Úloha V.S ... rezonance a tlumení

10 bodů; (chybí statistiky)

1. *Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce $u(x,t)$ z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

kde v je fázová rychlost a Γ je tlumící koeficient. Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo k. Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence ω, fázové rychlosti v a koeficientu Γ, musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?

2. *Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti L od stěny jej chytneme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou λ udržujeme v napětí T ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybujeme, platí $u_0(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Nalezněte takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj. T, λ, L, A a ω_0. Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

Štěpán si hrál se švihadlem.

1. Fourierovská substituce nahrazuje časové derivace mocninami $-i\omega$ a prostorové derivace mocninami ik, kde k je vlnové číslo a ω frekvence vlnění. Platí tedy

$$-\omega^2 \hat{u} = -v^2 k^2 \hat{u} + i\Gamma k \hat{u}\,,$$

kde $\hat{u} = u_0 \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$ je komplexní výchylka. Vydělíme rovnici $-v^2\hat{u}$, a dostaneme

$$k^2 - i\frac{\Gamma}{v^2}k - \frac{\omega^2}{v^2} = 0\,.$$

Doplněním na čtverec dostáváme

$$k^2 - i\frac{\Gamma}{v^2}k - \frac{\Gamma^2}{4v^4} + \frac{\Gamma^2}{4v^4} - \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

$$\left(k - i\frac{\Gamma}{2v^2}\right)^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\Gamma^2}{4v^4} = \frac{1}{4v^4}\left(4\omega^2 v^2 - \Gamma^2\right)\,.$$

Nyní máme dvě možnosti – buď $4\omega^2 v^2 > \Gamma^2$, a pak

$$k - i\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm\frac{1}{2v^2}\sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}$$

$$k = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}}{2v^2}$$

a vlnové číslo k je tedy komplexní. Další možnost je $4\omega^2 v^2 \leq \Gamma^2$, a pak

$$k - i\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{i}{2v^2}\sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2}$$

$$k = \frac{i}{2v^2}\left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2}\right)$$

a vlnové číslo k je tedy čistě imaginární. Pro závislost komplexní výchylky v tomto případě tedy platí

$$\hat{u} = u_0 \mathrm{e}^{ikx - i\omega t} = u_0 \mathrm{e}^{-i\omega t} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2v^2}\left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2}\right)} .$$

To znamená, že závislost amplitudy na souřadnici x je čistě exponenciální, a neobsahuje tedy žádné uzle. Hledanou podmínkou je tedy podmínka (po provedení odmocniny a předpokladu, že Γ,ω i v jsou kladné)

$$\Gamma \geq 2\omega v$$

2. Druhá část úlohy používá vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Můžeme rovnou určit disperzní vztah pomocí Fourierovské substituce

$$-\omega^2 = \frac{T}{\lambda}(-k^{\,2})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}\,|k| .$$

Řešení, které budeme předpokládat, má komplexní tvar

$$\hat{u} = B\mathrm{e}^{ikx - i\omega t} + C\mathrm{e}^{-ikx - i\omega t} ,$$

kde B a C jsou komplexní konstanty. Předpokládáme kartézskou soustavu souřadnic v níž je osa x shodná s klidovým stavem švihadla, a bod, kde se švihadlem pohybujeme, se nachází v $x = 0$. Okrajové podmínky jsou následující. Nejprve musíme zajistit, že konec švihadla u stěny zůstává nehybný, tedy platí

$$\hat{u}(L, t) = 0 .$$

Dále druhý konec švihadla osciluje s naší rukou

$$\mathrm{Re}\,\hat{u}(0, t) = A\cos(\omega_0 t) .$$

Z první podmínky plyne

$$B\mathrm{e}^{ikL - i\omega t} + C\mathrm{e}^{-ikL - i\omega t} = 0$$

$$C = -B\mathrm{e}^{i2kL}$$

a řešení má tedy tvar

$$\hat{u}(x, t) = B\left(\mathrm{e}^{ikx - i\omega t} - \mathrm{e}^{-ikx - i\omega t + i2kL}\right) .$$

Abychom mohli vyhodnotit druhou podmínku, zaveďme $B = |B|\, e^{i\varphi}$, kde φ je fáze B. Pak můžeme psát

$$\hat{u}(x,t) = |B| \left(\mathrm{e}^{i(kx-\omega t+\varphi)} - \mathrm{e}^{i(-kx-\omega t+2kL+\varphi)}\right) \,.$$

Druhá podmínka je tedy

$$\mathrm{Re}\, \hat{u}(0,t) = A\cos\left(\omega_0 t\right) = |B| \left(\cos\left(-\omega t+\varphi\right) - \cos\left(-\omega t + 2kL + \varphi\right)\right) \,.$$

