compressive stress in the shell (think about the directions of these forces), so sharper eggs will be stronger in this direction. Existing curvature can also help with the bending induced tension on the inner surface.

### *Real eggs*

As with any biological material, the shell is not uniform. Its thickness and composition has some variation and the shell contains a lot of microcracks and other material imperfections which interrupt the flow of stress in the material (as force cannot be transmitted across a crack), creating local concentrations of stress which lead to failure. As a result, predicting the strength or even the failure mode is not an easy matter as real eggs will likely break in a location where shell imperfections cause stress concentration or where an already present microcrack grows to split the shell.

While these surface imperfections might seem like a simple thing, their impact is actually profound. Their essentially random presence means that fracture is effectively a stochastic process, with the probability of a fracture happening on any given point (i.e. in any given volume element) depending on the stress at this point, for how long this stress is applied (as cracks can grow), and even how quickly the stress was applied. This means that the probability of failure at any point will depend on the volume which is under near-critical stress. Assuming a fixed thickness and other parameters, this volume becomes proportional to the surface area, so a structure that can distribute a load faster will have a smaller surface exposed to near-critical stress, reducing the probability of failure. This contributes to why hoop tension, which acts on a very large part of the egg might be more significant than higher tension at the top in some cases.

### *Conclusions*

Considering all we discussed here and the experimental results cited earlier, we can now answer the questions from the problem statement.

- Eggs are easily broken if a force is applied rapidly to a small area in the normal direction, but their shape can effectively distribute a spread shear load into normal stress where the shell is much stronger.
- Eggs are strongest along their axis as higher curvature more effectively distributes applied stress.
- *Most* eggs will likely fail due to induced hoop tension as the ceramic is much weaker in tension than in compression, but predicting the failure mode for an individual egg is near impossible due to large variation in eggs and the presence of material defects.

*Filip Ayazi*  
filip@fykos.cz



## Úloha V.E ... neklamou nás?

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte kapacitu libovolné baterie (například tužkové AA) a porovnejte ji s deklarovanou hodnotou.

## Teorie

Kapacita je fyzikální vlastnost elektrických součástek, která udává, jaký náboj  $Q$  je daná součástka schopna pojmout při určitém napětí  $U$ , matematicky<sup>9</sup>

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (35)$$

Je to tedy konstanta úměrnosti mezi pojatým nábojem a napětím.

Známe-li časovou závislost proudu  $I(t)$  procházejícího určitým obvodem, můžeme celkový průchozí náboj určit integrací jako

$$\Delta Q = \int_t I(t) dt.$$

Uvažme baterii při napětí  $U_1$  a nesoucí odpovídající náboj  $Q_1$ . Baterii nyní vybijeme proudem s časovou závislostí  $I(t)$  na napětí  $U_2$  a náboj  $Q_2$ . Zřejmě platí

$$Q_1 = \Delta Q + Q_2 = \int_1^2 I(t) dt + Q_2.$$

Pro kapacitu baterie pak platí

$$C = \frac{Q_1}{U_1} = \frac{\int_1^2 I(t) dt + Q_2}{U_1}. \quad (36)$$

Kapacita baterie je dle (35) invariantní vůči jejímu celkovému napětí, platí tedy také

$$C = \frac{Q_2}{U_2},$$

odkud vyjádřením  $Q_2$  a dosazením do (36) získáme

$$C = \frac{\int_1^2 I(t) dt + CU_2}{U_1}.$$

Kapacitu pak vyjádříme jako

$$C = \frac{\int_1^2 I(t) dt}{U_1 - U_2}. \quad (37)$$

Stejná úvaha platí i pokud baterii nabíjíme z náboje  $Q_1$  na náboj  $Q_2$ .

Pokud bychom tento výraz měřili pro  $N$  baterií (kondenzátorů) zapojených sériově s jednotlivými kapacitami  $C_i$ , pak pro celkovou kapacitu platí

$$C = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right)^{-1}.$$

<sup>9</sup>Wikipedia: Capacitance [online][cit. 2.3.2021], Dostupné z <https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitance>

speciálně pokud mají všechny baterie stejnou kapacitu, můžeme tuto kapacitu vyjádřit z celkové kapacity jako

$$C_i = NC. \quad (38)$$

Pro zpracování chyb využíváme především zákona přenosu chyb pro nezávislé proměnné<sup>10</sup>

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial P_i} \sigma_{P_i} \right)^2}, \quad (39)$$

kde hledáme chybu proměnné  $V$ , jež závisí na  $N$  proměnných  $P_i$ .

### Pomůcky a přístroje

Čtyři AAA baterie typu *SHO 750 Orion*, multimetr *UNI-T M840D* s třímístným displayem, nepřesnost<sup>11</sup>  $\pm (0,5\% + 3)$  pro napětí a  $\pm (0,8\% + 3)$  pro proud, nabíječka *Voltcraft IPC-1L*, motůrek, žárovka, mobil s aplikací *FrameLapse*, počítačová aplikace *OpenShot Video Editor*

### Výsledky měření

Měření probíhalo za přibližně normální pokojové teploty. Přesné podmínky však nebyly měřeny, neboť nemají na experiment velký vliv.

Pro měření jsme sestavili sériový obvod složený ze baterie *SHO 750 Orion*, žárovky (modelující jednoduchý elektrický odpor) a Ampèremetru. Poté jsme měření opakovali se stejným obvodem, do kterého jsme ovšem zapojili dvě baterie *SHO 750 Orion* místo jedné. Označíme počet baterií v obvodu  $N$  a dále budeme na jednu resp. dvě baterie v obvodu referovat jako na "zdroj".

Na počátku jsme na zdroji změřili napětí. Hodnoty lze nalézt v tabulce 1. Nepřesnost měření činí nepřesnost voltmetru, přičemž jsme měřili na rozsahu do 9,99 V.

Tab. 1: Počáteční napětí

$N$	1	2
$\frac{U}{V}$	$1,38 \pm 0,04$	$2,60 \pm 0,04$

Poté jsme obvodem nechali procházet proud, přičemž jsme v pravidelných časových intervalech zaznamenávali hodnotu proudu (natáčeli jsme display Ampèremetru mobilem s aplikací *FrameLapse*, poté jsme pomocí programu *OpenShot Video Editor* z indexu snímků ve videu získali čas, kterému snímek od začátku měření odpovídá). Hodnoty proudu pro jednotlivé časy lze nalézt v tabulkách 2 a 3. Časy jsme měřili po pěti sekundách. Pro přehlednost však neuvádíme v tabulce všechny naměřené hodnoty. Tam, kde je mezi časy větší rozestup než 5 sekund, tekli mezi těmito časy v každém změřeném čase proud odpovídající pozdějšímu z časů. Nepřesnost odpovídá nepřesnosti Ampèremetru.

