Úloha III.4 ... větrníkový katapult

6 bodů; průměr 3,43; řešilo 67 studentů

Malý myšák Joe se rád katapultuje z konce vrtule ventilátoru tak, že se jednoduše ve vhodnou dobu pustí a odletí. Kdy se má pustit, aby doletěl co nejdál? Vrtule má délku l a otáčí se s úhlovou rychlostí ω, přičemž rovina otáčení je kolmá na vodorovnou rovinu. Dodejme, že střed otáčení je ve výšce h nad zemí. *Honza má rád každého, kdo má rád katapulty.*

Zadání úlohy se dá chápat dvěma způsoby – můžeme se zajímat o to, při jakém úhlu myšák buď uletí největší vzdálenost nebo dopadne nejdál od sloupu ventilátoru.

Zaměřme se nejprve na první případ. Výšku myšáka nad zemí v čase vystřelení spočítáme jako součet délky sloupu a vrtule

$$h_0 = h - l\cos\varphi\,.$$

Úhel φ volíme tak, že při $\varphi = 0$ směřuje vrtule orientována svisle dolů. Orientace úhlu φ je pak standardní (proti směru hodinových ručiček). Kladný směr osy x volíme doprava. Při zanedbání odporu vzduchu bude vektor rychlosti po puštění

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega l\cos\varphi \\ \omega l\sin\varphi - gt \end{pmatrix}\,,$$

kde t je čas od okamžiku, ve kterém se myšák pustil vrtule. Jako počátek x-ové osy je výhodné zvolit bod, ve kterém se myšák nacházel v čase $t = 0$. Potom pro jeho souřadnice dostaneme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ h_0 + \int_0^t v_y(t')\,\mathrm{d}t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega l t\cos\varphi \\ h - l\cos\varphi + \omega l t\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}\,,$$

kde $y \neq v_y t$, jelikož v_y závisí na čase. Je tedy třeba integrovat, případně z hodin fyziky známe vzdálenost uraženou volně padajícím tělesem $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Pro čas dopadu platí $y(t) = 0$. Z této podmínky vyplývá

$$t_{1,2}(\varphi) = \frac{l\omega\sin\varphi \pm \sqrt{l^2\omega^2\sin^2\varphi - 2g\left(l\cos\varphi - h\right)}}{g}\,,$$

což jsou řešení kvadratické rovnice. Kořen se záporným znaménkem vychází záporně, a proto neodpovídá fyzikálnímu řešení, takže dále budeme pracovat jen s kladným časem t_1. Za tuto dobu myšák uletí vzdálenost x_1, pro kterou platí

$$x_1 = v_x t_1 = \omega l t_1\cos\varphi\,.$$

Dle nutné podmínky pro maximální vzdálenost

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

dostáváme rovnici pro úhel φ, pro který bude uletěná vzdálenost největší

$$0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \omega l\left(\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi + t_1\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)\,,$$

což po zderivování a zjednodušení vede na

$$0=\cos\varphi\left(\frac{l^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi+gl\sin\varphi}{\sqrt{l^2\omega^2\sin^2\varphi-2g\left(l\cos\varphi-h\right)}}+l\omega\cos\varphi\right)-$$
$$-\sin\varphi\left(\sqrt{l^2\omega^2\sin^2\varphi-2g\left(l\cos\varphi-h\right)}+l\omega\sin\varphi\right).$$

Tato rovnice nemá analytické řešení pro $\varphi=\varphi(l,\omega,g,h)$ a musíme se s tímto výsledkem spokojit. Jednu goniometrickou funkci můžeme nahradit druhou pomocí identity $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, čímž získáme racionální rovnici jen pro jednu proměnnou, například $\sin\varphi$. Po roznásobení a umocnění dostaneme polynom v této proměnné, který ale bude mít příliš vysoký stupeň na to, aby byl řešitelný analyticky (tj. větší než 4).

Pro představu můžeme dosadit hodnoty pro nějaký zcela obyčejný větrník. Například pro $l=$ $=1\,\mathrm{m}$, $\omega=1\,\mathrm{s^{-1}}$, $g=9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a $h=10\,\mathrm{m}$ vyjde 6 kořenů pro φ, z nichž dva jsou reálné. Největší vzdálenost dostaneme pro

$$\varphi_{\max}\doteq 3{,}08\doteq 176^\circ.$$

Pustí-li se myšák pod tímto úhlem, doletí do vzdálenosti

$$x_{\max}=v_x t_{\max}=\omega l t_{\max}\cos\varphi_{\max}\doteq -1{,}50\,\mathrm{m}\,,$$

kde záporné znaménko je čistě naše konvence směru osy. Všimněme si, že vyšel přibližně přímý úhel, který odpovídá téměř vodorovnému vektoru počáteční rychlosti. To je způsobeno relativně malou úhlovou rychlostí vzhledem k výšce stožáru. Pro dosažení maximální vzdálenosti je potom výhodné investovat většinu rychlosti do x-ové složky.

Druhý případ vyřešíme tak, že jako počátek x-ové osy zvolíme sloup ventilátoru. Vztah pro souřadnici myšáka po vypuštění v závislosti na čase proto přejde na

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l\sin\varphi+v_x t\\ h_0+\int_0^t v_y(t')\,\mathrm{d}t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l\sin\varphi+\omega l t\cos\varphi\\ h-l\cos\varphi+\omega l t\sin\varphi-\frac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}.$$

Čas letu t_1 v závislosti na φ bude pořád stejný, jenom se změní počátek souřadnicového systému. Pro určení hledaného úhlu znovu použijeme podmínku

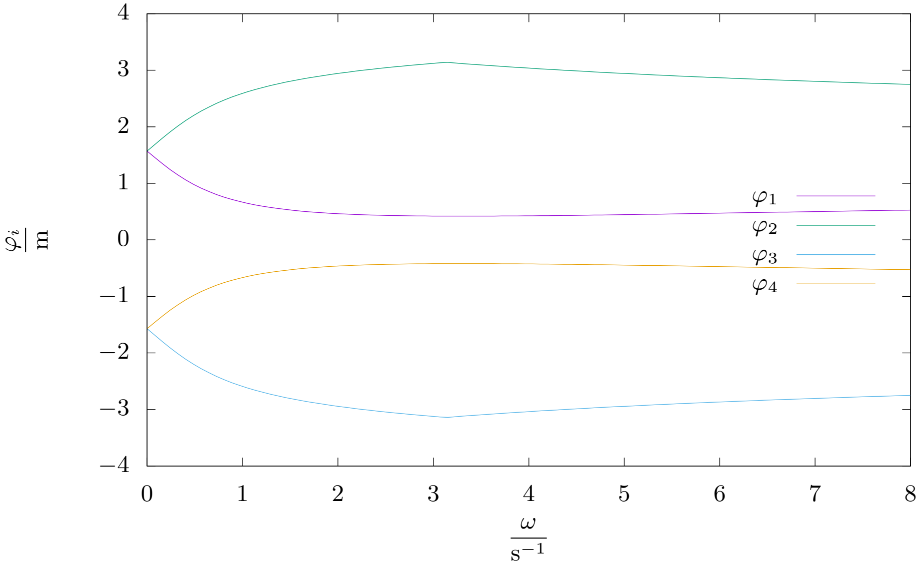
$$0=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=l\cos\varphi+\omega l\left(\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi+t_1\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right),$$

tentokrát s novým vztahem pro x-ovou souřadnici. Po zderivování a zjednodušení dostaneme

$$0=\cos\varphi\left[g+\omega\left(\frac{gl\sin\varphi+l^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2gh-2gl\cos\varphi+l^2\omega^2\sin^2\varphi}}+l\omega\cos\varphi\right)\right]-$$
$$-\omega\sin\varphi\left(\sqrt{2gh-2gl\cos\varphi+l^2\omega^2\sin^2\varphi}+l\omega\sin\varphi\right).$$

Roznásobení vede na kubickou rovnici pro $\cos\varphi$ ve tvaru

$$\left(g^2+2l^2\omega^4+2gh\omega^2\right)l\cos^3\varphi-\left(\left(g^2+2l^2\omega^4+2gh\omega^2\right)h-2gl^2\omega^2\right)\cos^2\varphi-$$
$$-\left(l^2\omega^2+4gh\right)l\omega^2\cos\varphi+hl^2\omega^4+2gh^2\omega^2=0\,.$$



Obr. 1: Závislost φ_i na ω.

Ta může mít obecně až tři kořeny. V tomto případě máme štěstí, neboť jeden kořen můžeme odhadnout, čímž rovnici rozložíme na lineární a kvadratický člen

$$\left(\cos\varphi - \frac{h}{l}\right)\left(\left(g^2 + 2l^2\omega^4 + 2gh\omega^2\right)\cos^2\varphi + 2gl\omega^2\cos\varphi - \left(l^2\omega^2 + 2gh\right)\omega^2\right) = 0\,.$$

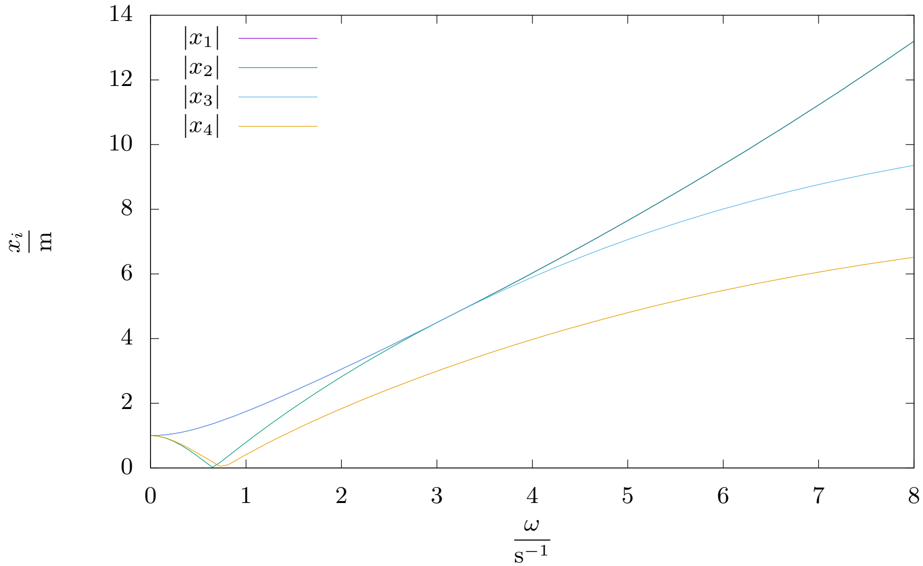
Pro každý rozumný ventilátor lze předpokládat $h > l$ čili tomuto kořenu neodpovídá žádný reálný úhel φ. Pokud by odpovídal, nejspíš by se stejně jednalo o minimum. Protože funkce cos není prostá, dostaneme ze zbývajících dvou kořenů čtyři řešení

$$\varphi_1 = \arccos\frac{A - gl\omega^2}{B}\,,\qquad \varphi_4 = -\arccos\frac{A - gl\omega^2}{B}\,,$$
$$\varphi_2 = \arccos\frac{-A\ - gl\omega^2}{B}\,,\quad \varphi_3 = -\arccos\frac{-A\ - gl\omega^2}{B}\,,$$

kde

$$A = \sqrt{g^2l^2\omega^4 + \omega^2\left(g^2 + 2l^2\omega^4 + 2gh\omega^2\right)\left(l^2\omega^2 + 2gh\right)}\,,$$
$$B = g^2 + 2l^2\omega^4 + 2gh\omega^2\,.$$

Toto jsou body podezřelé z extrémů. Může se jednat o lokální extrémy, inflexní body, nebo o úplně normání body (při odvozování kubické rovnice jsme dělali neekvivalentní úpravy, například umocňování). Pro jistotu bychom mohli vyšetřit druhé derivace, ale to by bylo zbytečně pracné a nejspíš by nám stejně nevyšlo nic konkrétního. Dále proto budeme postupovat tak, že pro jednotlivé úhly φ_i spočítáme vzdálenosti x_i a z nich vybereme tu největší. Uvědomme



Obr. 2: Závislost $|x_i|$ na ω.

si, že souřadnice x může být jak kladná, tak záporná, takže nás ve skutečnoti zajímá veličina $|x|$.

Nejdříve ještě ověřme, zda mají výsledné úhly fyzikální smysl. Výrazy v argumentu arccos jsou vždy v absolutní hodnotě menší než 1, což je v pořádku, jinak by nespadaly do defičního oboru funkce arccos. Ta je prostá a klesající s hodnotami $\left\langle \pi, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ pro interval $\langle -1, 0)$ a s hodnotami $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$ pro interval $(0, 1\rangle$. Označme si kvadranty 1 až 4, kde první přísluší $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, druhý $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atd. Z nerovností $A > gl\omega^2 > 0$ a $B > 0$ je patrné, že úhel φ_1 bude vždy v kvadrantu 1, zatímco φ_2 bude v kvadrantu 2.

Jelikož $\varphi_3 = -\varphi_2$ a $\varphi_4 = -\varphi_1$, budou vždy v kvadrantech 3 resp. 4. Intuice nám napovídá, že úhel φ_4 by nikdy neměl být ten, pro který myšák doletí nejdál. Zkusme si tedy podobně jako v první části vypočítat úhly a vzdálenosti pro různé hodnoty parametrů. Protože ale tentokrát máme analytické řešení, můžeme je počítat například jako funkce parametru ω. Ostatní hodnoty si znovu zvolíme $l = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $h = 10\,\mathrm{m}$.

Výsledné vzdálenosti jsme zobazili v grafu na obrázku 2. Jak je vidět, naše intuice byla správná. Vzdálenost x_4 není nikdy maximální. Vzdálenost x_1 je oproti tomu vždy maximální. Pro malé rychlosti otáčení je další maximální vzdálenost x_3, ale když se úhlová rychlost zvětšuje, tak se postupně stane maximální vzdáleností x_2. Také je velice zajímavé, že vždy existují dvě stejně velká maxima, jedno odpovídající letu doprava (x_1) a jedno doleva (x_2 nebo x_3).

Odpovídající úhly φ_i jsou na obrázku 1.

Jan Střeleček
strelda@fykos.cz