

Úloha VI.4 ... spatřil jsem kometu

8 bodů; (chybí statistiky)

Dlouhoperiodické a neperiodické komety začínou vyvrhovat plyn zpravidla při překročení dráhy Saturnu. Do té doby se pro pozorovatele na Zemi jeví jen jako malé kusy skal, a jsou tedy téměř nepozorovatelné. Uvažujte kometu se vzdáleností v přísluní rovnou $q = 0,5$ au a odhadněte, za jak dlouho od okamžiku, kdy překoná dráhu Saturnu, poprvé překročí dráhu Země. Trajektorie komety má excentricitu velmi blízko jedné. *Dodo na cvičení z astrofyziky.*

Skúsme najprv preložiť riešenie do jazyka výpočtov. Dlhoperiodické a neperiodické komety sa pohybujú po dráhach blízkyh parabol s excentricitou $e = 1$. Ohnisko paraboly podľa prvého Keplerovho zákona leží v Slnku. Tieto dráhy sú ďalej význačné nulovosťou celkovej mechanickej energie. Zaujíma nás čas, ktorý trvá komete priblíženie sa k Slnku zo vzdialenosti asi $r_1 = 9,6$ au, čo odpovedá veľkej polose Saturnovej dráhy, do vzdialenosti $r_2 = 1,0$ au. Ďalej zo zadania máme vzdialenosť komety v prísluní $q = 0,5$ au.

Prvou úlohou je určiť polohu komety na dráhe v týchto dvoch okamihoch. Toto môžeme vykonať dvomi rôznymi spôsobmi. Ak poznáme rovnicu kuželosečky, resp. paraboly v polárnych súradniciach máme

$$r(\theta) = \frac{2q}{1 + \cos \theta},$$

kde θ je pravá anomália - uhol, ktorý zvierá sprievodič v prísluní so sprievodičom komety vo vzdialenosti r od Slnka. Jednoduchou úpravou a dosadením máme

$$\theta = \arccos \frac{2q - a}{a}, \quad \theta_1 = 153,6^\circ, \quad \theta_2 = 90,0^\circ.^1$$

Druhou možnosťou je si situáciu narysovať, či už na milimetrový papier,² alebo napr. v Geogebre. Ak umiestnime Slnko do bodu $[0; 0]$ a orientujeme parabolu nahor, dostávame okrem uhlov aj súradnice bodov pre prienik $X_1 = [4, 27; 8, 60]$ s dráhou Saturnu a $X_2 = [1, 00; 0, 00]$ s dráhou Zeme. Rovno si môžeme uviesť aj rovnicu našej paraboly

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1),$$

kde ako jednotku dĺžky prirodzene používame astronomickú jednotku.

Ťažším krokom je ale určiť čas, za ktorý sa medzi týmito bodmi kométa premiestni. Opäť, ak sa v problematike dobre orientujeme, môžeme naraziť na Barkerovu rovnicu pre pohyb po parabolickej dráhe³

$$t = \sqrt{\frac{2q^3}{GM}} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right),$$

kde t je čas, ktorý trvá komete cesta z prísluní ($\theta = 0^\circ$) do anomálie θ , G je gravitačná konštanta a M je hmotnosť Slnka. V ďalších výpočtoch s výhodou využijeme hodnotu tejto konštanty $GM \doteq 4\pi^2 \text{ au}^3 \cdot \text{y}^{-2}$ používajúc astronomickú jednotku na meranie dĺžky a rok (y) na meranie času. Jednoduchým dosadením dostávame hodnoty časov $t_1 = 2,399$ y a $t_2 = 0,106$ y. Odpoveďou na zadanú otázku je ich rozdiel $T \doteq 2,29$ y.

¹Správne by mali byť obe hodnoty s mínusom, kométa totiž do prísluní ešte len smeruje a anomálie sa merajú v smere pohybu.

²Postup ako pomocou pravouhlého pravítka nitky a špendlíka zostrojíte parabolou je napr. tu https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola#Pin_and_string_construction

³Jedná sa o verziu známejšej Keplerovej rovnice a vzťahu medzi pravou a excentrickou anomáliou v limite $e \rightarrow 1$ a $q = a(1 - e)$ konštantné.

Čo však v prípade ak Barkerovu rovnicu nepoznáme a nepodarilo sa nám je nájsť? Môžeme postupovať priamo podľa druhého Keplerovho zákona! Ten hovorí, že plocha opísaná sprievodičom telesa je priamo úmerná časovému intervalu. Ak určíme hodnotu tejto plošnej rýchlosti a veľkosť plochy výseku paraboly, predelením dostaneme aj čas. Dá sa nahliadnuť, že plošná rýchlosť nadobúda hodnotu $w = \frac{1}{2}r_p v_p$, v príslní je vektor rýchlosti \mathbf{v}_p kolmý na sprievodič o dĺžke r_p , plocha opísaná za krátky čas je plôška trojuholníka $\Delta S = \frac{1}{2}r_p v_p \Delta t$. Rýchlosť v príslní určíme zo zachovania energie, pre parabolickú orbitu

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = 0, \quad v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}},$$

čo je mimochodom známi vzťah pre únikovú rýchlosť. Po číselnom dosadení dostávame $v_p = 12,56 \text{ au} \cdot \text{y}^{-1}$ a $w = 3,1415 \text{ au}^2 \cdot \text{y}^{-1}$.

Plochu výseče môžeme určiť pomocou vhodného softvéru (napríklad Blender), odčítat ako počet štvorcíkov z milimetrového papiera, alebo pomocou integrácie funkčnej závislosti trajektórie. Plochu dostaneme ako rozdiel plochy trojuholníka a plochou pod grafom paraboly na obrázku 1, kde y_1 , x_1 , x_2 sú súradnice bodov X_1 a X_2 určené vyššie.

$$\begin{aligned} S &= \frac{x_1 y_1}{2} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{2}(x^2 - 1) dx, \\ S &= \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2}{2}, \\ S &= 7,204 \text{ au}^2. \end{aligned}$$

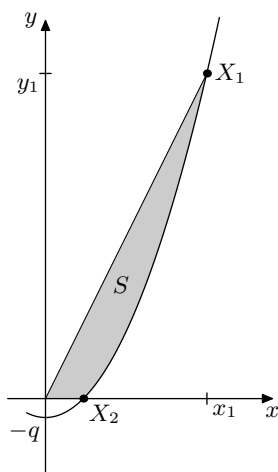
Čas medzi prechodmi kométy týmito bodmi dostaneme ako $T = S/w = 2,29 \text{ y}$ rovnako ako v prvom postupe. Celá úloha sa dá taktiež po určení rýchlosti v perihéliu riešiť aj numerickou simuláciou z pohybových rovníc vo vašom obľúbenom programovacom jazyku, alebo tabuľkovom kalkulátore.

Od objavenia takejto kométy máme teda niečo vyše dvoch rokov do potenciálnej zrážky so Zemou. Ďalej vidíme, že vo vnútri obežnej dráhy Zeme strávi kométa veľmi málo času, iba približne dva mesiace. Vzhľadom na prudkú závislosť jasnosti kométy na vzdialenosti od Slnka tiež vidíme, že na pozorovanie jasnej kométy ako C/2020 F3 (NEOWISE) na oblohe je pomerne málo času, v ráde týždňov až mesiacov. Kométy sú na pozemskej oblohe teda len krátkodobé javy, čo však nebráni tomu, aby mohli byť ohromiť jej dnešnú populáciu, či desiat ľudstvo v minulosti.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



Obr. 1: Výpočet plochy opsané průvodičem komety.