Pro námi naměřené hodnoty proudu vyšší než 0,62 A odpovídá nepřesnost cca  $\pm 0,04$  A, pro nižší z naměřených hodnot odpovídá  $\pm 0,03$  A.

Tab. 2: Závislost  $I(t)$  pro jednu baterii.

$\frac{t}{s}$	$\frac{I}{A}$
1	0,75
2	0,73
3	0,73
4	0,72
5	0,73
6	0,72
56	0,72

Pro získání celkového náboje jsme proud numericky časově zintegrovali dle vzorce

$$\int_1^2 I(t) dt \approx \sum_i \frac{I(t_i) + I(t_{i+1})}{2} (t_{i+1} - t_i)$$

Výsledné hodnoty prošlých nábojů  $\Delta Q$  jsou pak v tabulce 4.

Přičemž nejistoty jsme určili ze zákona přenosu chyb (39) dle vztahu

$$\sigma_Q^2 = \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{\sqrt{2}} \sigma_I \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{I(t_{i+1}) + I(t_i)}{\sqrt{2}} \sigma_t \right)^2 \approx \left( \frac{t_{\max}}{\sqrt{2}} \sigma_I \right)^2,$$

kde  $t_{\max}$  je maximální čas (poslední čas měření) a  $\sigma_I$  je nejistota určení proudu, přičemž jsme druhý sčítanec zanedbali, neboť nejistota v určení času je zanedbatelná oproti nejistotě v určení hodnoty proudu a v případě dvou baterií jsme aproximovali nejistotu určení proudu jako  $\sigma_I = 0,035$  A, neboť pro většinu naměřených hodnot proudu byla nejistota blízko této hodnoty (celkově fluktovala mezi 0,03 A a 0,04 A).

Poté jsme z obvodu vyjmuli zdroj a změřili jeho svorkové napětí, jehož hodnoty jsou pak v tabulce 5. Zdrojem nejistot je opět nejistota voltmetru.

Ze vzorce (37) jsme pak vypočítali celkovou kapacitu zdroje. V případě dvoubateriového zdroje byly použité baterie stejného typu a přibližně stejně opotřebované, předpokládáme tedy, že měly stejnou kapacitu. Hodnoty kapacity jedné baterie jsme pak dopočítali dle vzorce (38) a zachycuje je tabulka 6. Nejistotu určení kapacity zdroje jsme určili ze zákona přenosu chyb(39) dle vztahu

$$\sigma_C = C \sqrt{\left( \frac{\sigma_Q}{Q} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_U}{U1} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_U}{U2} \right)^2},$$

přičemž nejistotu určení kapacity jedné baterie jsme pak určili vynásobením této hodnoty počtem bateriek ve zdroji.

<sup>10</sup>Wikipedia: Propagation of uncertainty [online][cit. 2.3.2021], Dostupné z [https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation\\_of\\_uncertainty](https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty)

<sup>11</sup>Nepřesnost přístroje se nám bohužel nepodařilo dohledat, použili jsme tedy nepřesnost podobného přístroje jiné vývojové řady.

Tab. 3: Závislost  $I(t)$  pro dvě baterie.

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{I}{\text{A}}$
0	0,97
5	0,64
25	0,63
60	0,79
215	0,62
255	0,61
275	0,60
280	0,59
285	0,57
290	0,49
295	0,39
300	0,35
305	0,33
310	0,31
315	0,30
320	0,29
325	0,28
330	0,27
335	0,26
340	0,25
350	0,24
355	0,23
400	0,23

Výrobce udává parametry baterie takové, že při maximálním (uvedeném) napětí  $U_v = 1,25\text{ V}$  pojme baterie náboj  $Q_v = 750\text{ mAh} = 2700\text{ C}$ . Z rovnice (35) jsme pak vypočítali údajnou kapacitu baterie jako

$$C_v = 2160\text{ F}.$$

### Diskuze

V případě dvoubateriového zdroje se naměřená hodnota kapacity shoduje v rámci nepřesnosti s hodnotou udávanou výrobcem. V případě jednobateriového zdroje tomu tak není.

Jedním z důvodů může být opotřebovanost. Použité baterie nebyly zcela nové, ale již se několikrát nabíjely a vybíjely, což mohlo změnit jejich efektivní kapacitu.

Nejistotu určení času jsme zanedbali, neboť čas byl měřen velmi přesnými (v rámci naší použité škály několika hodin) hodinami v mobilu.

Odpor baterie se mohl zahříváním během experimentu měnit, ale tento jev pravděpodobně nebude signifikantní. Volba žárovky jakožto modelu odporu nebyla příliš vhodná, žárovka se totiž procházejícím proudem zahřívá výrazně více, čímž se mohou měnit její vodivostní vlastnosti.

Tab. 4: Prošlé náboje

$N$	1	2
$\frac{\Delta Q}{C}$	$198,2 \pm 7,7$	$211,4 \pm 8,4$

Tab. 5: Konečná napětí

$N$	1	2
$\frac{U_2}{V}$	$1,27 \pm 0,04$	$2,40 \pm 0,04$

Pro spolehlivé ověření, zda výrobce uvádí správnou hodnotu kapacity by však bylo vhodné provést násobně více měření dané řady baterií. Cíle experimentu lze také přesněji dosáhnout použitím nových baterií.

### Závěr

Naměřené kapacity zdroje jsou při použití jedné baterie

$$C_1 = (1\,802 \pm 93) \text{ F}$$

a

$$C_2 = (2\,114 \pm 97) \text{ F},$$

při použití dvoubateriového zdroje.

Údajná kapacita zdroje z parametrů udávaných výrobcem je pak

$$C_v = 2\,160 \text{ F}.$$

*Martin Vaněk*  
martin@fykos.cz

## Úloha V.S ... rezonance a tlumení

10 bodů; (chybí statistiky)

1. Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce  $u(x, t)$  z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde  $v$  je fázová rychlost a  $\Gamma$  je tlumící koeficient. Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo  $k$ . Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence  $\omega$ , fázové rychlosti  $v$  a koeficientu  $\Gamma$ , musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?

Tab. 6: Kapacita zdroje

$N$	1	2
$\frac{C}{F}$	$1802 \pm 93$	$2114 \pm 97$

2. Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti  $L$  od stěny jej chytíme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou  $\lambda$  udržujeme v napětí  $T$  ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybuje, platí  $u_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$ . Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Nalezněte takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj.  $T$ ,  $\lambda$ ,  $L$ ,  $A$  a  $\omega_0$ . Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

*Štěpán si hrál se švihadlem.*

1. Fourierovská substituce nahrazuje časové derivace mocninami  $-i\omega$  a prostorové derivace mocninami  $ik$ , kde  $k$  je vlnové číslo a  $\omega$  frekvence vlnění. Platí tedy

$$-\omega^2 \hat{u} = -v^2 k^2 \hat{u} + i\Gamma k \hat{u},$$

kde  $\hat{u} = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$  je komplexní výchylka. Vydělíme rovnici  $-v^2 \hat{u}$ , a dostaneme

$$k^2 - i \frac{\Gamma}{v^2} k - \frac{\omega^2}{v^2} = 0.$$

Doplněním na čtverec dostáváme

$$k^2 - i \frac{\Gamma}{v^2} k - \frac{\Gamma^2}{4v^4} + \frac{\Gamma^2}{4v^4} - \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

$$\left(k - i \frac{\Gamma}{2v^2}\right)^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\Gamma^2}{4v^4} = \frac{1}{4v^4} (4\omega^2 v^2 - \Gamma^2).$$

Nyní máme dvě možnosti – buď  $4\omega^2 v^2 > \Gamma^2$ , a pak

$$k - i \frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{1}{2v^2} \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}$$

$$k = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}}{2v^2}$$

a vlnové číslo  $k$  je tedy komplexní. Další možnost je  $4\omega^2 v^2 \leq \Gamma^2$ , a pak

$$k - i \frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{i}{2v^2} \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2}$$

$$k = \frac{i}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2}\right)$$

a vlnové číslo  $k$  je tedy čistě imaginární. Pro závislost komplexní výchylky v tomto případě tedy platí

$$\hat{u} = u_0 e^{ikx - i\omega t} = u_0 e^{-i\omega t} e^{-\frac{x}{2v^2} \left( \Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2} \right)}.$$

To znamená, že závislost amplitudy na souřadnici  $x$  je čistě exponenciální, a neobsahuje tedy žádné uzle. Hledanou podmínkou je tedy podmínka (po provedení odmocniny a předpokladu, že  $\Gamma, \omega$  i  $v$  jsou kladné)

$$\Gamma \geq 2\omega v$$

2. Druhá část úlohy používá vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Můžeme rovnou určit disperzní vztah pomocí Fourierovské substituce

$$-\omega^2 = \frac{T}{\lambda} (-k^2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} |k|.$$

Řešení, které budeme předpokládat, má komplexní tvar

$$\hat{u} = B e^{ikx - i\omega t} + C e^{-ikx - i\omega t},$$

kde  $B$  a  $C$  jsou komplexní konstanty. Předpokládáme kartézskou soustavu souřadnic v níž je osa  $x$  shodná s klidovým stavem švihadla, a bod, kde se švihadlem pohybujeme, se nachází v  $x = 0$ . Okrajové podmínky jsou následující. Nejprve musíme zajistit, že konec švihadla u stěny zůstává nehybný, tedy platí

$$\hat{u}(L, t) = 0.$$

Dále druhý konec švihadla osciluje s naší rukou

$$\operatorname{Re} \hat{u}(0, t) = A \cos(\omega_0 t).$$

Z první podmínky plyne

$$B e^{ikL - i\omega t} + C e^{-ikL - i\omega t} = 0$$

$$C = -B e^{i2kL}$$

a řešení má tedy tvar

$$\hat{u}(x, t) = B \left( e^{ikx - i\omega t} - e^{-ikx - i\omega t + i2kL} \right).$$

Abychom mohli vyhodnotit druhou podmínku, zaveďme  $B = |B| e^{i\varphi}$ , kde  $\varphi$  je fáze  $B$ . Pak můžeme psát

$$\hat{u}(x, t) = |B| \left( e^{i(kx - \omega t + \varphi)} - e^{i(-kx - \omega t + 2kL + \varphi)} \right).$$

Druhá podmínka je tedy

$$\operatorname{Re} \hat{u}(0, t) = A \cos(\omega_0 t) = |B| (\cos(-\omega t + \varphi) - \cos(-\omega t + 2kL + \varphi)) .$$

S použitím sčítacích vzorců pro sinus a cosinus můžeme odvodit

$$\cos(-\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

a

$$\begin{aligned} \cos(-\omega t + \varphi + 2kL) &= \cos(\omega t) [\cos(\varphi) \cos(2kL) - \sin(\varphi) \sin(2kL)] \\ &\quad + \sin(\omega t) [\sin(\varphi) \cos(2kL) + \cos(\varphi) \sin(2kL)] \end{aligned}$$

a platí tedy

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t) &= |B| [\cos(\omega t) (\cos(\varphi) (1 - \cos(2kL)) + \sin(\varphi) \sin(2kL)) \\ &\quad + \sin(\omega t) (\sin(\varphi) (1 - \cos(2kL)) - \cos(\varphi) \sin(2kL))] . \end{aligned}$$

Můžeme odvodit, že tato rovnost může platit pro všechny časy pouze v případě, že  $\omega = \omega_0$  a dále

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) (1 - \cos(2kL)) - \cos(\varphi) \sin(2kL) &= 0 \\ \sin(\varphi) 2 \sin^2(kL) &= 2 \cos(\varphi) \sin(kL) \cos(kL) \\ \operatorname{tg}(\varphi) &= \operatorname{cotg}(kL) . \end{aligned}$$

Jelikož platí  $\operatorname{cotg}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , platí

