Úloha IV.5 ... Efchári-Goiteía

8 bodů; (chybí statistiky)

Efchári a Goiteía jsou dvě složky dvojplanety okolo nedávno vzniklé hvězdné soustavy. Obíhají okolo společného těžiště po kruhových trajektoriích ve vzdálenosti $a = 250 \cdot 10^3$ km. *Efchári má poloměr* $R_1 = 4\,300\,\mathrm{km}$, *hustotu* $\rho_1 = 4\,100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a dobu siderické rotace* $T_1 = 14\,\mathrm{h}$. *Goiteía je menší s poloměrem* $R_2 = 3\,800\,\mathrm{km}$, *má však větší hustotu* $\rho_2 = 4\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a kratší dobu rotace* $T_2 = 11\,\mathrm{h}$. *Osy rotace planet i soustavy jsou rovnoběžné. Za několik set milionů let přejde soustava díky slapovým silám do tzv. vázané rotace. Určete výslednou změnu oběžné doby za předpokladu, že tělesa jsou homogenní a přibližně sférická.*

Dodovi se neustále plete Phobos a Deimos.

Slapové sily sú sily, ktorými na seba gravitačne pôsobia skutočné telesá, ktoré nie sú bodové. Ich príčinou je rôzna vzdialenosť bodov telesa od zdroja sily a teda jej rôzna veľkosť v rôznych bodoch. Tieto sily telesá deformujú v smere ich pôsobenia, čo je príčina vzniku výdute na povrchu planéty (na Zemi je najlepšie pozorovateľnou zložkou tohto pôsobenia príliv a odliv). Kompenzované sú pružnou silou materiálu, z ktorého sú telesá vytvorené a jeho vlastnou tiažou. Deformácia a jej navrátenie však nie je okamžité. Výduť je unášaná rotáciou planéty mimo priamu spojnicu telies. Na takto pootočenú výduť potom pôsobí druhé teleso nenulovým momentom sily, čo má za následok vyrovnávanie rotačných periód planét s periódou ich vzájomného pohybu. Pri tomto procese sa nezachováva energia (premieňa sa na deformačné teplo), ale zachováva sa celkový moment hybnosti sústavy dvojplanéty. Na začiatok bude užitočné vyjadriť si hmotnosti zložiek

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 \doteq 1{,}365 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,, \quad M_2 \doteq 1{,}034 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,.$$

Ďalej bude užitočné určiť pôvodnú obežnú periódu sústavy, z tretieho Keplerovho zákona

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\,(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

máme vzťah

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,(M_1 + M_2)}} \doteq 1{,}963 \cdot 10^6\,\mathrm{s} \doteq 22{,}7\,\mathrm{d}\,.$$

Pokúsme sa nájsť celkový moment hybnosti L sústavy tesne po vzniku. Správne by bolo potrebné vektorovo sčítať rotačné momenty hybnosti oboch zložiek $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ s momentom hybnosti zodpovedajúcemu vzájomnému obehu $\mathbf{L}_\mathrm{o}$. Vzhľadom na kolineárnu orientáciu rotačných osí, v ktorých tieto momenty ležia[1] stačí sčítanie vykonať skalárne $L = L_1 + L_2 + L_\mathrm{o}$. Pre rotačný moment hybnosti máme $L_i = I\omega$, kde I je moment zotrvačnosti telesa a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je jeho uhlová rýchlosť. Moment zotrvačnosti odhadneme pre planétu ako pre homogénnu guľu

$$I_1 = \frac{2}{5} M_1 R_1^2 \doteq 1{,}010 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,, \qquad I_2 \doteq 0{,}597 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$

$$L_1 = \frac{2\pi I_1}{T_1} \doteq 1{,}259 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,, \quad L_2 \doteq 0{,}948 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,.$$

[1] Vo všeobecnosti ale neleží vektor momentu hybnosti v smere rotačnej osi, platí to len pre viac symetrické telesá.

Pre určenie orbitálneho momentu hybnosti potrebujeme poznať vzdialenosti telies od ťažiska a_i a ich rýchlosti na orbite v_i. Vzdialenosti od ťažiska máme z definície ťažiska ako hmotného stredu

$$a_1 = \frac{aM_2}{M_1 + M_2}\,.$$

Vzhľadom na kruhovosť dráh máme potom

$$L_\mathrm{o} = M_1 v_1 a_1 + M_2 v_2 a_2 = \frac{aM_1 M_2}{M_1 + M_2}\left(v_1 + v_2\right)\,.$$

Rýchlosť telies určíme napríklad z rovnováhy odstredivej a dostredivej sily

$$\frac{M_1 v_1^2}{a_1} = G\frac{M_1 M_2}{a^2}\,,$$

kde je dôležité si uvedomiť, že polomer obehu nie je vzdialenosť telies, na ktorej pôsobí gravitačná sila. Po dosadení a úprave

$$v_1 = M_2\sqrt{\frac{G}{a\left(M_1 + M_2\right)}}\,,$$

$$L_\mathrm{o} = M_1 M_2\sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}} \doteq 1{,}177\cdot 10^{35}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Zostáva nám skompletizovať celkový súčet

$$L = \frac{4\pi M_1 R_1^2}{5T_1} + \frac{4\pi M_2 R_2^2}{5T_2} + M_1 M_2\sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}}\,.$$

Pre výpočet zmeny samotnej periódy bude vhodné vyčísliť samostatne hodnotu rotačných momentov zotrvačnosti

$$\Delta L = L_1 + L_2 = 2{,}206\cdot 10^{33}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,,$$

ktorá je oproti obežnému momentu skoro o dva rády menšia. V stave viazanej rotácie sa rotačné periódy vyrovnajú s periódou obežnou, preto môžeme rotačnú časť momentu hybnosti vo výslednom stave oproti pôvodnému stavu zanedbať. Moment hybnosti ΔL teda celý prejde do obežného momentu. Pre jeho zmenu máme

$$L_\mathrm{o} = Ka^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad L_\mathrm{o} + \Delta L_\mathrm{o} = K\left(a + \Delta a\right)^{\frac{1}{2}} \approx Ka^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Ka^{-\frac{1}{2}}\Delta a\; = L_\mathrm{o}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\right)\,,$$

z čoho vyplýva

$$\frac{\Delta L_\mathrm{o}}{L_\mathrm{o}} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\,.$$

Podobne diferencovaním tretieho Keplerovho zákona

$$2\frac{\Delta P}{P} \approx 3\frac{\Delta a}{a}\,,$$

z čoho dosadením predchádzajúceho vzťahu máme

$$\Delta P \approx 3P\frac{\Delta L_\mathrm{o}}{L_\mathrm{o}}\,.$$

Dosadením číselných hodnôt máme zmenu dĺžky obežnej periódy $\Delta P \doteq 1{,}104 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \doteq 1{,}28\,\mathrm{d}$. Úloha sa namiesto diferencovania a teda rozvoju do lineárneho člena dala riešiť aj postupným dosadením nového momentu hybnosti do vzťahu zväzujúceho moment hybnosti a veľkú polos a následne novej veľkej polosi do tretieho Keplerovho zákona pre získanie novej obežnej periódy. Pri tomto postupe dostávame presný výsledok

$$\Delta P = \frac{2\pi\,(M_1 + M_2)\,L^3}{G^2 M_1^3 M_2^3} - P \doteq 1{,}124 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \doteq 1{,}30\,\mathrm{d}\,.$$

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`