Úloha VI.5 ... těžká pružina

9 bodů; (chybí statistiky)

Mějme homogenní pružinu s tuhostí k a hmotností m, jejíž šířka je zanedbatelná vůči její délce. Pružinu uchytíme na jednom konci tak, aby kolem něj mohla rotovat, a následně ji roztočíme úhlovou rychlostí ω. Kolikrát se tato pružina při rotaci prodlouží? Vliv tíhového pole neuvažujte.

Jáchym měl velmi těžký den a chtěl se o něj podělit i s ostatními.

Definujme proměnnou x jakožto vzdálenost od osy otáčení na původní pružině a vzdálenost na prodloužené pružině jako $r(x)$. Počáteční délku pružiny označme x_0. Vezměme si malý úsek pružiny $\mathrm{d}r$, kterému odpovídá úsek na původní pružině $\mathrm{d}x$ s hmotností $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$, kde $\lambda = m/x_0$ je délková hmotnost. Aby se rotující úsek stále pohyboval po kružnici, výslednice na něj působících sil musí odpovídat dostředivé síle

$$\mathrm{d}F_\mathrm{d} = \omega^2 r\,\mathrm{d}m = \lambda\omega^2 r\,\mathrm{d}x\,.$$

Dále můžeme říct, že tuhost daného úseku lze vyjádřit jako

$$k_{\mathrm{d}x} = k\frac{x_0}{\mathrm{d}x}\,.$$

Úsek se prodloužil o $(\mathrm{d}r - \mathrm{d}x)$, což způsobí sílu pružnosti

$$F = k_{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{d}r - \mathrm{d}x\right) = kx_0\frac{\mathrm{d}r - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = kx_0\left(r' - 1\right)\,,$$

kde r' značí derivaci r podle x. Změna této síly podle x je

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = kx_0 r''\,.$$

Na zvolený úsek působí síly pružnosti od obou sousedních částí pružiny. Jejich rozdíl je tak hledanou výslednicí působící na daný úsek, proto se podle úvahy výše rovná dostředivé síle. Uvážíme-li ještě směr působících sil (popřípadě si rozmyslíme fakt, že síla pružnosti s rostoucí vzdáleností klesá čili její změna je záporná, ale velikost dostředivé síly musí být kladná), dostaneme $\mathrm{d}F = -\,\mathrm{d}F_\mathrm{d}$. Dosadíme ze vztahů výše a máme

$$kx_0 r'' = -\lambda\omega^2 r\,,$$

což není nic jiného než obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$r'' = -\kappa^2 r\,,$$

kde

$$\kappa = \sqrt{\frac{\lambda\omega^2}{kx_0}} = \frac{\omega}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Ta má obecné řešení ve tvaru

$$r(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x}\,.$$

K určení konstant A a B potřebujeme dvě podmínky. Na upevněném konci pružiny platí $r(0) = 0$, zatímco na tom volném lze psát $F(x_0) = 0$. Z první podmínky dostáváme $A + B = 0$, díky čemuž můžeme celou rovnici upravit na

$$r(x) = 2\mathrm{i}A\sin\kappa x\,.$$

Druhá je potom splněna pro $r'(x_0) = 1$, z čehož vyplývá

$$2\mathrm{i}A\kappa \cos \kappa x_0 = 1\,,$$

což vede na finální řešení ve tvaru

$$r(x) = \frac{1}{\kappa} \frac{\sin \kappa x}{\cos \kappa x_0}\,.$$

Nás přitom zajímá relativní prodloužení

$$\frac{r(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\kappa x_0} \frac{\sin \kappa x_0}{\cos \kappa x_0} = \frac{\mathrm{tg}\left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right)}{\omega \sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

Všimněme si, že v limitě nulové rychlosti otáčení $\omega \to 0$ vychází $r(x) = x$, což je přesně to, co bychom čekali. Naopak případ

$$\omega \to \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

vede na nekonečně velké prodloužení. To se sice na první pohled může zdát pochybné, ale dává to smysl. Představíme-li si například nehmotnou pružinku s tuhostí k a závažím o hmotnosti m na konci, odstředivá síla poroste s poloměrem jako $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r$, zatímco síla pružnosti bude $F = kr$. Je zřejmé, že pro

$$\omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$$

se bude pružina nekonečně natahovat, naopak pro menší hodnoty úhlové rychlosti zůstane její délka nulová. Tento model je sice jen velmi zjednodušenou verzí hmotné pružiny, ale vidíme na něm, že k nekonečnému prodloužení může dojít pro konečně velké hodnoty ω. Samozřejmě, v reálném světě se nic takového nestane, protože Hookův zákon ve tvaru $F \propto r$ platí pouze pro malé hodnoty prodloužení pružiny.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`