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - kL + n\pi$$

kde  $n$  je celé číslo. Platí tedy

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t) &= |B| \cos(\omega_0 t) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} - (kL - n\pi)\right) (1 - \cos(2kL)) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{2} - (kL - n\pi)\right) \sin(2kL) \right] \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - (kL - n\pi)\right) &= \sin(kL - n\pi) = (-1)^n \sin(kL) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - (kL - n\pi)\right) &= \cos(kL - n\pi) = (-1)^n \cos(kL) \\ 1 - \cos(2kL) &= 2 \sin^2(kL) \\ \sin(2kL) &= 2 \sin(kL) \cos(kL) . \end{aligned}$$

máme

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t) &= |B| \cos(\omega_0 t) (-1)^n (2 \sin^3(kL) + 2 \sin(kL) \cos^2(kL)) = \\ &= |B| \cos(\omega_0 t) (-1)^n 2 \sin(kL) . \end{aligned}$$



Můžeme tedy určit amplitudu

$$|B| = \frac{A}{2 \sin(kL)} (-1)^n$$

$$|B| = \frac{A}{2 \sin(kL)} (-1)^n.$$

Máme tedy řešení

$$\hat{u}(x, t) = \frac{A}{2 \sin(kL)} (-1)^n \left( e^{i(kx - \omega_0 t + \frac{\pi}{2} - kL + n\pi)} - e^{i(-kx - \omega_0 t + 2kL + \frac{\pi}{2} - kL + n\pi)} \right)$$

$$\hat{u}(x, t) = \frac{A}{2 \sin(kL)} (-1)^n \left( e^{i(k(x-L) - \omega_0 t)} i (-1)^n - e^{i(-k(x-L) - \omega_0 t)} i (-1)^n \right)$$

$$\hat{u}(x, t) = \frac{A}{2 |\sin(kL)|} (-1)^{2n} i \left( e^{ik(x-L)} - e^{-ik(x-L)} \right) e^{-i\omega_0 t}.$$

Jelikož  $(-1)^{2n} = 1$  a  $e^{ik(x-L)} - e^{-ik(x-L)} = 2i \sin(k(x-L))$ , platí

$$\hat{u}(x, t) = \frac{-A}{\sin(kL)} \sin(k(x-L)) e^{-i\omega_0 t}$$

Vezměme tedy reálnou část a dosadíme za  $k$  z disperzního vztahu, abychom dostali řešení

$$u(x, t) = \frac{A}{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}} \omega_0 L\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}} \omega_0 (L-x)\right) \cos(\omega_0 t).$$

Řešení má divergující amplitudy v případě, že

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}} \omega_0 L\right) = \sin(kL) = 0.$$

To nastává pokud

$$kL = m\pi.$$

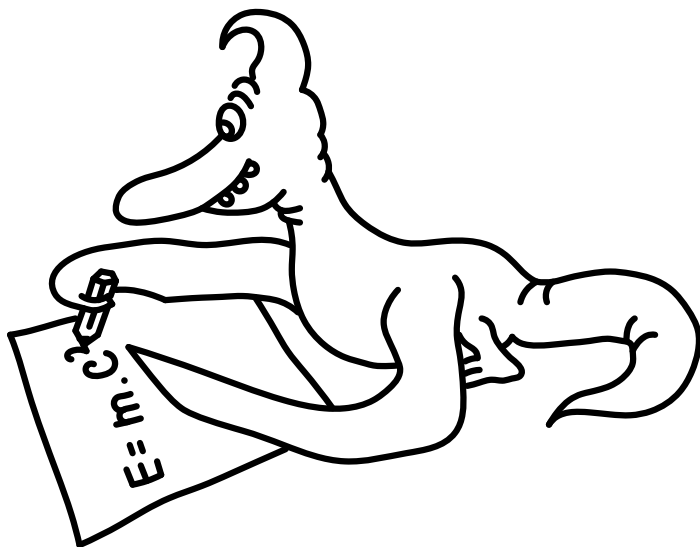
kde  $m$  je celé číslo. Vlnovou délku lze vyjádřit jako  $l = \frac{2\pi}{k}$ , a platí tedy

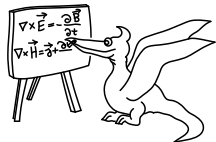
$$\frac{2\pi}{l} L = m\pi$$

$$ml = 2L$$

Divergující amplituda (která odpovídá resonanci) se tedy objevuje v případě, kdy celočíselný násobek vlnové délky tvoří délku  $2L$ , tedy pro celé číslo  $m$  lze psát

$$l = \frac{2L}{m}$$





## Seriál: Polarizace

V minulém díle seriálu jsme se zabývali vlněním, které se odehrávalo pouze v jednom rozměru – struna mohla oscilovat pouze vertikálně, částice reprezentoval pouze jedna vlnová funkce atp. Nyní se zkusíme zamyslet nad tím, co se stane, když se vlnění objevuje ve více rozměrech, které jsou navzájem provázány. Například, můžeme přemýšlet nad oscilacemi struny v obou směrech kolmých na směr napnutí struny, nebo přemýšlet nad tím, jaké vlny mohou existovat v nabyté tekutině, kde kromě hustoty a teploty se může měnit i nábojová hustota. Jako konkrétní příklad si ukážeme pomalé vlnění v plazmě, které splňuje rovnice takzvané magnetohydrodynamiky. Začneme ale pomaleji, se strunou, která může kmitat ve dvou směrech.

### Švihadlo

Uvažujme nyní švihadlo napnuté mezi dvěma body, takže napětí ve švihadle je  $T$ . Délková hustota švihadla je  $\rho$ . Zvolme soustavu souřadnic tak, aby švihadlo bylo napnuté podél osy  $x$ , a aby jeden úchyt švihadla ležel v počátku soustavy souřadnic. Necht  $u$  je výchylka švihadla z rovnovážné polohy ve vertikálním směru (podél osy  $z$ ), a  $v$  je výchylka švihadla v horizontálním směru (podél osy  $y$ , tj. kolmo na směr napětí). Mohli bychom zopakovat stejné odvození jako v minulém díle, avšak musíme brát v potaz dva rozměry, ve kterých se švihadlo může pohybovat. To lze nejlépe učinit pomocí vektorového formalismu.

Víme, že vertikální sílu působící na element délky  $dx$  v jednom rozměru šlo určit jako  $dF = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ . Lze předpokládat, že oscilace v dalším směru budou nezávislé (nijak nezávisí na oscilacích v původním směru), a pro sílu v druhém směru bude platit  $dF' = T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$ , a tedy pro celkovou sílu můžeme zapsat

$$d\mathbf{F} = T \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} dx,$$

kde  $\mathbf{u} = (u \ v)^T$  a  $d\mathbf{F} = (dF \ dF')$ . Druhý Newtonův zákon pak lze zapsat jako

$$d\mathbf{F} = dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}.$$

Toto je náš dvourozměrný analog vlnové rovnice. Důležité je, že zachováváme fakt, že výchylky v obou směrech jsou stále funkce pouze jedné proměnné času a jedné proměnné pozice, a tedy můžeme provést Fourierovskou substituci jak jsme zvyklí, což vede k vektorové rovnici

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{u}} = \frac{T}{\rho} (-k^2) \hat{\mathbf{u}},$$

kde  $\hat{\mathbf{u}}$  je komplexní vektorová výchylka, a platí  $\mathbf{u} = \text{Re } \hat{\mathbf{u}}$ , a reálnou část bereme z každého komponentu zvlášť. Toto je vlastně soustava algebraických rovnic, kterou lze zapsat v maticové podobě jako

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $\hat{u}$  a  $\hat{v}$  jsou komplexní výchylky v jednotlivých směrech. Ve Fourierovské substituci jsme předpokládali tvary řešení

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_0 e^{ikx - i\omega t} \\ \hat{v} &= v_0 e^{ikx - i\omega t} \end{aligned}$$

kde  $u_0$  a  $v_0$  jsou potenciálně komplexní konstanty. Jelikož exponenciální část je pro oba směry shodná, můžeme maticovou rovnici upravit na

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zde použijeme již známý formalismus z normálních modů – takové to rovnice mají netriviální řešení pouze pokud determinant této matice je nula, tedy

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{array} \right| &= 0 \\ \left( \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \right)^2 &= 0 \\ \omega &= \pm \sqrt{\frac{T}{\rho}}k. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy stejný disperzní vztah jako v jednorozměrném případě. Matice se v tomto případě stává nulovou maticí, a tedy  $u_0$  i  $v_0$  jsou zcela neomezeny, tj. vlnění můžeme zapsat jako libovolnou lineární kombinaci

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = u_0 e^{\pm ikx - i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 e^{\pm ikx - i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde směry propagace obou vln mohou být nezávislé. Těmto odlišným vlnám se říká polarizace daného vlnění, a vektor

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

nazýváme polarizační vektor. Jak přesně určíme konstanty  $u_0$  a  $v_0$ ? Uvažujme nyní konkrétní případ – necht se švihadlo pohybuje jako při klasickém přeskokování, tj. obíhá okolo rovnovážné polohy tak, že jednotlivé elementy se pohybují konstantní úhlovou rychlostí po kružnicích, jejichž poloměr se zvyšuje směrem ke středu švihadla, kde dosahuje maxima. V čase  $t = 0$  lze amplitudu švihadla zapsat jako

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $A$  je reálná konstanta. Důležitá je také rychlost švihadla v čase  $t = 0$ , kterou můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\omega \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{pmatrix}.$$

Jak tento pohyb zachytit pomocí polarizací? U stojatého vlnění už jsme zvyklí, že zpravidla lze zachytit pohyb jako superpozici dvou vln propagujících se v opačných směrech. Navrhujeme tedy

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ikx - i\omega t} + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} e^{-ikx - i\omega t}.$$

V čase  $t = 0$  tedy platí

$$\hat{\mathbf{u}}(x, 0) = \begin{pmatrix} u_0 e^{ikx} + u_1 e^{-ikx} \\ v_0 e^{ikx} + v_1 e^{-ikx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_0 + u_1) \cos(kx) + i(u_0 - u_1) \sin(kx) \\ (v_0 + v_1) \cos(kx) + i(v_0 - v_1) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Reálnou část zde můžeme určit jako

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1) \cos(kx) + (\operatorname{Re}(iu_0) - \operatorname{Re}(iu_1)) \sin(kx) \\ (\operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1) \cos(kx) + (\operatorname{Re}(iv_0) - \operatorname{Re}(iv_1)) \sin(kx) \end{pmatrix}$$

Abychom splnili počáteční podmínky, potřebujeme  $k = \frac{\pi}{L}$  a dále

$$\operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1 = 0$$

$$\operatorname{Re}(iu_0) - \operatorname{Re}(iu_1) = A$$

$$\operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1 = 0$$

$$\operatorname{Re}(iv_0) - \operatorname{Re}(iv_1) = 0.$$

Jelikož pro obecné komplexní číslo platí

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$$

můžeme psát

$$\operatorname{Re} u_0 = -\operatorname{Re} u_1$$

$$\operatorname{Re} v_0 = -\operatorname{Re} v_1$$

$$\operatorname{Im} v_0 = \operatorname{Im} v_1$$

$$\operatorname{Im} u_0 = \operatorname{Im} u_1 - A$$

Toto jsou první čtyři rovnice pro celkem osm neznámých (reálné a imaginární části  $u_{0,1}$  a  $v_{0,1}$ ). Další čtyři rovnice lze odvodit z rovnice pro počáteční rychlost. Platí

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = (-i\omega) \hat{\mathbf{u}}$$

a tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \omega \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}(-iu_0) + \operatorname{Re}(-iu_1)) \cos(kx) + (\operatorname{Re} u_0 - \operatorname{Re} u_1) \sin(kx) \\ (\operatorname{Re}(-iv_0) + \operatorname{Re}(-iv_1)) \cos(kx) + (\operatorname{Re} v_0 - \operatorname{Re} v_1) \sin(kx) \end{pmatrix}$$

A máme tedy čtyři rovnice

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} u_0 &= -\operatorname{Im} u_1 \\ \operatorname{Re} u_0 &= \operatorname{Re} u_1 \\ \operatorname{Im} v_0 &= -\operatorname{Im} v_1 \\ \operatorname{Re} v_0 &= \operatorname{Re} v_1 + A\end{aligned}$$

dosazením z předchozích rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} u_1 - A &= -\operatorname{Im} u_1 \\ -\operatorname{Re} u_1 &= \operatorname{Re} u_1 \\ \operatorname{Im} v_1 &= -\operatorname{Im} v_1 \\ -\operatorname{Re} v_1 &= \operatorname{Re} v_1 + A\end{aligned}$$

A máme tedy

$$\begin{aligned}v_1 &= -\frac{A}{2} \\ u_1 &= i\frac{A}{2} \\ u_0 &= -i\frac{A}{2} \\ v_0 &= \frac{A}{2}\end{aligned}$$

