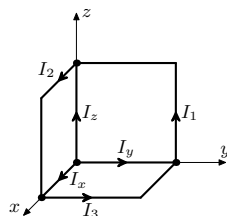


## Úloha II.5 ... detektor magnetických nestacionarit

10 bodů; průměr 4,85;

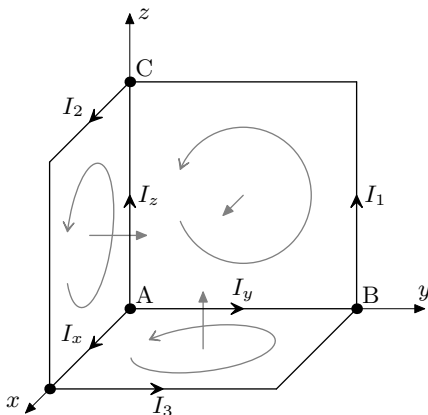
řešilo 27 studentů

Elektrický obvod znázorněný na obrázku může sloužit jako detektor nestacionárního magnetického pole. Jedná se o devět hran krychle tvořených elektrickým drátem. Elektrický odpor jedné hrany je  $R$ . Nacházeli se tato konstrukce v nestacionárním homogenním magnetickém poli, které má pro jednoduchost konstantní směr a jeho velikost se mění jen pomalu, tečou na vyznačených místech proudy  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Určete ze znalosti těchto proudů směr a časovou změnu velikosti magnetického pole v prostoru.



Vašek si říkal, že řešitelé budou mít z úlohy na elektromagnetickou indukci radost.

Odkud se berou proudy v našem detektoru? Konstrukci detektoru si lze představit jako systém spojených vodivých smyček. Jako nezávislé smyčky lze např. zvolit smyčky ležící v jednotlivých rovinách definovaných vždy dvěma kartézskými osami. Budeme hovořit o smyčkách 1, 2, resp. 3, myslíme-li smyčku ležící v rovině  $yz$ ,  $zx$ , resp.  $xy$ . Tok magnetického pole těmito jednotlivými smyčkami se s časem mění, a proto se podle zákona elektromagnetické indukce na těchto smyčkách indukuje elektromotorické napětí, které zapříčiní vznik elektrického proudu. Úloha je komplikovaná v tom, že máme složitější systém, na kterém se projevuje elektromagnetická indukce, a je třeba si s ním správně poradit.



Obr. 1: Schéma zapojení včetně znázornění směru kladných napětí a orientace normál k jednotlivým stěnám.

Předpokládejme, že na jednotlivých smyčkách se nám indukovalo elektromotorické napětí  $U_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$ , přičemž směr kladného napětí  $U_i$  je vyznačen na obrázku 1 šipkou uvnitř odpovídající smyčky. Pro doplnění, směr napětí nám udává, jakým směrem je urychlován kladný náboj ve smyčce. Elektromotorická napětí  $U_i$  nebudeme do obr. zakreslovat a to z toho důvodu, že ho nelze zakreslit jako jeden zdroj v každé smyčce. Uvědomme si, že při řešení vzniklého elektrického obvodu záleží na tom, jak bychom náhradní zdroj do smyčky umístili. Napětí  $U_i$  se ve skutečnosti rozdělí do všech větví každé smyčky a to třeba i nerovnoměrně.

Zákon elektromagnetické indukce nám pouze říká, jaké je celkové elektromotorické napětí  $U_i$  pro danou smyčku. Tato informace nám však stačí. Za předpokladu, že jsou časové změny pomalé, můžeme uvažovat kvazistacionární přiblížení a přistoupit tak ke druhému Kirchhoffovu zákonu. Jeho aplikací na smyčku 1 dostaneme

$$U_1 - RI_y - 2RI_1 + RI_z = 0. \quad (1)$$

Druhý, třetí a čtvrtý člen představují po řadě úbytek napětí na větvích AB, BC a CA. V rámci kvazistacionárního přiblížení se nám také nikde v obvodu nemění nábojová hustota, a proto výsledný proud tekoucí do každého uzlu musí být nulový, neboli platí

$$I_x = I_3 - I_2, \quad I_y = I_1 - I_3, \quad I_z = I_2 - I_1. \quad (2)$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme

$$U_1 = R(4I_1 - I_2 - I_3). \quad (3)$$

Analogicky pro smyčky 2 a 3 dostaneme

$$U_2 = R(4I_2 - I_3 - I_1), \quad (4)$$

$$U_3 = R(4I_3 - I_1 - I_2). \quad (5)$$

Všimněme si, že tyto rovnice získáme z (3) cyklickou permutací  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Podobně v (2) se vyskytuje cyklická permutace  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ .

Nyní se podíváme kvalitativně na to, co nám říká o napětí  $U_i$  zákon elektromagnetické indukce. Říká, že napětí  $U_i$  je rovno záporně vzaté časové změně toku  $\Phi_i$  magnetického pole  $\mathbf{B}$  plochou  $\Sigma_i$  obepínající smyčku  $i$ , neboli zapsáno matematicky

$$U_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}. \quad (6)$$

Plocha  $\Sigma_i$  může být volena téměř libovolně, pro jednoduchost však volíme plochu rovinnou. Pak všechny  $\Sigma_i$  mají stejný povrch  $S$ . Navíc je pro zvolenou plochu důležité správně zvolit orientaci. Orientace plochy musí být zvolena „souhlasně“ s její hranicí, tj. smyčkou. Vzhledem k naší volbě kladného směru obíhání smyček je potřeba zvolit orientace normál k jednotlivým plochám, jak je znázorněno na obrázku 1. Pro volbu „souhlasně“ orientace si můžete pomoci pravou rukou. Při této volbě pak bude znaménko v rovnici (6) správně.

