Úloha II.2 ... loď na obzoru

3 body; (chybí statistiky)

Kačka a Katka sledují loď plující konstantní rychlostí do přístavu. Kačka stojí na skále nad přístavem, přičemž má oči ve výšce $h_1 = 20\,\mathrm{m}$ nad hladinou. Katka se nachází dole pod skálou, její oči jsou v nadmořské výšce $h_2 = 1{,}7\,\mathrm{m}$. Pokud Katka zahlédne na obzoru vrchol blížící se lodi se zpožděním $t = 25\,\mathrm{min}$ oproti Kačce, za jak dlouho loď vysoká $h = 30\,\mathrm{m}$ dopluje do přístavu? Zemi považujte za dokonalou kouli se známým poloměrem.

Radka vzpomínala na dovolenou u moře.

Nákres situace je na obrázku 1. Bod S označuje střed Země a body P_1, P_2 jsou polohy očí prvního a druhého pozorovatele. Bod V_1 značí polohu vrcholu blížící se lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne první pozorovatel. Analogicky bod V_2 je vrchol lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne druhý pozorovatel.

Ve chvíli, kdy se na obzoru vrchol lodi objeví, je přímka procházející okem pozorovatele a vrcholem lodi tečnou k zemskému povrchu. Její bod dotyku označíme T_1 pro prvního pozorovatele, respektive T_2 pro druhého pozorovatele.

Abychom zjistili, za jak dlouho loď dopluje, potřebujeme znát její rychlost a vzdálenost od přístavu po zemském povrchu. Nejprve vyjádříme vzdálenost lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne první pozorovatel. K tomu využijeme znalost poloměru Země a velikost úhlu $\varphi_1 = |P_1SV_1|$. Pro tu zřejmě platí

$$\varphi_1 = |P_1ST_1| + |T_1SV_1| = \theta_1 + \rho_1\,,$$

kde jsme čistě pro přehlednost označili příslušné úhly řeckými písmeny. Velikosti úhlů θ_1 a ρ_1 dokážeme zjistit z příslušných pravoúhlých trojúhelníků

$$\cos\theta_1 = \frac{r}{r+h_1} \quad\Rightarrow\quad \theta_1 = \arccos\frac{r}{r+h_1}\,,$$
$$\cos\rho_1 = \frac{r}{r+h} \quad\Rightarrow\quad \rho_1 = \arccos\frac{r}{r+h}\,.$$

Na tomto místě můžeme využít aproximace – protože je $h \ll r$, platí

$$\frac{r}{r+h} = \left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{r}\,.$$

Zároveň víme, že pro malé úhly lze použít vzorec $\cos x = 1 - x^2/2$. Kombinací obou vztahů dostáváme

$$\rho_1 = \arccos\frac{r}{r+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{r}}\,,\quad \theta_1 \approx \sqrt{\frac{2h_1}{r}}\,.$$

Celková velikost úhlu φ_1 bude

$$\varphi_1 = \arccos\frac{r}{r+h_1} + \arccos\frac{r}{r+h} \approx \frac{\sqrt{2h_1}+\sqrt{2h}}{\sqrt{r}}\,.$$

Vyjádříme-li tento úhel v radiánech a pak ho vynásobíme poloměrem Země, dostaneme povrchovou vzdálenost lodi v okamžiku, kdy její vrchol zahlédne první pozorovatel. Tu si označíme $s_1 = r\varphi_1$. Obdobným způsobem můžeme vyjádřit i povrchovou vzdálenost lodi s_2 v okamžiku, kdy její vrchol zahlédne druhý pozorovatel. Dostaneme

$$s_2 = r\varphi_2 = r\left(\arccos\frac{r}{r+h_2} + \arccos\frac{r}{r+h}\right) \approx \frac{\sqrt{2h_2}+\sqrt{2h}}{\sqrt{r}}\,.$$

Ze zadání víme, že loď se pohybuje rovnoměrně čili má konstantní rychlost v. Získáme ji vydělením rozdílu povrchových vzdálenosti $(s_1 - s_2)$ rozdílem časů t

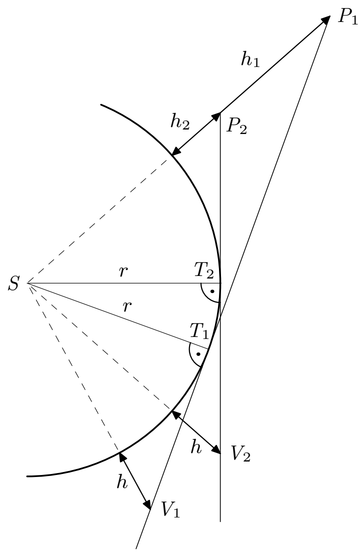
$$v = \frac{s_1 - s_2}{t} \approx \frac{\sqrt{2r}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)}{t}\,.$$

Nyní již známe povrchovou vzdálenost lodi od přístavu i rychlost. Čas, za který loď dopluje, spočítáme jako jejich podíl. Musíme si však určit od jakého okamžiku čas počítáme. Chceme-li určit čas doplutí lodi od okamžiku, kdy ji spatřil druhý pozorovatel, dostaneme ho jako

$$t_2 = \frac{s_2}{v} \approx \frac{\sqrt{h_2} + \sqrt{h}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} t\,.$$

Všimněme si, že výsledek vůbec nezávisí na poloměru Země (za předpokladu, že platí $r \gg h, h_1, h_2$). Po dosazení hodnot ze zadání vychází $t_2 \doteq 53{,}5\,\mathrm{min}$. Pokud bychom se rozhodli počítat čas doplutí od okamžiku, kdy loď spatřil první pozorovatel, dostaneme obdobný vztah

$$t_1 = \frac{s_1}{v} \approx \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} t \doteq 78{,}5\,\mathrm{min}\,.$$



Obr. 1: Povrch Země s tečnými paprsky.

Radka Křížová
radka.krizova@fykos.cz