A celkový časový vývoj lze popsat výrazem

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \left( -i\frac{A}{2}e^{ikx} + i\frac{A}{2}e^{-ikx} \right) e^{-i\omega t} = A \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\ i\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \end{pmatrix} e^{-i\omega t},$$

tudíž v reálné výchylce

$$\mathbf{u}(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

### Vlny v plazmatu

Rozměr, ve kterém vlny oscilují, ovšem nemusí být pouze prostorová dimenze, může se jednat o jiný stupeň volnosti vlnění. Tuto skutečnost budu reprezentovat na modelu plazmatu. Předpokládejme, že plazma se skládá z nabitých částic, elektronů a jader. Budeme uvažovat pohyby pomalé, tj. budeme předpokládat, že jakákoliv dynamika elektronů ustala a vedla k vybalancování elektrického pole. Dále budeme zkoumat pouze 1D plasmu, tj. budeme předpokládat, že veškeré hodnoty se mění v prostoru pouze v závislosti na souřadnici  $x$  kartézského souřadnicového systému. V takovém případě jsou rovnice magnetohydrodynamiky rovnice, které musíme vyřešit. Jedná se o soustavu dvou skalárních diferenciálních rovnic a dvou vektorových diferenciálních rovnic. Postupně je nyní představíme.

První rovnicí je tzv. rovnice spojitosti, která zajišťuje, že hmota plazmatu se nikam neztrácí. Její tvar je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0$$

kde  $\rho$  je hustota plazmatu a  $\mathbf{v} = (v_x \ v_y \ v_z)^T$  je rychlost plazmatu. Další skalární rovnici je stavová rovnice plazmatu. Tu je obecně složitě určit přesně, takže zde používáme pouze obecnou fenomenologickou stavovou rovnici, která má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

kde  $P$  je tlak v plazmatu, a  $\gamma$  je konstanta. Pro ideální plyn by třeba tato konstanta referovala k Poissonově konstantě. Tato rovnice vlastně zajišťuje adiabatičnost stlačování plazmatu.

Můžeme tedy přejít k vektorovým rovnicím. První z nich je tzv. Navier-Stokesova rovnice, která reprezentuje druhý Newtonův zákon v tekutinách

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{B} = (B_x \ B_y \ B_z)^T$  je magnetické pole v plazmatu, a  $\times$  značí vektorový součin. Těto rovnici je o něco složitější porozumět, ale vnímejme ji tak, že na pravé straně jsou síly na jednotku objemu tekutiny, jednak kvůli nerovnosti tlaku, a jednak kvůli magnetickému poli, zatímco na levé straně je popsána změna hybnosti tekutiny v daném bodě.

Poslední vektorová rovnice je tzv. indukční rovnice, která plyne z Maxwellových rovnic v našem modelu, a má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\partial x} \\ \frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Přímé řešení těchto rovnic je zřejmě extrémně těžký úkol - jedná se o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že jedno relativně triviální řešení se sestává z klidového stavu  $\rho = \rho_0$ ,  $P = P_0$ ,  $\mathbf{v} = 0$  a  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ , kde veličiny označené indexem 0 jsou konstanty jak v čase tak v prostoru. Kolem tohoto klidového stavu můžeme rovnice linearizovat, abychom získali vlnové rovnice.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že magnetické pole  $\mathbf{B}_0$  leží v rovině  $xz$ , tedy  $B_{0y} = 0$ . Dále předpokládejme, že obecné veličiny lze zapsat jako  $\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t)$ , kde  $|\rho_1| \ll |\rho_0|$  pro všechny časy a pozice, a obdobně pro ostatní veličiny. Dosazením těchto veličin můžeme provést linearizaci našich rovnic, pokud zachováme členy pouze do prvního řádu "malých" veličin. Mysleme přitom, že  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ .

První rovnice je linearizovaná jako

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = 0$$

Druhá rovnice vyžaduje složitější úpravu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{1x} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{P_0 + P_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma}\right) = 0$$

Platí

$$(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = \rho_0^{-\gamma} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-\gamma} \approx \rho_0^{-\gamma} \left(1 - \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0}\right)$$

Pokud tedy v zachováváme pouze členy do prvního řádu, dostáváme

$$\rho_0^{-\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( P_0 - P_0 \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0} + P_1 \right) = 0$$

Jelikož  $P_0$  je konstantní, a ostatní členy v druhé závorce jsou již prvního řádu "malosti", pouze časová derivace zůstane v našem přiblížení do prvního řádu, a platí tedy (pro nenulovou hustotu  $\rho_0$ )

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$$

Navier-Stokesovu rovnici rozepíšeme v jednotlivých komponentech. Dále zavedeme úhel  $\alpha$ , který určuje odchylku pole  $\mathbf{B}_0$  od směru osy  $x$ , platí tedy  $B_{0x} = \cos \alpha B_0$ ,  $B_{0z} = \sin \alpha B_0$ , kde  $B_0 = |\mathbf{B}_0|$ . Pak můžeme psát (zde již bez odvození, žádné zvláštní triky zde nejsou)

$$\rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} B_0 \sin \alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos \alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos \alpha \frac{\partial B_{1y}}{\partial x}$$

Obdobným způsobem můžeme odvodit tři rovnice plynoucí z indukční rovnice

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = B_0 \cos \alpha \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} - B_0 \sin \alpha \frac{\partial v_{1x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = B_0 \cos \alpha \frac{\partial v_{1y}}{\partial x}$$

Celkem máme tedy osm rovnic pro osm neznámých - 3 komponenty  $\mathbf{B}_1$ , 3 komponenty  $\mathbf{v}_1$ , a dále  $\rho_1$  a  $P_1$ .

Ve vektorových rovnicích jsme záměrně psali komponent  $y$  jako poslední. Důvodem je, že tyto rovnice jsou oddělené od ostatních rovnic - neznámé  $v_{1y}$  a  $B_{1y}$  se vyskytují pouze v nich. To znamená, že vlnění popsané těmito dvěma rovnicemi je nezávislé na vlnění které je popsáno zbytkem rovnic.

Nyní budeme dále postupovat již standardně - provedeme Fourierovskou substituci pro všechny veličiny typu  $\rho_1(x, t) \rightarrow \hat{\rho}_1 = A e^{ikx - i\omega t}$ , kde  $A$  je komplexní konstanta a  $\hat{\rho}_1$  je komplexní výchylka (v tomto případě hustoty). Všech osm rovnic pak lze zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} ikB_0 \cos \alpha & i\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\omega\rho_0 & -ik\frac{1}{\mu_0}B_0 \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega\rho_0 & 0 & \frac{ik}{\mu_0}B_0 \sin \alpha & 0 & ik \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega\rho_0 & -\frac{ik}{\mu_0}B_0 \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ikB_0 \sin \alpha & -ikB_0 \cos \alpha & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik\rho_0 & 0 & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega\frac{\gamma P_0}{\rho_0} & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \\ \hat{v}_{1x} \\ \hat{v}_{1z} \\ \hat{B}_{1z} \\ \rho_1 \\ P_1 \end{pmatrix} =$$



kde jsme vypustili triviální rovnici  $-i\omega\hat{B}_{1x} = 0$ , ze které plyne zkrátka  $\hat{B}_{1x} = 0$ . Opět zde vydíme, že první dva komponenty polarizačního vektoru (který má celkem 7 komponentů!) jsou nezávislé na ostatních. Abychom určili disperzní vzorec, je potřeba určit determinant této velké matice. Zde se budeme věnovat pouze bloku 2x2, který odpovídá nezávislému vlnění v  $v_{1y}$  a  $B_{1y}$ . Tyto vlny nazýváme Alfvénovy vlny.

Determinant matice 2x2 určíme snadno

$$\begin{vmatrix} ikB_0 \cos \alpha & i\omega \\ -i\omega\rho_0 & -ik\frac{1}{\mu_0}B_0 \cos \alpha \end{vmatrix} = k^2 \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \cos^2 \alpha - \omega^2 \rho_0,$$

a z podmínky, že determinant musí být roven nule, vychází disperzní vztah

$$\omega = \frac{B_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} k$$

To tedy znamená, že vlny mají lineární disperzi (stejnou jako světlo nebo zvuk) s fázovou rychlostí

$$v_p = \frac{B_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}.$$

Platí tedy, že čím více je pole  $\mathbf{B}_0$  odklopené od směru  $x$ , tím pomaleji se vlny propagují. Pro určení polarizačních vektorů dosadíme tento výsledek zpět do maticové rovnice, kde ale zapíšeme pouze blok 2x2

$$\begin{pmatrix} ikB_0 \cos \alpha & i\frac{kB_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \\ -i\frac{kB_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0}} \sqrt{\rho_0} & -i\frac{kB_0 \cos \alpha}{\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

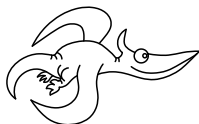
Z čehož plyne, že možné řešení je

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\frac{\nu}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \end{pmatrix}$$

kde  $\nu$  je komplexní konstanta s rozměrem rychlosti. Oscilace v  $B_{1y}$  tedy probíhají v přímé antifázi k oscilacím  $v_{1y}$ , a jsou větší pro nižší hustotu plazmatu  $\rho_0$ .

## Závěrem

V tomto seriálu jsme postupně objevovali systémy, které se všemožně kmitají, vlní a oscilují v blízkém okolí lokálního minima energie. Svět vln ovšem není omezen pouze na malé oscilace, existují i typy vlnění, které splňují některé charakteristiky (například zachovávají tvar při pohybu), ale od jednoduchých vln se odlišují. Například, rovnice, která je popisuje, může být nelineární, takže například vlny musí mít konkrétní amplitudu. Nelineární rovnice jsou ovšem výrazně složitější na řešení, zejména kvůli tomu, že nemůžeme uplatnit princip superpozice. Takové systémy se stále zkoumají v současnosti. Nicméně lineární vlnění a oscilace jsou stále velmi často přítomné v mnoha systémech, a věříme, že zkušenosti nabyté v tomto seriálu se vám budou velmi hodit ve vaší fyzikální kariéře.



## Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%	“%	Σ
		100	110	264									
1. Lukáš Linhart	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	79	62	148								
2. Vojtěch Kadeřábek	G Mensa, Praha	–	68	44	105								
3. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	–	60	34	82								
4. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	–	70	22	52								
5. David Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	–	59	20	47								
6. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	–	70	19	45								
7. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	57	16	39								
8. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	53	13	32								
9. Sandeep Kandi	IMSA, Aurora, USA	–	41	11	27								
10. Lukáš Jarábek	G Grösslingová, Bratislava	–	39	10	23								
11. Vítězslav Lamoš	G, Omská, Praha	–	57	9	21								
12. Boris Pasterňak	Leaf Academy	–	86	8	19								
13. Kristián Matuš	G, Nový Jičín	–	48	6	15								
14. Samuel Ševčík	G, Jeseník	–	59	5	13								
15.–16. Jakub Ebringer	G, Blansko	–	56	4	10								
15.–16. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	37	4	10								
17. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	–	57	3	8								
18. Krishna Kumar Sah	Awasiya Public School	–	47	3	7								
19. Isuru Liyanawaduge	D.S.Senanayake College	–	100	3	6								
20. Patrik Pecina	G F. Palackého, Val. Mez.	–	31	2	5								
21. Václav Vinkler	Wichterlovo G, Ostrava	–	17	1	3								