Magnetické pole je nestacionární a homogenní, a proto ho lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B} = B(t)\mathbf{n},$$

kde  $B(t)$  je časově závislá velikost magnetického pole a  $\mathbf{n}$  je konstantní, v každém bodě stejně orientovaný jednotkový vektor. Vzhledem k naší volbě souřadnic (viz obrázek 1) a vzhledem k tomu, že jsou námi zvolené plochy časově neměnné, je tok magnetického pole smyčkou 1 jednoduše roven

$$\Phi_1 = B_x(t)S,$$

kde  $B_x$  je  $x$ -ová komponenta magnetického pole. Z rovnice (6) pak plyne

$$U_1 = -S\frac{dB_x(t)}{dt}. \quad (7)$$

Výše zmíněnými cyklickými permutacemi dostaneme

$$U_2 = -S \frac{dB_y(t)}{dt}, \quad (8)$$

$$U_3 = -S \frac{dB_z(t)}{dt}. \quad (9)$$

Směr a orientaci magnetického pole v prostoru určíme pomocí standardní volby sférických úhlů  $\theta$  a  $\varphi$ . Úhel  $\theta$  měří odklon od osy  $z$  a  $\varphi$  je úhel v rovině  $xy$  měřený v kladném směru od osy  $x$ . Projekce magnetického pole do směrů jednotlivých os pak jsou

$$\begin{aligned} B_x(t) &= B(t) \sin \theta \cos \varphi, \\ B_y(t) &= B(t) \sin \theta \sin \varphi, \\ B_z(t) &= B(t) \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Úhly  $\theta$  a  $\varphi$  jsou dle zadání časově neměnné. Dosazením rovnic (10) do rovnic (7)-(9) dostaneme

$$U_1 = -S \frac{dB(t)}{dt} \sin \theta \cos \varphi, \quad (11)$$

$$U_2 = -S \frac{dB(t)}{dt} \sin \theta \sin \varphi, \quad (12)$$

$$U_3 = -S \frac{dB(t)}{dt} \cos \theta. \quad (13)$$

Z rovnic (11)-(13) chceme vyjádřit úhly  $\theta$  a  $\varphi$  a také časovou změnu velikosti magnetického pole. Jedná se vlastně o problém podobný transformaci kartézských souřadnic do sférických s tím rozdílem, že faktor  $-S \frac{dB(t)}{dt}$ , který hraje roli radiální souřadnice  $r$ , může nabývat kladných i záporných hodnot. Z rovnic (11)-(13) můžeme určit pouze směr magnetického pole a ne jeho orientaci, tj. můžeme určit pouze podél jakých přímk magnetické pole míří. Ukážeme, proč tomu tak je.

Uvažujme, že známe  $\frac{dB(t)}{dt}$  a je např. záporné. Potom faktor  $-S \frac{dB(t)}{dt}$  hraje roli kladné radiální souřadnice a z transformace do radiálních souřadnic nalezneme úhly  $\theta$  a  $\varphi$ . Stejně pravé strany rovnic (11)-(13) však dostaneme, pokud změníme znaménko  $\frac{dB(t)}{dt}$  a zároveň provedeme inverzi, tj. záměnu  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  a  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ . Přesvědčit se můžete sami dosazením a použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce. V našem případě to znamená, že nezjistíme rozdíl mezi prvním případem, kdy magnetické pole míří do orientovaného směru daného úhly  $\theta$  a  $\varphi$  a zároveň jeho velikost klesá, a mezi druhým případem, kdy má magnetické pole opačnou orientaci danou úhly  $\pi - \theta$  a  $\varphi + \pi$  a zároveň jeho velikost roste.

Z rovnic (11)-(13) na základě předchozí diskuze a na základě podobnosti transformace kartézských souřadnic do sférických dostáváme vztah pro velikost časové změny magnetického pole

$$\left| \frac{dB(t)}{dt} \right| = \frac{1}{S} \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$$

a vztah pro úhly udávající směr přímk, podél kterých míří magnetické pole,

$$\theta = \arccos \left( \frac{U_3}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}} \right),$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}(U_2, U_1),$$

kde funkce  $\text{atan2}$  představuje zobecnění funkce  $\arctg$ . Na závěr dosadíme za napětí  $U_i$  z rovnic (3)-(5), čímž dostaneme hledané vztahy

$$\left| \frac{dB(t)}{dt} \right| = \frac{R}{S} \sqrt{18(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - 14(I_1I_2 + I_2I_3 + I_3I_1)},$$

$$\theta = \arccos \left( \frac{4I_3 - I_1 - I_2}{\sqrt{18(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - 14(I_1I_2 + I_2I_3 + I_3I_1)}} \right),$$

$$\varphi = \text{atan2}(4I_2 - I_3 - I_1, 4I_1 - I_2 - I_3).$$

*Václav Mikeska*  
v.mikeska@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.