

**Úloha III.P . . . vlnitý elektromagnetismus** 11 bodů; průměr 3,50; řešilo 26 studentů

Co kdyby přírodní zákony nebyly v celém vesmíru stejné? Co kdyby se nějak měnily s polohou? Zaměřme se na elektromagnetickou interakci. Jak minimálně by se konstanta v Coulombovém zákonu musela měnit se vzdáleností, abychom to mohli pozorovat? Jak bychom to pozorovali?

*Karel se moc díval na YouTube.*

Prvým krokem řešení je rozmyslet si, čo sa má vlastne podľa zadania diať. Coulombov zákon má tvar

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

budeme preto uvažovať priestorovú zmenu hodnoty permitivity vákuua  $\epsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . Ostatné fyzikálne konštanty a vlastnosti elementárnych častíc sa v našej úvahe nebudú meniť. Tu však nastáva menší problém. Takýchto konštant je totiž viac a sú medzi sebou čiastočne previazané. Napríklad pre rýchlosť svetla vo vákuu  $c$  platí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

kde  $\mu_0$  je permitivita vákuua. Ako fundamentálnejšiu konštantu, ktorá sa nebude meniť, budeme uvažovať rýchlosť svetla. So zmenou permitivity sa teda bude nepriamoúmerne meniť aj permeabilita vákuua. Ďalšou používanou konštantou je tzv. impedancia vákuua

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{c\epsilon_0} \doteq 377 \Omega,$$

ktorá sa teda bude meniť tiež nepriamoúmerne permitivite. Na ďalší problém narazíme v kvantovej fyzike, a to v prípade konštanty jemnej štruktúry

$$\alpha = \frac{e^2}{2hc\epsilon_0} \doteq \frac{1}{137},$$

kde  $e$  je elementárny náboj a  $h$  je Planckova konštantka, ktoré uvažujeme nemenné. Vidíme teda, že aj konštantka jemnej štruktúry bude nepriamoúmerná permitivite vákuua.

**Atomárne spektrá**

Začnime so samotným riešením úlohy. Zmenu elektrickej permitivity môžeme chápať najmä ako zmenu sily elektrickej interakcie. Ako prvé sa pozrime na elektrostatické pôsobenie medzi elektrónmi a jadrom v atómoch. Špeciálne pre atóm vodíka máme známe energetické hladiny od hlavného kvantového čísla  $n$

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_B} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2},$$

kde  $a_B$  je Bohrov polomer, ktorý sa s hodnotou permitivity mení, preto po prevedení do konštantných veličín obsahujúcich nemennú hmotnosť elektrónu  $m_e$  vidíme skutočnú závislosť energetických hladín na permitivite  $E \propto \epsilon_0^{-2}$ . So zmenou permitivity vákuua by sa zmenili energie a teda aj vlnové dĺžky (resp. frekvencie) fotónov odpovedajúcim preskokom medzi hladinami. Dá sa očakávať, že táto zmena bude rovnaká pre všetky ostatné atómy,  $E \propto \epsilon_0^{-2}$ . Toto je pomerne nepríjemné, keďže sa jedná o celkovú relatívnu zmenu všetkých energií. Takúto zmenu

totiž ľahko prehľadneme ako chybu kalibrácie (v meraniach na Zemi), či ako Dopplerov posun (v meraniach vo vesmíre), ak budeme energie merať štandardne spektroskopicky. Tento jav však poskytuje možnosť inému experimentu. Atóm, ktorý deexcitáciou uvoľní fotón totiž nemusí byť schopný absorbovať atóm rovnakého prvku v inom bode priestoru (voči prvému v pokoji).

V spektrách sa však budú vyskytovať isté odchýľky od jednoduchej relatívnej zmeny. Presnejším popisom by sme sa mohli dopracovať pre atóm vodíka k hladinám s tzv. jemnou štruktúrou závislou aj na ďalšom kvantovom čísle  $j$  - celkovom momente hybnosti elektrónu<sup>1</sup>

$$E_{j,n} = E_n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right).$$

V spektrách tak vzniká malý posun polohy čiar a ich rozštiepenie. Napríklad hladina pre  $n = 2$  sa rozštiepi na dve pre  $j = 1/2$  a pre  $j = 3/2$ . Preto dochádza aj k rozštiepeniu príslušnej spektrálnej čiary Lyman- $\alpha$  zodpovedajúcej prechodu do základného stavu. Ak sa budeme zaujímať o relatívnu veľkosť tohto rozštiepenia voči energii prechodu, tak získame dobre merateľnú veličinu nadobúdajúcu hodnotu

$$w = \frac{E_{3/2,2} - E_{1/2,2}}{E_{1/2,2} - E_{1/2,1}} \approx \frac{-E_2}{E_2 - E_1} \frac{\alpha^2}{4} \approx \frac{\alpha^2}{12}.$$

Vidíme teda, že energeticky zodpovedá jednému veľkému prechodu asi 225 000 jemných prechodov. Toto číslo závisí na  $\alpha$  a teda aj na  $\varepsilon_0$ , keďže  $w \propto \alpha^2 \propto \varepsilon_0^{-2}$  a sme ho tak schopní pomerne bezproblémovo zmerať.

## Šírenie svetla

Vzhľadom na to, že svetlo je elektromagnetické vlnenie by sme mohli očakávať zmenu v spôsobe jeho šírenia. Pozrime sa preto na situáciu pre rovinnú vlnu na rovinnom rozhraní medzi dvoma prostrediami s rôznou hodnotou permitivity. Na takomto rozhraní musí vlnenie spojiťe naväzovať, podobne ako v prípade rozhrania prostredí s rôznym indexom lomu. Z platnosti podmienky v každom čase dostávame nemennosť frekvencie žiarenia. Ďalej, keďže je rýchlosť šírenia v oboch prostrediach rovnaká, musia mať rovnakú veľkosť vlnovej dĺžky, a teda aj vlnové vektory. Z platnosti podmienky na celej rovine rozhrania máme, že žiarenie buď prejde cez rozhranie priamo, alebo sa odrazí podľa zákona odrazu. To, aká časť žiarenia sa odrazí, určujú Fresnelove vzorce, ktoré majú vo všeobecnej podobe pre podiel komplexných amplitúd vlny tvar

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t},$$

$$r_p = -\frac{Z_2 \cos \theta_t - Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_t + Z_1 \cos \theta_i},$$

pre  $s$ , resp.  $p$  polarizované svetlo,  $\theta_i$  je uhol dopadu,  $\theta_t$  uhol lomu a  $Z$  je impedancia jednotlivých prostredí. V našom prípade je uhol dopadu rovnaký ako uhol lomu a po zjednodušení tak dostávame

$$r_s = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

$$r_p = -r_s.$$

<sup>1</sup>Ide o kvantovomechanické zloženie spinu  $s$  a orbitálneho momentu hybnosti  $l$  a nadobúda kladné hodnoty, ktoré sú od  $l$  vzdialené o  $1/2$ .

Záporné znamienko vo výslednom koeficiente znamená zmenu fázy na opačnú. Vidíme teda, že sa paprsok šíri cez rozhranie priamo a bez ohľadu na uhol dopadu a polarizáciu žiarenia sa od rozhrania časť dopadajúcej vlny odrazí, na rozdiel od prípadu v štandardnej optike. V prípade komplexnejšieho rozdelenia permitivity v priestore by sme teda mohli dostať dokonca zaujímavé interferenčné javy. Priame pozorovanie tohto javu ale pravdepodobne nie je jednoduché.

## Meranie

Vráťme sa na chvíľu k atómu vodíka. Zmena energií hlavných hladín  $E \propto \varepsilon_0^{-2}$  totiž pôsobí zmenu frekvencie zodpovedajúceho prechodu  $f \propto E \propto \varepsilon_0^{-2}$ . Pre prechod medzi jemnými podhladinami môžeme vidieť zmenu frekvencie  $f \propto E_n \alpha^2 \propto \varepsilon_0^{-4}$ . Sekunda je definovaná pomocou prechodu hyperjemnej štruktúry cézia, ktorej zmena a samotný pôvod sú komplikovanejšie. Vidíme teda, že po zmene permitivity použitím kmitov rôznych sústav dostaneme časy bežiace rôznou rýchlosťou. Tento jav by mohol byť merateľný využitím atómových hodín bežiacich na rôznych typoch prechodov.

Okrem merania času sa skomplikuje aj meranie dĺžky. Zmena sily elektrickej interakcie zmení hodnotu Bohrovho polomeru atómu vodíka

$$a_B = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} \propto \varepsilon_0.$$

Podobne sa teda menia aj polomery ostatných orbitálov. Celkovo tak dôjde k zmene veľkostí atómov a v prípade medziatómových väzieb aj veľkosti molekúl, či vzdialenosti atómov v kryštáloch. Dá sa teda predpokladať, že naše pravítka (či iné fyzické etalóny meraní dĺžky) budú mať na rôznych miestach priestoru rôznu dĺžku. Túto zmenu by sme vzhľadom na nemennosť rýchlosti svetla mohli zmerať. Fyzickú realizáciu tohto experimentu však komplikuje meranie už spomenutého času. Mohlo by nám napadnúť skúsiť merať dĺžku interferometricky a pozorovať posun interferenčných prúvkov. Pre vlnovú dĺžku svetla platí  $\lambda \propto E^{-1} \propto \varepsilon_0^2$  a keďže by sa dĺžka tyče menila úmerne atómovému polomeru  $l \propto a_B \propto \varepsilon_0$ , tak by sme pozorovali zmenu.

Vzhľadom na uvedené zmeny meradiel jednoduchých veličín môžeme len skonštatovať, že s meraním iných veličín budú len ďalšie problémy. Ak by sme napríklad chceli zmerať permeabilitu vákua pomocou rovnobežných vodičov, musíme uvažovať meranie dĺžky vodičov, meranie sily, ktoré obsahuje v jednotkách aj čas aj priestor a meranie elektrického prúdu. V prípade, ak prúd meriame analógovo, máme opäť problém s dĺžkou a časom. V prípade, že je meranie digitálne sa ani neodvažujeme skúmať zmeny súvisiace s mechanizmom merania.

## Experiment na záver

Pokúsme sa detekovať zmenu elektrickej permitivity priamo ako zmenu sily medzi dvomi nábojmi. Majme dve nabité telesá v pokoji vo vzdialenosti  $r$  od seba. Náboj aj hmotnosť týchto telies sú dané ich zložením, meniť sa teda rovnako ako elementárny náboj a hmotnosti elementárnych častíc nebudú. Silu medzi nábojmi nebudeme merať priamo, ale pozrieme sa na vzájomné zrýchlenie v okamihu uvoľnenia nábojov. Všetky vzdialenosti budeme merať pomocou vlnovej dĺžky svetla zodpovedajúcej prechodu hlavnej štruktúry, pomocou ktorého budeme merať aj čas. Výslednú nameranú hodnotu permitivity  $\varepsilon_m$  dostávame zo vzťahu

$$\varepsilon_m = \frac{q_1 q_2}{4\pi F r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi m a r^2},$$

Pri zmene permitivity sa mení hodnota faktoru  $ar^2$ . Vzhľadom na spôsob merania stačí určiť jednotky tohto súčinu  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . Nameranú hodnotu teda dostaneme ako

$$\varepsilon_m \propto \frac{1}{f^2 \lambda^3} \propto f^{-1} \propto \varepsilon_0^2.$$

Vidíme teda, že namerať zmenu sa nám použitím dostatočne presného merania podarí, no nameraná hodnota nezodpovedá skutočnej hodnote permitivity.

**Jozef Lipták**  
liptak.j@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.