## Kategorie druhých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>V</b>	<b>„%</b>	<b>“%</b>	<b>Σ</b>
		100	110	264									
<b>1.</b> <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	–	85	50	120								
<b>2.</b> <i>Pavel Provazník</i>	G Dašická, Pardubice	–	65	48	115								
<b>3.</b> <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	75	48	114								
<b>4.–5.</b> <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	–	74	41	99								
<b>4.–5.</b> <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	–	56	41	99								
<b>6.</b> <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	70	39	94								
<b>7.</b> <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	–	63	39	93								
<b>8.</b> <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	–	42	35	84								
<b>9.</b> <i>Vojtěch Juza</i>	G, Litomyšl	–	57	31	74								
<b>10.</b> <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	–	58	28	67								
<b>11.</b> <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	–	51	27	65								
<b>12.</b> <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	–	84	25	59								
<b>13.</b> <i>Daniela karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	49	23	56								
<b>14.</b> <i>Evan Kim</i>	Tesla STEM High School, USA	–	82	23	54								
<b>15.–16.</b> <i>Vít Brázda</i>	G Dašická, Pardubice	–	80	22	53								
<b>15.–16.</b> <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	32	22	53								
<b>17.</b> <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	–	77	21	51								
<b>18.</b> <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	–	74	20	48								
<b>19.</b> <i>Vojtěch Kysilka</i>	G, Roudnice nad Labem	–	51	18	43								
<b>20.</b> <i>Karolína Šedová</i>	G Jana Keplera, Praha	–	91	17	41								
<b>21.</b> <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	–	54	17	40								
<b>22.</b> <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	–	73	15	37								
<b>23.</b> <i>Ioana Milea</i>	CN Mihai Eminescu, Romania	–	61	15	35								
<b>24.</b> <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	52	13	32								
<b>25.</b> <i>Ivy Qin</i>	RC Palmer Sec. Sc.	–	42	12	28								
<b>26.–27.</b> <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	–	65	11	26								
<b>26.–27.</b> <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	–	52	11	26								
<b>28.</b> <i>Jakub Genčur</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	96	9	22								
<b>29.</b> <i>Jiří Mládek</i>	G, Soběslav	–	32	8	18								
<b>30.</b> <i>Ashmit Dutta</i>	Wayzata High School	–	80	7	16								
<b>31.</b> <i>Jan Cícha</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	–	42	6	15								
<b>32.</b> <i>Pragun Pudukoli</i>	Sishu Griha HS, India	–	58	6	14								
<b>33.</b> <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	50	5	12								
<b>34.</b> <i>Petr Vitko</i>	G Teplice	–	37	4	10								
<b>35.</b> <i>Barbora Peřinová</i>	Česká zemědělská akademie Humpol	–	31	4	9								
<b>36.</b> <i>Jakub Koňárek</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	73	3	8								
<b>37.</b> <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	–	100	3	6								
<b>38.</b> <i>Damián Tancoš</i>	G, Kukučínova, Poprad	–	14	2	5								
<b>39.</b> <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	–	36	2	4								
<b>40.</b> <i>Timotej Marhefka</i>	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	5	1	2								

Kategorie třetích ročníků




*Kategorie čtvrtých ročníků*

<b>jméno</b> <i>Student</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>V</b>	<b>„%</b>	<b>“%</b>	<b>Σ</b>
		100	100	240									
<b>1.</b> Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	–	86	65	155								
<b>2.</b> Vojtěch Kuchař	Wichterlovo G, Ostrava	–	78	58	140								
<b>3.</b> Šimon Kurz	G Ludka Pika, Plzeň	–	63	45	109								
<b>4.</b> Marek Milička	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	79	41	99								
<b>5.</b> Štěpán Pressl	G J. Vrchlického, Klatovy	–	73	40	96								
<b>6.–7.</b> Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	–	64	37	89								
<b>6.–7.</b> Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	95	37	89								
<b>8.</b> Tomáš Volf	G Jura Hronca, Bratislava	–	59	32	77								
<b>9.</b> Dominik Farhan	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	66	32	76								
<b>10.</b> Daniel Fousek	G, Špitálská, Praha	–	54	28	66								
<b>11.</b> Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	66	25	59								
<b>12.</b> Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	–	75	24	57								
<b>13.–14.</b> Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	–	73	21	51								
<b>13.–14.</b> Matúš Kolenka	G Konštantínova, Prešov	–	39	21	51								
<b>15.</b> Marek Broul	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	66	15	35								
<b>16.</b> Viduranga Landers	D.S.Senanayake College	–	58	13	30								
<b>17.–18.</b> Lívia Čerešňová	ŠpMNDaG, Bratislava	–	53	12	29								
<b>17.–18.</b> Aneta Pjatkanová	G, Kralupy	–	57	12	29								
<b>19.–20.</b> Mona Alizadeh	St Paul's GS	–	70	11	26								
<b>19.–20.</b> Marika Kosohorská	G J. Vrchlického, Klatovy	–	90	11	26								
<b>21.</b> Andrew Pun	M. Garneau Collegiate Institute	–	85	10	23								
<b>22.</b> Martin Opat	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	72	9	21								
<b>23.–24.</b> Log Franc	Cumberland Valley HS, USA	–	69	8	20								
<b>23.–24.</b> Agra Navaratne Navaratne	D.S.Senanayake College	–	48	8	20								
<b>25.–26.</b> Aahana Aahana	CHIREC International School	–	40	8	19								
<b>25.–26.</b> Ondřej Sladký	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	70	8	19								
<b>27.–28.</b> Jaroslav Grulich	Jiráskovo G, Náchod	–	81	7	17								
<b>27.–28.</b> Konstantin Tripunovskí	American HS Skopje, Macedonia	–	36	7	17								
<b>29.–30.</b> Zsolt Beke	G H. Selyeho Komárno	–	56	6	15								
<b>29.–30.</b> Riley Lofgren	Lambert High School, USA	–	100	6	15								
<b>31.</b> Makar Kuznietsov	Lviv Lyceum	–	67	5	12								
<b>32.–34.</b> Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	–	91	4	10								
<b>32.–34.</b> Gauri Shankar H	Pondicherry University	–	48	4	10								
<b>32.–34.</b> Patrik Kočan	G M. Hattalu, Trstená	–	28	4	10								
<b>35.–36.</b> Gauri Shankar H	Pondicherry University	–	21	4	9								
<b>35.–36.</b> Martin Polyácko	G Alejová, Košice	–	75	4	9								
<b>37.</b> Jakub Kliment	G Tajovského, B. Bystrica	–	73	3	8								
<b>38.</b> Dávid Benko	G L. Svobodu, Humenné	–	44	3	7								
<b>39.–40.</b> Martina Daňková	Gymnázium Brno-Bystrc	–	83	2	5								
<b>39.–40.</b> Jan Klivan	G, Dačice	–	45	2	5								
<b>41.</b> Kian Kyars	Harry Ainlay Highschool	–	67	2	4								
<b>42.–44.</b> Youssef Abdelmoneim	STEM High School, Egypt	–	50	1	3								
<b>42.–44.</b> Philopater Gabra	STEM High School, Egypt	–	5	1	3								
<b>42.–44.</b> Le Vu Neumann	G Opatov, Praha	–	100	1	3								
<b>45.</b> Anna Kaiserová	SPŠS a OA Kadaň	–	40	1	2								
<b>46.–49.</b> Hussein Hassan	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								
<b>46.–49.</b> Islam Hassan	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								
<b>46.–49.</b> Andrew Henin	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								
<b>46.–49.</b> Ahmed Jaheen	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								



**FYKOS**  
**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**18000 Praha 8**

www: <https://fykos.cz>  
e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/FYKOS>

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.