S použitím sčítacích vzorců pro sinus a cosinus můžeme odvodit

$$\cos\left(-\omega t+\varphi\right) = \cos\left(\omega t\right)\cos\left(\varphi\right) + \sin\left(\omega t\right)\sin\left(\varphi\right)$$

a

$$\begin{aligned}\cos\left(-\omega t+\varphi+2kL\right) = &\cos\left(\omega t\right)\left[\cos\left(\varphi\right)\cos\left(2kL\right) - \sin\left(\varphi\right)\sin\left(2kL\right)\right]\\ &+ \sin\left(\omega t\right)\left[\sin\left(\varphi\right)\cos\left(2kL\right) + \cos\left(\varphi\right)\sin\left(2kL\right)\right]\end{aligned}$$

a platí tedy

$$\begin{aligned}A\cos\left(\omega_0 t\right) = &|B| \left[\cos\left(\omega t\right)\left(\cos\left(\varphi\right)\left(1-\cos\left(2kL\right)\right) + \sin\left(\varphi\right)\sin\left(2kL\right)\right)\right.\\ &\left.+ \sin\left(\omega t\right)\left(\sin\left(\varphi\right)\left(1-\cos\left(2kL\right)\right) - \cos\left(\varphi\right)\sin\left(2kL\right)\right)\right] \,.\end{aligned}$$

Můžeme odvodit, že tato rovnost může platit pro všechny časy pouze v případě, že $\omega = \omega_0$ a dále

$$\begin{aligned}\sin\left(\varphi\right)\left(1-\cos\left(2kL\right)\right) - \cos\left(\varphi\right)\sin\left(2kL\right) &= 0\\ \sin\left(\varphi\right) 2\sin^2\left(kL\right) &= 2\cos\left(\varphi\right)\sin\left(kL\right)\cos\left(kL\right)\\ \mathrm{tg}\left(\varphi\right) &= \mathrm{cotg}\left(kL\right) \,.\end{aligned}$$

Jelikož platí $\mathrm{cotg}\left(x\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, platí

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - kL + n\pi$$

kde n je celé číslo. Platí tedy

$$\begin{aligned}A\cos\left(\omega_0 t\right) = &|B|\cos\left(\omega_0 t\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - (kL - n\pi)\right)\left(1-\cos\left(2kL\right)\right) +\right.\\ &\left.+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - (kL-n\pi)\right)\sin\left(2kL\right)\right]\end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - (kL-n\pi)\right) &= \sin\left(kL-n\pi\right) = (-1)^n\sin\left(kL\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - (kL-n\pi)\right) &= \cos\left(kL-n\pi\right) = (-1)^n\cos\left(kL\right)\\ 1-\cos(2kL) &= 2\sin^2(kL)\\ \sin(2kL) &= 2\sin(kL)\cos(kL) \,.\end{aligned}$$

máme

$$A\cos\left(\omega_0 t\right) = |B|\cos\left(\omega_0 t\right)(-1)^n\left(2\sin^3(kL) + 2\sin(kL)\cos^2(kL)\right) = \\ = |B|\cos(\omega_0 t)(-1)^n 2\sin(kL)\,.$$

Můžeme tedy určit amplitudu

$$|B| = \frac{A}{2\sin(k\ L)}(-1)^n$$

$$|B| = \frac{A}{2\sin(kL)}(-1)^n\,.$$

Máme tedy řešení

$$\hat{u}(x,t) = \frac{A}{2\sin(kL)}(-1)^n\left(\mathrm{e}^{i\left(kx-\omega_0 t+\frac{\pi}{2}-kL+n\pi\right)} - \mathrm{e}^{i\left(-kx-\omega_0 t+2kL+\frac{\pi}{2}-kL+n\pi\right)}\right)$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{A}{2\sin(kL)}(-1)^n\left(\mathrm{e}^{i(k(x-L)-\omega_0 t)}i(-1)^n - \mathrm{e}^{i(-k(x-L)-\omega_0 t)}i(-1)^n\right)$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{A}{2\,|(|\sin(kL))}(-1)^{2n}i\ \left(\mathrm{e}^{ik(x-L)} - \mathrm{e}^{-ik(x-L)}\right)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\,.$$

Jelikož $(-1)^{2n} = 1$ a $\mathrm{e}^{ik(x-L)} - \mathrm{e}^{-ik(x-L)} = 2i\sin(k(x-L))$, platí

$$\hat{u}(x,t) = \frac{-A}{\sin(kL)}\sin(k(x-L))\mathrm{e}^{-i\ \omega_0 t}$$

Vezměme tedy reálnou část a dosaďme za k z disperzního vztahu, abychom dostali řešení

$$u(x,t) = \frac{A}{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\omega_0 L\right)}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\omega_0(L-x)\right)\cos(\omega_0 t)\,.$$

Řešení má divergující amplitudy v případě, že

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\omega_0 L\right) = \sin(k\ L) = 0\,.$$

To nastává pokud

$$kL = m\pi\,.$$

kde m je celé číslo. Vlnovou délku lze vyjádřit jako $l = \frac{2\pi}{k}$, a platí tedy

$$\frac{2\pi}{l}L = m\pi$$

$$ml = 2L$$

Divergující amplituda (která odpovídá resonanci) se tedy objevuje v případě, kdy celočíselný násobek vlnové délky tvoří délku $2L$, tedy pro celé číslo m lze psát

$$l = \frac{2L}{m}$$

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz