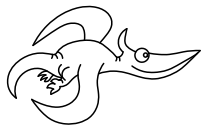


## Úvodem

Organizátoři



## Zadání II. série

Termín uploadu: 24. 11. 2021 23.59

Termín odeslání: 23. 11. 2021

## Úloha II.1 ... stíhání světla

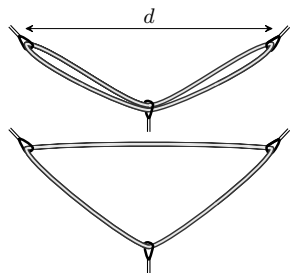
3 body

Jindra kráčí po dlouhé osvětlené chodbě. Jeho oči jsou ve výšce 1,7 m nad podlahou, osvětlení na stropě je ve výšce 3,4 m. Jindra se právě nachází ve vzdálenosti 10 m vodorovně od nejbližšího světla a kráčí rychlostí  $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  přímo k němu. Na vyleštěné podlaze vidí odraz světla. Jak rychle se v tento okamžik odraz přibližuje k Jindrovi?

## Úloha II.2 ... fixní stanoviště

3 body

Mějme dvě karabiny ukotvené ve skále ve stejné výšce a ve vzdálenosti  $d$  od sebe. Do těchto karabin zacvakneme smyčku celkové délky  $l$ . Na ni následně připneme další karabinu, ze které bychom chtěli slanit, přičemž budeme působit směrem dolů silou  $F = 2,0 \text{ kN}$ . Spočítejte napětí ve smyčce a sílu, kterou působíme na karabiny, v případech, kdy je slaňovací karabina zavěšená na jedné resp. na obou částech smyčky. Při které možnosti je lano napínáno menší silou a která možnost je bezpečnější?



## Úloha II.3 ... model tření

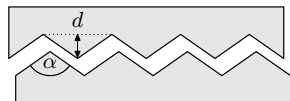
6 bodů

Jaký by byl statický koeficient tření mezi tělesem a podložkou, pokud bychom uvažovali model, ve kterém jsou na povrchu obou těles klínky o vrcholovém úhlu  $\alpha$  a výšce  $d$ ? Zkuste porovnat vaše výsledky a reálné koeficienty tření.

## Úloha II.4 ... čepování čaje

7 bodů

Matěj si chce z várnice natočit čaj do sklenice o hmotnosti  $M$ . Jednou rukou drží sklenici a druhou rukou ovládá kohoutek, čímž mění objemový průtok čaje. Rychlost výtoku  $v$  je konstantní (můžete uvažovat, že rychlost při dopadu do sklenice je stejná). Protože se Matěj nechce moc nadřít, rád by držel sklenici od začátku až do konce čepování konstantní silou. Jaká musí být závislost výtoku na čase, aby se mu to podařilo? Jak dlouho bude trvat, než se sklenice naplní?



**Úloha II.5 ... Shkadov thruster**

8 bodů

Před dávnými časy v předaleké galaxii se jedna civilizace rozhodla přestěhovat celou svou sluneční soustavu. Jednou z možností bylo postavit „poloviční Dysonovu sféru“. Tedy konstrukci, která by zachycovala zhruba polovinu záření z hvězdy a odrážela jej všechno jedním směrem. Ideálním tvarem by tak byl rotační paraboloid. Jaký by musel být vztah mezi zářivým výkonem hvězdy, plošnou hustotou takového zrcadla a jeho vzdáleností od hvězdy, aby se mezi nimi udržovala konstantní vzdálenost?

**Úloha II.P ... la bomba**

10 bodů

Jakého maximálního výkonu dosahuje jaderná bomba?

**Úloha II.E ... řídký nebo hustý líh**

13 bodů

Změřte závislost hustoty roztoku lihu ve vodě na jeho objemové koncentraci ve vodě. Zařaďte pro srovnání i měření čistého lihu a čisté vody.

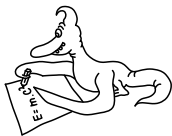
Pozor na správně směšování lihu s vodou – nezapomínejte na to, že objem slité vody a lihu není přesně součtem jejich původních objemů.

**Úloha II.S ... seriál 2**

10 bodů

Jakou energii musí mít laserový impuls trvající 10 ns, aby jím vytvořená rázová vlna byla schopná ohřát plazma na teplotu, při níž může dojít k termojaderné fúzi reakci? Jakou hustotu bude mít stlačené palivo?

*Poznámka* Přepokládejte, že počáteční plazma je jednoatomový ideální plyn.



## Řešení I. série

### Úloha I.1 ... auta

3 body; (chybí statistiky)

Dvě auta vyjedou ve stejný čas ze stejného bodu rychlostmi  $v_1 = 100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  a  $v_2 = 60 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Je možné, aby se auta od sebe vzdalovala některými z následujících rychlostí? Pokud ano, příslušné situace načrtněte.

$$v_a = 160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \quad v_b = 40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \\ v_c = 30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \quad v_d = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

*Ivo chtěl Dana srazit přesně definovanou rychlostí.*

Úlohu lze zřejmě řešit metodou „kouknu a vidím“, kdy si hned všimneme, že nejmenší rychlosti ( $v_b$ ) bude dosaženo při pohybu stejným směrem, největší rychlost ( $v_a$ ) dostaneme při pohybu od sebe, hodnota  $v_d$  bude odpovídat „něčemu mezi tím“ a varianta  $v_c$  není možná. Ukážeme si však také, k čemu dospějeme, jestliže se pokusíme poctivě ověřit všechny „samozřejmé“ kroky řešení.

Situaci budeme popisovat pomocí vektorů. Polohu prvního auta v čase  $t$  označíme  $\mathbf{r}_1(t)$ , potom

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 t.$$

Pro druhé auto platí obdobná rovnice. Vzájemnou rychlost aut spočítáme jako změnu velikosti jejich vzájemné vzdálenosti vydělenou časem, během kterého ke změně došlo. Po uplynutí času  $\Delta t$  bude platit

$$\mathbf{r}_1(t + \Delta t) = \mathbf{v}_1 \cdot (t + \Delta t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{v}_1 \Delta t.$$

Na toto místo je vhodné zařadit poznámku o použitém značení. Závorky mohou mít dva významy – buď obsahují funkční argumenty (jako třeba u  $\mathbf{r}_1(t + \Delta t)$ ), anebo vyjadřují násobení (například u  $\mathbf{v}_1 \cdot (t + \Delta t)$ ). V tomto případě odlišujeme druhou variantu pro větší názornost tečkou. Zpravidla tomu tak nicméně není a mezi oběma variantami se rozlišuje pouze velikostí mezery, přičemž větší znamená násobení; konkrétním příkladem může být právě  $\mathbf{v}_1(t + \Delta t)$  či  $f(x)$  (srovnejte s  $f(x)$ ). Naneštěstí většina autorů ignoruje i toto pravidlo, a význam závorek je tak často nutné odhadovat pouze z kontextu.

Vzájemná vzdálenost bodů, kterou označíme  $s$ , není nic jiného než velikost jejich rozdílu

$$s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Pro hledanou vzájemnou rychlost dostáváme

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t + \Delta t)| - |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|}{\Delta t} = \\ &= \frac{|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (t + \Delta t)| - |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)t|}{\Delta t} = |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|. \end{aligned}$$

Tímto možná až zbytečně složitým výpočtem jsme ukázali to, co jsme byli schopni vytušit už na samém začátku svých úvah, a sice že vzájemná rychlost automobilů je rovna rozdílu jejich rychlostí. Nyní už jen stačí najít všechny vyhovující hodnoty.

Označme úhel mezi vektory rychlostí jako  $\varphi$ . Potom pro trojúhelník se stranami  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v$  platí kosinová věta

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi.$$

Kosinus  $\varphi$  nabývá všech hodnot mezi  $-1$  a  $+1$ . Pro  $-1$  vyjde  $v = v_1 + v_2 = 160 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = v_a$ , pro  $+1$  dostaneme  $v = v_1 - v_2 = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = v_b$ . Rychlost  $v_c$  zřejmě leží mimo tento interval, pročež jí není možné dosáhnout. Konečně rychlost  $v_d$  získáme při úhlu

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{v_1^2 + v_2^2 - v_d^2}{2v_1v_2} = \frac{11}{24}, \\ \varphi &\doteq 1,09 \doteq 63^\circ. \end{aligned}$$

**Jáchym Bártík**  
tuaki@fykos.cz

## Úloha I.2 ... pravidlo dvou sekund

3 body;

(chybí statistiky)

*Pravidlo dvou sekund je pomůcka pro řidiče, která tvrdí, že bezpečný rozestup dvou vozidel jsou minimálně dvě sekundy. Mějme dopravní uzel, ve kterém  $n_1$ -proudá silnice přechází v  $n_2$ -proudou. Maximální povolená rychlost v prvním úseku je  $v_1$ . Jaká může být nejmenší možná maximální povolená rychlost  $v_2$  ve druhém úseku, aby se v něm netvořily zácpy a všichni měli možnost dodržet pravidlo dvou sekund? Průměrná délka jednoho auta je  $l$  a předpokládáme, že svoji rychlost dokáže měnit skokově.*

*Honza trčel příliš dlouho v dopravní zácpě.*

Nejprve si určíme, kolik aut projede úsekem silnice za jednotku času. K délce auta připočteme i délku „sedé zóny“, do které se jiný řidič jedoucí za autem nesmí dostat. Efektivní délka auta tedy bude

$$L = l + vt_d,$$

kde  $t_d$  představuje právě dvousekundový odstup. Dobu, kterou k projetí úseku potřebuje jedno auto, lze vyjádřit jako

$$T = \frac{L}{v} = \frac{l + vt_d}{v} = \frac{l}{v} + t_d.$$

Převrácená hodnota  $T$  nám dá frekvenci – počet aut, která projedou úsekem za jednotku času

$$Q = \frac{1}{T}.$$

Zatím jsme uvažovali pouze jednoproudou silnici. Pro silnici s  $n$  jízdními pruhy vynásobíme právě odvozený „průtok“ počtem pruhů  $n$  a dostaneme

$$Q = \frac{n}{T},$$

$$Q = \frac{n}{\frac{l}{v} + t_d}.$$

Nyní sestavíme jakousi obdobu rovnice kontinuity z hydrodynamiky. Aby se v uzlu netvořily zácpy, musí se počet aut příjezdějících a odjíždějících za jednotku času rovnat. Musí tedy platit

$$Q_1 = Q_2,$$

$$\frac{n_1}{\left(\frac{l}{v_1} + t_d\right)} = \frac{n_2}{\left(\frac{l}{v_2} + t_d\right)}.$$

Nakonec z rovnice vyjádříme  $v_2$  a dostaneme výsledek úlohy

$$v_2 = \frac{l}{\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{l}{v_1} + t_d\right) - t_d}.$$

Zajímavost: Pokud bychom chtěli zvýšit „průtok“ dané silnice tím, že bychom zvýšili maximální rychlost, stane se něco zvláštního. Lze to vystihnout limitou

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{l}{v} + t_d} = \frac{n}{t_d},$$

z níž vyplývá, že i kdyby se auta teoreticky pohybovala nekonečnou rychlostí, bude mít silnice konečnou hodnotu „průtoku“. Jediná možnost jeho zvýšení je proto snížit reakční čas  $t_d$  (což by však nebylo bezpečné) nebo přistavět další pruhy.

*Jan Benda*

honzab@fykos.cz

### Úloha I.3 ... zastavit na bruslích

5 bodů;

(chybí statistiky)

Na bruslích se dá brzdít metodou „parallel slide“, při které se nože obou bruslí natočí kolmo na směr pohybu, což výrazně zvýší tření s podložkou. Aby bruslař nespádl, musí se naklonit o úhel  $\varphi = 35^\circ$  od svislého směru. Předpokládejte, že člověk vážící  $m = 70$  kg je i s bruslemi vysoký  $H = 1,8$  m, přičemž těžiště má ve výšce  $h = 1,1$  m nad ledem. Spočítejte, na jak dlouhé dráze zastaví z počáteční rychlosti  $v_0 = 15$  km·h<sup>-1</sup>.

*Dodo neumí brzdít na bruslích (já taky ne).*

V směre nadol na korčuliara působí zrychlení  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>. Aby nespádl, musí mať celková výslednica síl pôsobiacich na

korčuliara nulový moment, teda jej vektorová priamka musí prechádzať bodom dotyku a ťažiskom. Veľkosť trecieho zrýchlenia  $a$  je

$$a = g \operatorname{tg} \varphi.$$

Týmto zrýchlením bude korčuliar spomaľovaný. Dráhu  $d$ , na ktorej zastane, určíme z rovnosti brzdnéj práce a počiatočnej kinetickej energie

$$mad = mgd \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Vyjadrením dráhy a dosadením číselných hodnôt dostávame

$$d = \frac{v_0^2}{2g \operatorname{tg} \varphi} = 1,26 \text{ m}.$$

Korčuliar tak zastane asi o jeden meter ďalej od miesta, v ktorom začal brzdiť. Pôvodnou rýchlosťou by túto dráhu prešiel len za  $t = 0,3$  s. Vidíme teda, že aj v prípade korčúl je reakčný čas nezanedbateľná zložka celého procesu brzdenia.

**Jozef Lipták**

liptak.j@fykos.cz

#### Úloha I.4 ... klesá ke dnu 7 bodů; (chýbí statistiky)

*Kapsle válcového tvaru (Puddle Jumper - Stargate) s průměrem  $d = 4$  m, délkou  $l = 10$  m a vodotěsnou přepážkou v polovině délky je ponořena pod hladinu oceánu a rychlostí  $v = 20 \text{ ft} \cdot \text{min}^{-1}$  klesá ke dnu. V hloubce  $h = 1\,200$  ft praskne sklo na přední podstavě a příslušná polovina kapsle se zaplní vodou. Jakou rychlostí bude nyní klesat? Za jak dlouho klesne až na dno v hloubce  $H = 3\,000$  ft? Osa válce má před prasknutím skla horizontální směr. Předpokládejte, že stěny kapsle jsou vůči jejím rozměrům tenké.*  
*Dodo sleduje Stargate Atlantis.*

Na kapsulu pôsobia tri rôzne sily – sila tiažová  $F_g$ , sila vztlaková  $F_v$  a Newtonova odporová sila prostredia  $F_o$ . Pred prasknutím skla môžeme z rovnováhy síl pre rovnomerný pohyb kapsule určit hmotnosť kapsule  $m$

$$\frac{1}{2}CS\rho v^2 + V\rho g = mg,$$

kde  $C = 0,85$  je odporový koeficient pre náš valec,<sup>1</sup>  $S = dl$  je prierez valca v smere pohybu,  $\rho$  je hustota vody a  $g$  je tiažové zrýchlenie.

Po zatopení čelnej časti sa zmenší objem kapsule na polovicu  $V' = V/2$ , ale jej hmotnosť zostane zachovaná  $m' = m$ . Zmení sa teda veľkosť príspevku vztlakovej sily. Taktiež sa pri páde orientuje do novej polohy zatopenou časťou nadol, čo zapríčiní zmenu koeficientu odporu na hodnotu približne  $C' = 1,5$  a zmení sa aj

<sup>1</sup><https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a395503.pdf>

účinný prierez valca  $S' = \pi d^2/4$ . Po zohľadnení týchto skutočností z rovnakej rovnosti ako na začiatku dostaneme novú rýchlosť klesania

$$\frac{1}{2}C'S'\rho v'^2 + \frac{V}{2}\rho g = mg = \frac{1}{2}CS\rho v^2 + V\rho g,$$

$$v' = \sqrt{\frac{CSv^2 + Vg}{C'S'}} = \sqrt{\frac{Cdlv^2 + \pi d^2/4lg}{C'\pi d^2/4}} = \sqrt{\frac{4Clv^2 + \pi dl g}{C'\pi d}} \approx \sqrt{\frac{lg}{C'}}.$$

Prevedme veličiny s imperiálnymi jednotkami do SI:  $v = 0,10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $h = 366 \text{ m}$  a  $H = 914 \text{ m}$ . Po číselnom dosadení dostávame novú rýchlosť kapsule  $v' = 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vidíme teda, že kapsula bola pôvodne celkom dobre vyvážená (presne ako by sme od ponárajúceho sa plavidla očakávali) a toto vyváženie bolo prudko narušené. Novou rýchlosťou bude kapsuli trvať iba niečo vyše jednej minúty, kým dosadne na dno!

**Jozef Lipták**

liptak.j@fykos.cz

## Úloha I.5 ... mechanicky (ne)stabilní kondenzátor

8 bodů; (chybí statistiky)

*Představme si nabitý deskový kondenzátor, jehož jedna vodorovná deska je ve fixní pozici a druhá levituje přímo pod ní v rovnovážné pozici. Spodní deska není nijak mechanicky fixována. Jaká bude kapacita takového kondenzátoru v závislosti na přiloženém napětí? Je tento kondenzátor mechanicky stabilní?*

*Vašek vás chtěl ugrilovat kondenzátorem.*

Začneme nejdříve komentářem na standardní *pevný* deskový kondenzátor. Kapacita  $C$  kondenzátoru je definována jako podíl náboje  $Q$  na kondenzátoru a přiloženého napětí  $U$ , neboli

$$C = \frac{Q}{U}.$$

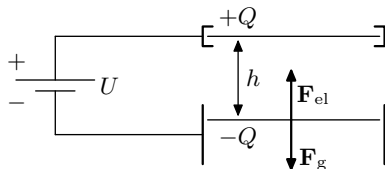
Na první pohled se tak může zdát, že kapacita kondenzátoru je nepřímou úměrná napětí. Avšak nesmíme zapomenout na to, že typicky velikost náboje  $Q$  je úměrná napětí  $U$ , takže kapacita  $C$  kondenzátoru na přiloženém napětí  $U$  nezávisí. Kapacita kondenzátoru je typicky dána *pevným* geometrickým uspořádáním vodičů a dielektrik v prostoru. V případě deskového kondenzátoru je jeho kapacita rovna

$$C = \varepsilon \frac{S}{h}, \quad (1)$$

kde  $\varepsilon$  je permitivita prostředí mezi deskami,  $S$  je plocha desek a  $h$  je jejich vzdálenost. V této úloze tomu bude jinak, neboť geometrické uspořádání našeho kondenzátoru (vzdálenost jeho desek) *bude záviset* na přiloženém napětí.

Schematický náčrt našeho kondenzátoru je na obr. 1. Na kondenzátor je přiložené stejnosměrné napětí  $U > 0$  tak, že je (bez újmy na obecnosti) na horní desce náboj  $Q > 0$  a na spodní desce ve vzdálenosti  $h$  od horní desky náboj  $Q < 0$ . Horní deska

je fixována, takže veškeré vnější síly jsou vykompenzovány působením uchycení. Na spodní desku působí horní deska přitažlivou elektrickou silou  $\mathbf{F}_{\text{el}}$  a také tíhová síla  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$  směřující opačným směrem, kde  $m$  je hmotnost spodní desky a  $g$  je velikost tíhového zrychlení.



Obr. 1: Schematický náčrt kondenzátoru.

Pro výpočet elektrické síly  $\mathbf{F}_{\text{el}}$  použijeme pro deskový kondenzátor často používanou aproximaci, podle které je elektrické pole mezi deskami homogenní (elektrická intenzita  $\mathbf{E}$ ) a vně je nulová. Tato aproximace má dobré opodstatnění, je-li plocha desek  $S$  mnohem větší než kvadrát jejich vzdálenosti  $h^2$  ( $S \gg h^2$ ).

Nyní si musíme uvědomit, že elektrická síla působící na spodní desku není přímo  $-QE$ , neboť elektrické pole v kondenzátoru je tvořeno jak náboji na horní desce, tak náboji na spodní desce, a do výsledné síly působící na spodní desku interakce mezi náboji na ní nepřispějí. Výsledné elektrické pole mezi deskami se skládá z elektrického pole nábojů na horní desce a z elektrického pole nábojů na spodní desce. Ze symetrie pak není těžké vidět, že elektrické pole pouze od nábojů na horní desce je právě  $\mathbf{E}/2$ . Celková elektrická síla působící na spodní desku je tak

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = -\frac{QE}{2}.$$

Napětí  $U$  mezi deskami je jednoduše rovno  $U = Eh$ , neboť pole mezi deskami je homogenní. V případě složitějšího (avšak stále stacionárního elektromagnetického) pole uvádíme pro pokročilé, že elektrické napětí mezi body A a B je obecně definované dráhovým integrálem

$$U_{\text{el}} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

kde  $d\mathbf{s}$  je délkový element. Velikost elektrické síly je tak

$$F_{\text{el}} = \frac{QU}{2h}.$$

Z definice kapacity je  $Q = CU$ , a proto

$$F_{\text{el}} = \frac{CU^2}{2h}. \quad (2)$$

Má-li být spodní deska kondenzátoru v rovnovážné poloze, musí si být velikosti elektrické a tíhové síly rovny, tedy

$$\frac{CU^2}{2h} = mg.$$



Z této rovnice ještě nemůžeme odečíst závislost kapacity na napětí, protože se v ní vyskytuje vzdálenost desek  $h$ , která také závisí na napětí. Tu ještě musíme nahradit dosazením  $h$  z rovnice (1), čímž dostaneme

$$\frac{C^2 U^2}{2\varepsilon S} = mg.$$

Odtud již získáme hledanou závislost kapacity na přiloženém napětí

$$C = \frac{\sqrt{2mg\varepsilon S}}{U},$$

neboť  $S$  a  $m$  jsou jenom konstanty.

Nyní se podíváme na stabilitu našeho kondenzátoru, a tedy spodní desky. Dosazením za kapacitu  $C$  z rovnice (1) do (2) dostaneme závislost elektrické síly na vzdálenosti desek,

$$F_{\text{el}} = \frac{\varepsilon S U^2}{2h^2}. \quad (3)$$

V rovnovážné poloze je velikost této síly rovna velikosti tíhové síly, která na poloze nezávisí. Vychýlí-li se deska směrem nahoru, velikost elektrické síly směřující k horní desce vzroste a způsobí, že se bude spodní deska dále přitahovat k horní desce. Vychýlí-li se deska směrem dolů, velikost elektrické síly směřující k horní desce klesne a převažující tíhová síla bude dále desku urychlovat směrem dolů. Tak jsme odůvodnili, že je náš kondenzátor mechanicky nestabilní.

Tuto úlohu lze také řešit tzv. přes energie. Velikost elektrické síly působící na spodní desku najdeme jako záporně vzatou derivaci energie elektrického pole  $E_{\text{el}}$  v kondenzátoru podle vzdálenosti  $h$  spodní desky od horní desky,

$$F_{\text{el}} = -\frac{dE_{\text{el}}}{dh},$$

kde

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon S U^2}{2h}.$$

Opět přikládáme poznámku pro pokročilé. Obecně je síla  $\mathbf{F}$  spjatá s její potenciální energií  $E_{\text{p}}$  jako záporně vzatý gradient potenciální energie, tedy

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{p}} \equiv -\nabla E_{\text{p}}.$$

Po provedení derivace dostaneme velikost síly  $F_{\text{el}}$  přímo ve tvaru (3). Dále se pokračuje jako výše. Přes energie můžeme také vyšetřit stabilitu. Celková potenciální energie  $E_{\text{p}}$  spodní desky je rovna součtu potenciální energie tíhové a potenciální elektrické energie,

$$E_{\text{p}} = -mgh - \frac{1}{2} C U^2 = -mgh - \frac{\varepsilon S U^2}{2h}.$$

Extrém (minimum nebo maximum) této potenciální energie, a tedy rovnovážná poloha, se nachází v místě, kde je derivace  $dE_{\text{p}}/dh$  nulová. Platí

$$\frac{dE_{\text{p}}}{dh} = -mg + \frac{\varepsilon S U^2}{2h^2} = 0 \quad (4)$$

pro

$$h = U \sqrt{\frac{mg\varepsilon S}{2}}.$$

Rovnice (4) nevyjadřuje nic jiného, než rovnost sil v rovnovážné poloze. O povaze extrémů rozhoduje druhá derivace potenciální energie  $d^2 E_p / dh^2$ . Je-li kladná, jedná se o lokální minimum potenciální energie a poloha je stabilní. Je-li záporná, jedná se o lokální maximum potenciální energie a poloha je labilní. Druhým zderivováním dostaneme

$$\frac{d^2 E_p}{dh^2} = -\frac{\varepsilon S U^2}{h^3} < 0,$$

a tedy jsme opět ukázali, že je náš kondenzátor mechanicky nestabilní.

**Václav Mikeska**

v.mikeska@fykos.cz

### Úloha I.P ... uff, to je vedro 10 bodů; (chybí statistiky)

*Možná jste si všimli, že sopky na Zemi nemají univerzální tvar – navzájem se mohou dost lišit. Srovnajte například fotografie havajské sopky Mauna Loa a italského Vesuvu. Liší se nejen strmostí stěn, ale i stylem erupcí. Obě tyto vlastnosti úzce souvisí s viskozitou magmatu. Jak viskozita magmatu ovlivňuje styl a nebezpečnost erupcí? Souvisí to nějak s geografickou polohou sopek?*

*Jindrovi už hrabe ze studia „věd“ o Zemi.*

V zadání je zmíněno, že sopky nemají všechny stejný tvar. Od toho se odrazíme. Například havajská sopka Mauna Loa má mírný sklon svahu, v poměru ke své výšce se rozprostírá po široké ploše. Oproti tomu italský Vesuv nebo japonská Fudži mají typický kuželovitý tvar, jaký si často laikové představí, když se řekne „sopka“.

Tvar sopky úzce souvisí se stylem erupcí a s vlastnostmi magmatu. Mauna Loa a sousední Kilauea leží nad havajskou horkou skvrnou (termín „horká skvrna“ si vysvětlíme později) a produkuje čedičové lávy.<sup>2</sup> Jelikož čedičová láva má obecně malou viskozitu ( $1 \cdot 10^1$  až  $1 \cdot 10^2$  Pa·s, asi jako kečup), vzniká štítová sopka s povlnným sklonem svahů. Vesuv a Fudži se nacházejí v místech podsouvání oceánské zemské desky pod kontinentální. V takových oblastech vzniká magma andezitického složení, které je o jeden až dva řády viskóznější ( $\approx 1 \cdot 10^3$  Pa·s) než bazaltické magma. Vyšší viskozita znesnadňuje únik rozpuštěných plynů.<sup>3</sup> Z bazaltického magmatu bublinky snadno uniknou, erupce čedičových sopek proto nebývají příliš výbušné (viz obrázek 2), láva se poklidně rozlévá do okolí. Naproti tomu natlakované bublinky ve viskóznějším andezitickém magmatu způsobují explozivní erupce, při kterých kromě výtoky lávy dochází i k vyvrhování pevných částic. Kužel

<sup>2</sup>Oba názvy „magma“ i „láva“ označují roztavenou horninu. Rozdíl je v poloze. Magma se říká tavenině pod povrchem země, zatímco láva je magma vyvržené na povrch.

<sup>3</sup>Jde o podobný efekt jako při otevření limonády. Při stoupání magmatu k povrchu klesá tlak a tím pádem i rozpustnost plynů – uvolní se bublinky.

sopky je tvořený střídajícími se vrstvami utuhlé lávy a spadaných sopečných usazenin a nazývá se stratovulkán.



Obr. 2: Erupce havajské sopky Mauna Loa v roce 1984. Čedičová láva je vyvrhována do výšky v řádu maximálně desítek metrů a odtéká pryč. (Zdroj: B. Serbert. <https://www.nps.gov/havo/learn/nature/mauna-loa-1984.htm>)

### *Dělení vyvřelých hornin*

Pro lepší pochopení tématu je vhodné se alespoň trochu vyznat v geologii a ve vyvřelých horninách. Vyvřelá hornina je taková, která vznikla krystalizací z taveniny. Vyvřelé horniny, které vznikají ztuhnutím lávy na povrchu země se nazývají výlevné vyvřelé horniny. Minerály ve výlevných horninách tvoří malé, často okem nepostřehnutelné krystalky, protože prudký pokles teploty nedává zárodkům krystalů čas k růstu. Ne všechno magma tuhne po sopečných erupcích na vzduchu. Ve skutečnosti většina roztavených hornin zkrystalizuje už pod zemí a k povrchu se nikdy nedostanou. Tyto hlubinné vyvřelé horniny mají hrubší krystalickou strukturu, názorným příkladem je žula se svými rozpoznatelnými krystaly křemene, živců a slídy. Někdy se ještě vyděluje mezistupeň žilných vyvřelých hornin, které vznikají z magmatu, jež si prorazilo v okolní skále úzkou cestu a tuhne v žíle. Odvod tepla je rychlejší než z velkého hlubinného tělesa magmatu, avšak pomalejší než na vzduchu. Krystaly mají střední velikost, bývají však viditelné pouhým okem.

Tak mohou existovat horniny, které mají sice stejné chemické složení, avšak jinou fyzikální strukturu, a proto mají i různé názvy. Povrchovým ekvivalentem hlubinné žuly je světle šedý či načervenalý ryolit. Hlubinným ekvivalentem tmavé vyvřelé výlevné horniny čediče (bazaltu) je gabro.

Jiným důležitým kritériem pro rozdělení vyvřelých hornin je obsah křemíku, potažmo oxidu křemičitého  $\text{SiO}_2$ . Z historických důvodů se horniny s vysokým obsahem oxidu křemičitého ( $> 65 \text{ wt}\% \text{SiO}_2$ ) nazývají kyselé a horniny s nízkým obsahem oxidu křemičitého ( $42 \text{ až } 52 \text{ wt}\% \text{SiO}_2$ ) zásadité (bázické). Horniny se středním obsahem  $\text{SiO}_2$  jsou podle tohoto názvosloví neutrální a horniny ještě zásaditější

než zásadité (v zemské kůře vzácné) se jmenují ultrabázické. Tyto názvy nemají nic společného s kyselostí a zásaditostí, jak je známe z chemie.

Známou kyselou vyvřelou horninou je žula. Ta se skládá z minerálů křemene (čistý  $\text{SiO}_2$ ), draselných a sodnovápenatých živců (taktéž ve své krystalické struktuře obsahují hodně křemíku) a slídy. Příkladem neutrální horniny je andezit, který se skládá ze sodnovápenatých živců a menšího množství křemene, amfibolů, slídy, pyroxenů případně i olivínu. Příkladem bázické horniny je čedič (bazalt), který se skládá ze sodnovápenatých živců, pyroxenů a olivínu. Pyroxeny a olivíny sice taktéž obsahují křemík, ne však v takovém množství jako křemen nebo živce. Příkladem neutrální horniny je andezit, který se skládá ze sodnovápenatých živců a menšího množství křemene, amfibolů, slídy, pyroxenů případně i olivínu.

### *Zemská kůra a litosféra*

Ze školy si pamatujeme pojmy zemská kůra a litosféra. Oba označují nejsvrchnější vrstvu zemského tělesa. Už však nemusí být jasné, jaký je mezi nimi rozdíl. Rozhraní zemské kůry a pláště je dělení podle chemického složení. Kontinentální zemská kůra se skládá převážně z kyselých hornin, žul, oceánská zemská kůra je hlavně bazaltová, ale svrchní zemský plášť je složen z ultrabázické horniny peridotitu. Litosféra a astenosféra je dělení na základě fyzikálních vlastností. Litosféra jsou tuhé horniny, které se deformují elasticky. Litosférické desky „plavou“ na astenosféře, což jsou tuhé horniny chovající se plasticky díky vysoké teplotě v hloubkách. Litosféra zahrnuje celou zemskou kůru a zasahuje i do horních vrstev zemského pláště.

### *Tavení složených látek*

Za jakých podmínek se může hornina roztavit? Než si přímo zodpovíme tuto otázku, musíme se podívat na tavení nehomogenních pevných látek. Horniny se skládají z více minerálů a různé minerály mohou mít různé teploty tání. Znamená to, že minerál s nejnižší teplotou tání se začne tavit jako první, když teplota dostatečně vystoupá? Ne, hornina se začne tavit už při nižší teplotě a začnou se tavit minimálně dva minerály zároveň.

V každém systému, kde jsou při teplotě tání v kontaktu pevná fáze a kapalná fáze<sup>4</sup> téže chemické látky a kde neodebíráme ani nepřidáváme teplo, se ustanoví dynamická rovnováha. Molekuly z pevné látky se uvolňují do kapaliny a naopak molekuly z kapaliny krystalizují na povrchu pevné látky. Počet molekul jdoucích jedním směrem, se rovná počtu molekul, které jdou opačným směrem. Makroskopicky se jedná o rovnovážný stav.

Klíčovou termodynamickou veličinou, kterou musíme sledovat, je Gibbsova volná energie

$$G = U + pV - TS, \quad (5)$$

<sup>4</sup>Část systému, která se liší od ostatních částí jak chemicky tak fyzikálně, se nazývá fáze. Například voda a olej jsou dvě fáze. Stejně tak voda a led nebo grafit a diamant jsou dvě fáze téže chemické látky.

kde  $U$  je vnitřní energie,  $p$  je tlak,  $V$  je objem,  $T$  je teplota a  $S$  je entropie. Diferenciál Gibbsovy energie je

$$dG = dU + p dV + V dp - T dS - S dT,$$

kam můžeme z prvního termodynamického zákona dosadit  $dU = \delta q - p dV$ , kde  $q$  je teplo, čímž dostaneme

$$dG = \delta q - T dS + V dp - S dT.$$

O kusu horniny v hlubinách Země můžeme předpokládat, že se vždy nachází v rovnováze se svým okolím. Jelikož změny teploty a tlaku na geologických škálách jsou pomalé, platí  $dp = 0$  a  $dT = 0$ , a tudíž výraz pro infinitezimální změnu Gibbsovy energie se zredukuje na

$$dG = \delta q - T dS.$$

Hornina v rovnováze s okolím zaujme stav s nejnižší Gibbsovou energií. Proč? Pokud se hornina v rovnováze už nachází, platí rovnost pro změny v rovnovážném stavu  $\delta q = T dS$ . Pokud kus horniny v rovnováze není, platí Clausiova nerovnost  $\delta q < T dS$ . Gibbsova energie tudíž bude klesat, dokud se hornina nedostane do rovnováhy, kdy je Gibbsova energie minimální.

Člen  $U + pV$  v rovnici (5) je entalpie  $H = U + pV$ . To je ekvivalent vnitřní energie pro přesuny tepla při stálém tlaku. Jestliže dodáme látce teplo za stálého objemu, vzroste o stejnou hodnotu její vnitřní energie. Jestliže teplo dodáme za stálého tlaku, vzroste o stejnou hodnotu entalpie látky. Teoretičtí fyzikové radši pracují s vnitřní energií (protože se s ní snadněji počítá), praktikové rádi používají entalpii (protože se snadněji měří).

Aby byla Gibbsova energie co nejnižší, systém se pokusí zaujmout stav s co nejnižší entalpií a co nejvyšší entropií. Tyto dva požadavky jsou však protichůdné. Nízká entalpie je podmíněna nízkou teplotou, ale ta znamená nízkou entropii a naopak. Pevné látky mívají nízkou entalpii, avšak také nízkou entropii. Kapaliny mají vyšší entalpii i entropii a plyny ještě víc. Ke skupenské přeměně může dojít, když se Gibbsovy volné energie obou skupenství rovnají. Vezměme si například vodu za atmosférického tlaku. Teplota tání je  $0^\circ\text{C}$ . Při  $0^\circ\text{C}$  mají led i kapalná voda stejnou Gibbsovou energii, proto obě skupenství mohou existovat současně. Například ale při  $10^\circ\text{C}$  by hypotetický led měl vyšší Gibbsovou energii než kapalná voda, proto je rovnovážným skupenstvím vody při této teplotě kapalina.

Přidání příměsi do čisté kapaliny změní entalpii a podstatně zvýší entropii, Gibbsova energie se sníží a tím pádem poklesne i teplota tání. Toho se využívá například při zimním solení silnic, kdy sůl sníží bod tání vody a nedojde tak k námraze nebo k nahromadění sněhu. Teplotu tání však nemůžeme snížit libovolně. Například pro směs soli a vody lze dosáhnout minimální teploty tání  $-21,2^\circ\text{C}$  při 23,3 wt% soli. Směs s nejnižší možnou teplotou tání se nazývá eutektická. Neeutektické směsi začínají tuhnout vždy při vyšší teplotě.

Schéma, jak tání a tuhnutí závisí na složení, můžeme nakreslit do fázového diagramu teplota vs. složení. Křivka, nad kterou je všechen materiál kapalný, se nazývá liquidus. Podobně křivka, pod kterou je všechna látka v pevném skupenství se nazývá solidus. Obě křivky jsou vyznačeny v obrázku 3.

Při tuhnutí eutektické směsi vody se solí se vytvoří dvě fáze – čistý led s minimem soli a čisté krystalky soli. Jak by ale probíhalo tuhnutí neeutektické směsi? Vezměme si vodu s trošičkou rozpuštěné soli. Jak jsme zmínili výše, led začne krystalizovat až při nižší teplotě než  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Jde o čistý led. Molekuly  $\text{H}_2\text{O}$  jsou tak přednostně odstraňovány z roztoku, čímž roste koncentrace soli ve zbylé kapalině a dále se snižuje teplota tuhnutí. Musíme stále odebírat teplo, aby mohl krystalizovat další led. Systém se nyní skládá ze dvou fází, ledu a solného roztoku. Obě fáze mají rozdílné chemické složení od počátečního roztoku. Kdybychom v tuto chvíli fáze oddělili, získali bychom led (čisté  $\text{H}_2\text{O}$ ) a koncentrovanější solný roztok než byl původní. Rovnovážné složení roztoku při dané teplotě můžeme zjistit z toho, kde vodorovná čára protne liquidus (pravá červená tečka v obrázku 3).

Až když složení kapaliny dosáhne eutektického složení, další odebrání tepla nesníží teplotu, ale způsobí krystalizaci eutektické směsi. Po utužení je pevná látka opět složena ze dvou fází, krystalků ledu a dihydrátu chloridu sodného  $\text{NaCl} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , a celá dohromady má stejné chemické složení jako původní roztok.

Při zahřívání pevné látky probíhá celý proces opačně. Jakmile bychom naši směs ledu s dihydrátem soli zahřáli na  $-21,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ , růst teploty by se zastavil. Další dodávané teplo se bude spotřebovávat na skupenskou přeměnu a vznik eutektické kapaliny. První eutektická směs se vytvoří v místech kontaktu krystalků ledu s dihydrátem chloridu sodného. Až roztaje dostatek vody, v níž se rozpustí všechna sůl, bude při dalším dodávání tepla stoupat teplota. Současně s tím se budou rozpouštět zbylé krystalky ledu a budou snižovat koncentraci soli v kapalině. Při teplotě blízké  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  roztaje poslední led a nám zbude slabý solný roztok.

### *Tavení hornin*

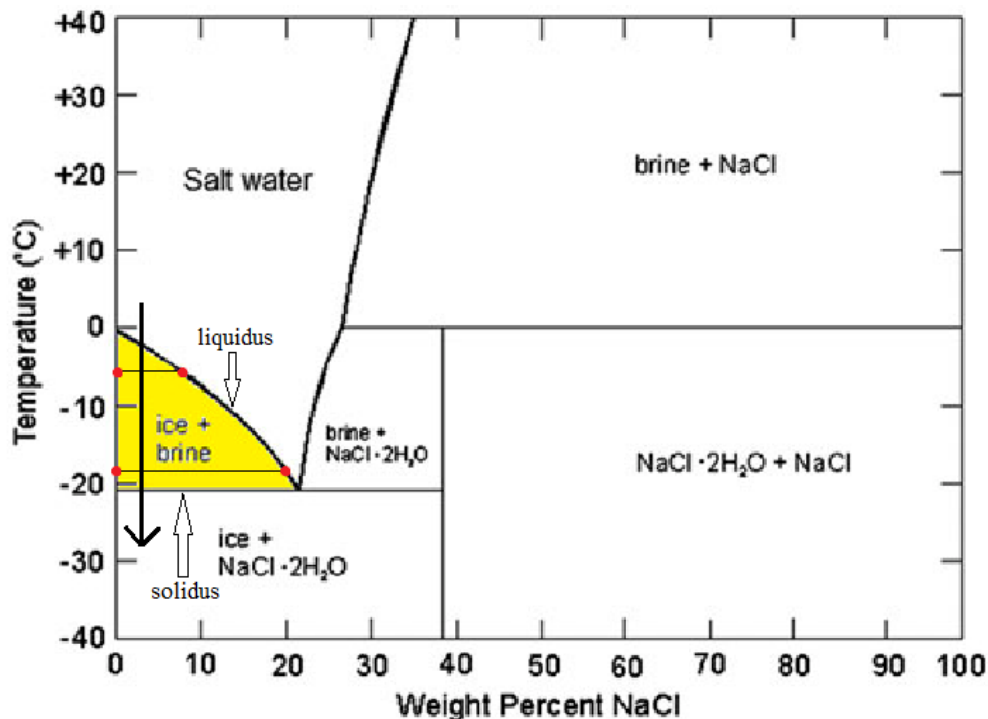
Navzdory populárním představám nejsou horniny v zemském pláště tekuté<sup>5</sup>. Mají sice vysokou teplotu ( $1\ 300$  až  $1\ 400\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ale kvůli obrovskému tlaku v hlubinách se netaví. V důsledku vysoké teploty jsou však tyto horniny v plastickém stavu. Podobně jako plastelína se pod tlakem deformují. Dochází k difuzi atomů v krystalech a ke vzájemnému posouvání krystalických zrn. Horniny pláště „tečou“ jako kapalina s viskozitou  $1 \cdot 10^{20}$  až  $1 \cdot 10^{21}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ <sup>6</sup>, nicméně stále mají zachovanou krystalickou strukturu. Jde o pevnou látku.

Průběh teploty směrem do nitra Země je na všech místech velice podobný. Do hloubky  $100$  až  $150\text{ km}$  stoupá teplota s hloubkou přibližně jako  $25\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$ . Hluběji je kvůli vyrovnávání teplot konvekčním prouděním pozvolnější teplotní gradient  $-0,6\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$ .

Teplota se tam pohybuje okolo  $1\ 400\text{ }^{\circ}\text{C}$  a tlaky se pohybují v řádu jednotek gigapascalů (podle hloubky). Teplota tání s hloubkou taktéž vzrůstá a vždy je vyš-

<sup>5</sup>Vnější zemské jádro je sice roztavené, avšak jeho materiál se nemísí s pláštěm a nikdy se nedostane na povrch.

<sup>6</sup>To je nepředstavitelně vysoká viskozita podobná viskozitě skla nebo pianové struny, avšak na geologických časových škálách se deformace projeví.



Obr. 3: Fázový diagram tuhnutí směsi vody se solí. Anglický výraz „brine“ označuje solný roztok. (Zdroj: S. M. Badawy. *Laboratory freezing desalination of seawater*, Desalination and water treatment (2015), *upraveno*)

ší než přirozená teplota podle geotermálního gradientu. Jak se tedy můžou horniny přirozeně roztavit?

Známe tři způsoby vzniku magmatu.

- Adiabatický vzestup horniny. Ze zemského pláště může stoupat materiál konvekčním pohybem. Pokud horninové těleso stoupá příliš rychle, nemá čas vyrovnat teplotu s okolím a chladne adiabaticky. Adiabata má však mírnější pokles teploty než přirozený gradient a může protnout solidus. Toto se děje na divergentních okrajích litosférických desek – tam, kde vyniká nová oceánská kůra.
- Příměs vody v hornině snižuje teplotu tání. V oceánské kůře se nachází mnoho hydratovaných minerálů. Při subdukcii oceánské desky do hlubin dojde k restrukturalizaci minerálů, voda se uvolní, vystoupá do vyšších vrstev pláště, kde její přítomnost sníží

teplotu tání. Takto vznikají andezitická magmata.

- Roztavení při kontaktu s místem s vysokou teplotou. Na některých místech rozhraní zemského jádra a pláště dochází k silnému ohřevu pláště. Mechanismus vzniku takové nerovnováhy není dosud přesně znám. Každopádně horký materiál stoupá konvekcí. Toto magma se sice nedostane až na povrch, pod litosférou se „rozplácne“, ale jelikož má vyšší teplotu, začne tavit nad ní ležící horniny pláště. Taková oblast se nazývá horká skvrna.

V zemském nitru není dostatek tepla, aby došlo k úplnému roztavení horniny. Skupenské teplo tání tomu brání. Magmata proto obvykle mají eutektické složení. Velice často bývá magma tvořeno směsí taveniny a pevných krystalků.

### *Křemík ovlivňuje viskozitu*

Každá vyvřelá hornina byla kdysi roztaveným magmatem. Právě obsah křemíku vysoce ovlivňuje viskozitu taveniny. Kationty křemíku  $\text{Si}^{4+}$  vytváří pevnou strukturu se čtyřmi anionty kyslíku  $\text{O}^{2-}$  uspořádanými do vrcholů čtyřstěnu. Tato skupina  $[\text{SiO}_4]^{4-}$  má čtyři elektrony navíc, které u atomů kyslíku dychtivě čekají na jiné atomy či molekuly, s nimiž by mohly vytvořit vazbu. Skupiny  $\text{SiO}_4$  se velmi ochotně spojují navzájem. V čedičovém magmatu s menším obsahem křemíku se čtyřstěny  $[\text{SiO}_4]^{4-}$  vyskytují osamoceně nebo v malých skupinkách. Jenže v magmatu žulového složení se čtyřstěny spojují do řetězců, do 2D a 3D struktur a tím zvyšují viskozitu magmatu o několik řádů. Viskozita magmatu výrazně ovlivňuje styl erupcí.

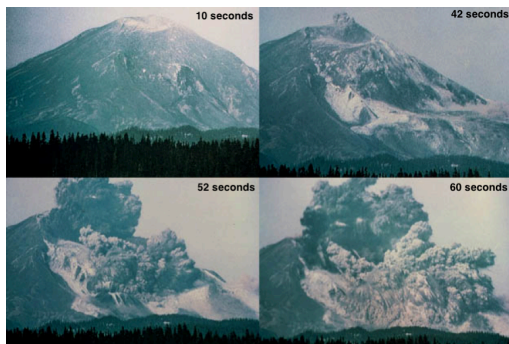
### *Typy sopečných erupcí*

Magma není tvořeno jen roztavenou horninou a případně neroztavenými krystalky, v magmatu se nachází i množství rozpuštěných těkavých látek, hlavně  $\text{H}_2\text{O}$  a  $\text{CO}_2$ . Když magma stoupá k povrchu, s klesajícím tlakem se snižuje rozpustnost, a tak se začínají tvořit bublinky. V málo viskózním čedičovém magmatu můžou bublinky celkem volně cestovat, spojovat se, a nakonec vystoupat na povrch, kde volně uniknou. Ve viskóznějším andezitickém nebo ryolitickém (žulovém) magmatu zůstávají bubliny ale uvězněny. S tím, jak se magma blíží k povrchu, bubliny rostou. 3D síť vysokoviskózního magmatu s bublinami v jednu chvíli už nevydrží další růst bublin a promění se na vysokotlaký plyn s částicemi horké hmoty. A to je vlastně okamžik erupce, kdy se do okolí rozprsknou kusy magmatu jako sopečné pumy a sopečný popel.

Pokud se viskózní magma nachází pod silnější vrstvou horniny, tlak se může dlouho akumulovat, až dojde k silné erupci pliniovského typu. Při ní je vyvržen sloupec sopečného popela vzhůru k nebesům. Po ochlazení částičky popela klesají na zem a vytvoří sopečný spad. Nebezpečné je, pokud výbuch nemíří vzhůru, ale do strany nebo pokud se mrak stoupající nahoru ochladí a spadne zpět na sopku. V takovém případě se dá do pohybu dolů po svahu mračno horkého sopečného popela, které spálí vše, co mu přijde do cesty. Teplota pyroklastického proudu se pohybuje od jednotek stovek do



tisíce stupňů Celsia a rychlost dosahuje řádu stovek kilometrů za hodinu. Pyroklastický proud smetl v roce 1902 město Saint-Pierre na Martiniku. Podobně pyroklastický proud na konci své dráhy, když už ztratil větší část energie a také schladl, pohřbil v roce 79 město Pompeje. Příkladem z nedávné doby je výbuch sopky Mount St. Helens (viz obrázek 4).



Obr. 4: Explosivní erupce sopky Mount St. Helens v roce 1980. Časový údaj se vztahuje k době uplynulé od zemětřesení, které spustilo sesuv svahu a erupci. Vznikl pyroklastický proud, který doputoval až 31 km od sopky. (Zdroj: G. Rosenquist.

[https://volcanoes.usgs.gov/volcanic\\_ash/mount\\_st\\_helens\\_1980.html](https://volcanoes.usgs.gov/volcanic_ash/mount_st_helens_1980.html))

To ale nutně neznamená, že by vulkanismus čedičových sopek byl méně nebezpečný. Jejich erupce nebývají tak divoké, ale při velkých erupcích se globální hrozbou stávají plyny uvolněné z magmatu, které mohou ovlivnit klima. Jako extrémní příklad si vezměme například masivní výlevný vulkanismus z doby před 252 miliony let na území dnešní Sibíře. Je pravděpodobné, že sopečné plyny a prach uvolněné do atmosféry změnilo klima a způsobily permské vymírání druhů. Z historicky nedávných erupcí se jedná například o erupci vulkánu Laki na Islandu v roce 1783. Laki není klasická sopka s kuzelem. Šlo o erupci podél trhliny – láva vytékala z mnoha kráterů podél linie dlouhé 25 km. Fluor uvolněný při erupci popadal na islandské pastviny, z čehož se otrávil a zahynula polovina dobytka. Na ostrově vypuknul hladomor, který nepřežilo 20 % populace. Do atmosféry se uvolnilo  $1,2 \cdot 10^8$  t oxidu siřičitého  $\text{SO}_2$ , který způsobil globální ochlazení. Následující zimu provázely tuhé mrazy, například v Americe zamrzla řeka Mississippi. Jako důsledek erupce tak můžeme označit i povodně v Čechách na jaře 1784, které poničily Karlův most v Praze.

### Geografické rozmístění sopek

Jistě jste si na mapách všimli, že rozmístění sopek není rovnoměrné. Sopky se koncentrují na rozhraní litosférických desek, ale existují i nějaké sopky mimo tato rozhraní (například na Havaji nebo na Kanárských ostrovech). Nejvíce vulkanické činnosti se vyskytuje na divergentních rozhraních oceánických desek, kde dochází ke tvorbě nové oceánské kůry. Tuhnoucí bazaltická láva vytváří na mořském dně v kontaktu s vodou takzvanou polštářovou lávu – na povrchu lávy se kvůli odvodu tepla vytvoří

tenká pevná krustička, avšak zevnitř působící tlak přibývající lávy po chvíli krustu na jednom místě prolomí a vytvoří se nová lávová boule. Stejný proces se pak opakuje pořád a pořád dokola. Tento typ vulkanické činnosti však často zůstává mimo pozornost, protože nepředstavují žádné nebezpečí. Při tuhnutí lávy dochází k vázání molekul vody k některým minerálům, což má potom význam při subdukcii oceánské desky pod kontinentální desky.

Při střetu oceánské a kontinentální desky se hustější materiál oceánské desky začne zanořovat. V hloubkách okolo 100 km dojde k metamorfické přeměně minerálů, voda uzavřená v hornině se uvolní a způsobí snížení teploty solidu a dojde k tavení magmatu. Díky přítomnosti vody je eutektické složení taveniny posunuto ve prospěch  $\text{SiO}_2$  a vzniká andezitické magma. Případně je možné, že od andezitického magmatu se ohřejí horniny zemské kůry, jež jsou převážně tvořené žulou, a tak vznikne ještě viskóznější ryolitické magma. Sopečné erupce nad místy podsouvání oceánské desky pod kontinentální mají opravdu výbušný charakter. Jako příklad může sloužit dobře zdokumentovaná exploze Mount St. Helens z roku 1980 nebo už dříve zmíněný Vesuv.

Samostatnou kategorií jsou sopky sedící na horkých skvrnách. Výskyt horkých skvrn je nezávislý na deskové tektonice, a tak tyto sopky jsou po zemské povrchu rozesety náhodně. Tok horkého materiálu způsobujícího horkou skvrnu začíná na rozhraní zemského jádra a pláště. Díky rozdílu hustot horkého a studenějšího materiálu může tento horký materiál vystoupat až k zemské kůře, kde se zastaví pod horninami s nižší hustotou, protože zemská kůra má v průměru nejnižší hustotu ze všech částí zemského nitra. Horký materiál se „rozplácne“ a vytvoří plášťový chochol. Od horkého materiálu se zahřejí a roztaví horniny nad ním. Charakter vulkánu nad horkou skvrnou je tak určen tím, jestli se horká skvrna nachází pod oceánskou kůrou nebo pod kontinentální kůrou. Z oceánské kůry, která má většinou bazaltické složení, vznikají štítové sopky jako na Havaji. Naopak na horkých skvrnách pod kontinentální kůrou vznikají supervulkány, protože tavením kontinentální kůry vzniká vysoce viskózní žulové magma, které v sobě dokáže naakumulovat tlak potřebný k superexplozi. Příkladem je supervulkán Yellowstone v Severní Americe.

*Jindřich Jelínek*  
jjelinek@fykos.cz

**Úloha I.E ... Kdy už budou ty těstoviny?** 14 bodů;  
(chybí statistiky)

*Změřte závislost času začátku varu vody na jejím množství v nádobě. Měření opakujte několikrát pro alespoň pět různých objemů. Dbejte přitom na konzistentnost podmínek, zejména na kritérium varu a počáteční teplotu vody, nádoby a sporáku. Výslednou závislost se pokuste vysvětlit.*

*Dodáv boj se sporákem na koleji.*

*Jednoduchý model*

Ohrev vody je úkon, ktorý bežný človek vykoná aj niekoľkokrát denne. Navyše obvykle chceme aby voda zovrela čím skôr, či už

pri varení večerných cestovín, či rannej kávy alebo čaju. Zjednodušene môžeme popísať ohrev vody pomocou kalorimetrickej rovnice

$$Q = mc\Delta T = mc(T_f - T_i),$$

kde  $Q$  je teplo dodané vode,  $m$  je hmotnosť vody,  $c$  je merná tepelná kapacita vody a  $\Delta T$  je rozdiel počiatočnej  $T_i$  a koncovej teploty  $T_f$ , pričom predpokladáme, že pri koncovej teplote voda ešte nevríe. Dodané teplo sa dá jednoducho určiť ako súčin výkonu kanvice a času, ktorý beží

$$Q = Pt = UIt = \frac{U^2}{R}t,$$

kde sme využili vzťah pre výkon v elektrickom obvode pre súčiastku pod napätím  $U$ , ktorou tečie prúd  $I$  a má elektrický odpor  $R$ . Všetko toto teplo ale nezohrieva len vodu, zohriať musíme aj varné teleso, ktorému musíme dodať teplo

$$Q = C(T_f - T_i),$$

kde  $C$  je tepelná kapacita varného telesa. Ak by sme túto sústavu považovali za uzatvorenú (žiadne odparovanie vody) a tepelne izolovanú, výsledný vzťah pre čas varenia by po dosadení za hmotnosť vody z objemu  $m = \rho V$  vyzeral

$$t = \frac{C(T_f - T_i) + \rho V c (T_f - T_i)}{\frac{U^2}{R}}.$$

Ak predpokladáme, že v priebehu varenia sa jednotlivé veličiny nemenia dostávame lineárnu závislosť času na objeme.

### *Postup merania a použité pomôcky*

Meranie sme vykonávali pre rýchlovarnú konvicu s objemom povoleným na ohrev vody medzi polovicou a celým litrom s deklarovaným výkonom  $P = 1000$  W s použitím vody z kohútika. Objem vody v konvici sme merali použitím dvoch rôznych hrnčiekov, ktorých vlastný objem sme určili s pomocou kuchynských váh ako  $V_1 = 145$  ml,  $V_2 = 330$  ml, kde chybu merania objemu pre oba hrnčky počas experimentu odhadujeme na  $\Delta V_0 = 10$  ml. Pri prepočte sme vzhľadom na presnosť použili hustotu vody  $\rho = 1,00$  g/ml. Čas sme merali od spustenia kanvice po automatické vypnutie kanvice vnútorným termostatom pomocou hodiniek s presnosťou  $\Delta t = 1$  s.

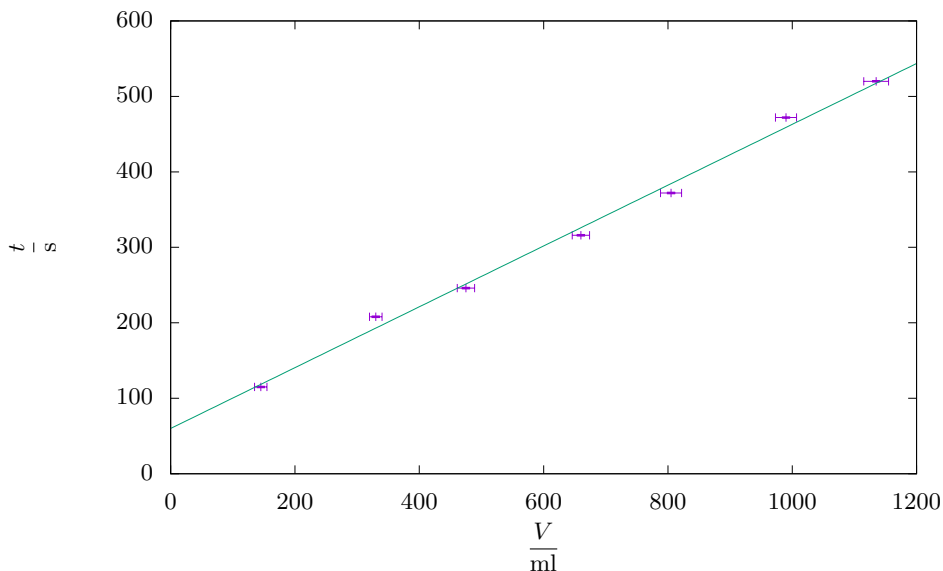
Pred začiatkom merania sme napustili všetku potrebnú vodu do veľkého hrnca a počkali, kým sa jej teplota vyrovnala s teplotou v miestosti. Teplota použitej vody a vzduchu bola priebežne monitorovaná a pohybovala sa v medziach  $T_i = 22$  °C až  $T_i = 24$  °C. Pred začiatkom merania nebola kanvica aspoň pol dňa použitá, bola teda izbovej teploty. Do kanvice sme z hrnca nabrali potrebný objem vody a nechli vodu variť. Po vypnutí kanvice sme vodu vyliali a kanvicu sme dôkladne vypláchlí studenou vodou (o teplote asi 19 °C). Následne sme do kanvice napustili studenú vodu a nechali 10 minút stáť. Túto vodu sme vyliali a po ďalších piatich minútach státia na vzduchu sme začali ďalšie meranie.

## Výsledky merania

Namerané hodnoty sú uvedené v tabuľke 1 spolu s poradovým číslom merania  $N$ . v prvom stĺpci. Chyba merania objemu bola určená ako  $\Delta V = \sqrt{n}\Delta V_0$ , kde  $n$  počet hrnčekov vody, ktoré tvorili daný objem. Túto závislosť sme následne preložili lineárnou závislosťou  $t = a + bV$ , hodnoty koeficientov boli určené pomocou programu *Gnuplot* metódou najmenších štvorcov ako  $a = 60(9)$  s,  $b = 0,403(14)$  s·ml<sup>-1</sup>. Nameranú závislosť spolu s lineárnou závislosťou je vynesená v grafe 5.

Tab. 1: Namerané časy  $t$  potrebné na zovretie objemu  $V$  vody

N.	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
7	145(10)	115
1	330(10)	208
4	475(14)	246
2	660(14)	316
5	805(17)	372
3	990(17)	472
6	1135(20)	520



Obr. 5: Závislosť doby varenia vody na jej objeme.

## Diskusia

Nameraná závislosť zohľadniac chyby merania dobre odpovedá lineárnemu fitu. Nepresnosť merania je daná jednak presnosťou merania objemu, ktorú by šlo zlepšiť priamym vážením jednotlivých použitých objemov, alebo použitím odmerného valca.

Ďalej chybu merania času danú presnosťou merania hodinkami v skutočnosti prevažuje chyba daná počiatočnou teplotou a koncom merania. Voda v čase zopnutia termostatu vrela v celom objeme niekoľko sekúnd, v závislosti od množstva vody 5 – 15 s. Ak prevedieme nepresnosť merania teploty asi jeden stupeň na vplyv určenia času využitím a zanedbaním tepla dodaného kanvici máme  $\delta t = t \frac{\Delta T}{T_f - T_i} \approx 0.013t$ . Pri nami meraných časoch ide o 1,5 – 7 s. Presnosť merania sa dá zvýšiť využitím digitálneho teplomera so sondou priamo vo varenej vode a detekciou bodu varu ako prechodu od narastajúcej teploty (v našom prípade lokálne blízko lineárneho priebehu) na konštantnú závislosť počas samotného varu. V tomto prípade je ale nutné do fitovania zahrnúť rôznu počiatočnú teplotu vody.

Najproblematickejšie je kvantifikovať vplyv počiatočnej teploty kanvice. Vidíme že teplo dodané kanvici odpovedá asi  $a/b = 150$  ml vody, neistota jeden stupeň v počiatočnej teplote tak bude odpovedať asi dvom sekundám. Máme za to, že našim postupom merania sme zabezpečili homogenitu počiatočnej teploty práve v tomto ráde. Určiť túto teplotu je však náročné, keďže časti kanvice z rozdielnych materiálov sa voči tepelným zmenám chovajú rôzne a majú tak jemne odlišné počiatočné teploty.

Na záver sa pozrime na javy, ktoré by sme museli zohľadniť pri presnejšom meraní, či inej konfigurácii. Vyjdeme z rovnice a prediskutujeme jednotlivé veličiny.

- *Tepelná kapacita* je vo všeobecnosti závislá na teplote, v našom intervale teplôt sa merná teplota vody pohybuje medzi 4 180–4 216 kJ·kg·K<sup>-1</sup>. Vzhľadom na povahu merania - meriame vždy medzi dvomi konkrétnymi teplotami - by táto premenlivosť nemala mať priamy vplyv. Zaujímá nás primárne totiž celkové teplo, ktoré vode musíme dodať, nie prerozdelenie tohto tepla do jednotlivých teplotných podintervalov.
- *Tepelný výkon zdroja* je taktiež závislý na teplote prostredníctvom závislosti elektrického odporu varného telesa. S rastúcou teplotou odpor klesá až do dosiahnutia stálej hodnoty pri pracovnej teplote. V prvých sekundách je tak výkon kanvice výrazne vyšší ako neskôr.
- *Tepelné straty* sú ďalším dôležitým javom. Jedná sa hlavne o straty vedením tepla z kanvice do okolia a *skupenské teplo* stratené pri *vyparovaní vody*. Oba tieto javy sú výraznejšie, čím je teplota vody vyššia. Môžeme preto očakávať, že v prípade väčších objemov vody, ktoré strávia na vyšších teplotách viac času budú straty vyššie a doba varenia sa výrazne predĺži. Extrémnym prípadom môže byť situácia, keď

<sup>7</sup>[https://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-water-d\\_660.html](https://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-water-d_660.html)

máme tak slabý zdroj tepla a veľa vody, že sa teplota vody ustáli na teplote dokonca pod bodom varu. V tomto prípade nás „zachráni“ obvykle výpar vody pri teplote pod bodom varu - postupné znižovanie objemu vody posunie rovnováhu k vyšším teplotám. Výpar vody však môže mať vplyv aj pri obvyklých situáciách - pri varení vody tak skončíme s menej vody ako sme začali. Tomuto vieme zabrániť použitím pokrievky na ktorej vyparená voda späťne kondenzuje. Oproti odokrytému hrncu tak voda zovrie výrazne rýchlejšie. Zaujímavým prípadom sú tlakové hrnce - vzhľadom na uzatvorenosť sústavy dochádza počas varenia k zvyšovaniu tlaku a tak posunu teploty varu k vyšším hodnotám a predĺženie doby potrebnej na zovretie - to však v tomto prípade obvykle nie je našim cieľom.

### Záver

Premerali sme závislosť doby varenia vody na jej objeme v rýchlovarnej konvici. Nameraná závislosť je lineárna, pričom asi minúta varenia je spotrebovaná na ohriatie samotnej konvice. V našom prípade sme nepozorovali zmenu závislosti vplyvom tepelných strát pri vyšších objemoch.

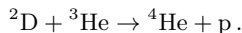
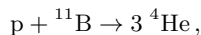
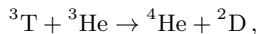
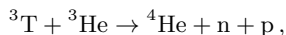
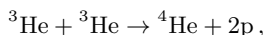
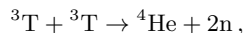
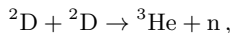
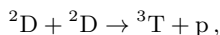
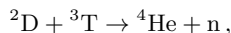
**Jozef Lipták**

liptak.j@fykos.cz

### Úloha I.S ... seriál 1

10 bodů; (chybí statistiky)

1. Spočítejte energetický výtěžek následujících reakcí a kinetické energie produktů reakce



2. Pomocí grafu rychlosti výtěžku v textu seriálu pro vámi zvolenou teplotu odvoďte Lawsonovo kritérium pro dobu udržení inerciální fúze deuteria s deuteriem, protonu s borem a deuteria s heliem 3 a pro jednotlivé případy určete součin velikosti palivové peletky a hustotu stlačeného paliva. Mají tyto reakce nějakou výhodu oproti tradiční DT fúzi?
3. Určete, jak by vypadalo Lawsonovo kritérium pro nemaxwellovské rozdělení teplot, kdyby kinetická energie částic byla:

(a)  $E_k = k_B T^\alpha,$

(b)  $E_k = aT^3 + bT^2 + cT$ .

Byla by takováto fúze vůbec realizovatelná? Pokud ano, jaké by mělo být palivo (fúzní reakce), jak velká by měla být palivová peletka a na jakou hustotu by se měla stlačit?

Ako jednotku hmotnosti budeme používať  $u$ , Atomová hmotnostnú konštantu, pričom  $1u = 931,49410242 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} = 1,66053906660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Ak je vám príjemnejšie počítať v  $\text{eV}/\text{c}^2$  alebo  $\text{kg}$ . Ako prvé si potrebujeme zistiť hmotnosti jednotlivých izotopov a hmotnosť neutrónu. My sme použili<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} M_{1H} &= 1,007825 u, \\ M_{2D} &= 2,014102 u, \\ M_{3T} &= 3,016049 u, \\ M_{3He} &= 3,016029 u, \\ M_{4He} &= 4,002603 u, \\ M_{1B} &= 11,009305 u, \\ M_n &= 1,008664915 u, \end{aligned}$$

ale pozor, tieto hmotnosti sú hmotnosti celého atómu, a to vrátane obalu, tj. elektrónov, ktoré sa na jadrových reakciách nezúčastňujú. Preto od týchto hmotností musíme odčítať hmotnosti príslušného počtu elektrónov<sup>9</sup>, pričom  $M_e = 5,4857990907E - 4 u$ , teda dostávame

$$\begin{aligned} M_{1H} &\doteq M_p = 1,00727642 u, \\ M_{2D} &= 2,014102 u, \\ M_{3T} &= 3,01550042 u, \\ M_{3He} &= 3,01493184 u, \\ M_{4He} &= 4,00150584 u, \\ M_{1B} &= 11,0065621 u, \end{aligned}$$

Teraz nám ostáva len dosadiť do jednotlivých rovníc hmotnosti jadier a spočítať rozdiel energií vid'

Pre výpočet kynetických energií produktov potrebujeme vedieť 2 základné pravidlá

1. hybnosť produktov pri dvoj-produktových reakciách je rovnaká  $m_1 v_1 = m_2 v_2$
2. súčet kynetických energií produktov je rovný uvolnenej energii  $\Delta E = E_{k1} + E_{k2}$

Na základe týchto pravidiel môžeme odvodiť vťah pre dvoj produktové reakcie, produkt reakcie bude mať energiu  $E_{k1} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \Delta E$ .

Pre troj a viac produktové reakcie toto rozdelenie energií nieje

<sup>8</sup>[https://www.chem.ualberta.ca/~massspec/atomic\\_mass\\_abund.pdf](https://www.chem.ualberta.ca/~massspec/atomic_mass_abund.pdf)

<sup>9</sup>Tento postup nieje úplne správny, pretože zanedbávame vatomnú energiu elektrónu.

Tab. 2: Tabuľka energetické zisku  $\Delta E$  pre jednotlivé reakcie, kde  $M_i$  je hmotnosť reaktantov  $M_o$  hmotnosť produktov a  $\Delta M$  je rozdiel  $M_i$  a  $M_o$

reakcia	$\frac{M_i}{u}$	$\frac{M_o}{u}$	$\frac{\Delta M}{u}$	$\frac{\Delta E}{\text{MeV}}$
${}^2D + {}^3T \rightarrow {}^4He + n$	5,02905384	5,010170755	0,018883085	17,58948231
${}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3T + p$	4,02710684	4,022776887	0,00432995347	4,033326121
${}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3He + n$	4,02710684	4,023596755	0,003510085	3,269623476
${}^3T + {}^3T \rightarrow {}^4He + 2n$	6,03100084	6,01883567	0,01216517	11,33178411
$H^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2p$	6,02986368	6,016058773	0,01380490694	12,8591894
${}^3T + {}^3He \rightarrow {}^4He + n + p$	6,03043226	6,017447222	0,01298503847	12,09548675
${}^3T + {}^3He \rightarrow {}^4He + {}^2D$	6,03043226	6,01505926	0,015373	14,31985884
$p + {}^{11}B \rightarrow 3{}^4He$	12,01383857	12,00451752	0,00932104653	8,682499871
${}^2D + {}^3He \rightarrow {}^4He + p$	5,02848526	5,008782307	0,01970295347	18,35318496

možné numericky spočítať, a produkty majú spojité spektrum energií v ktorých sa môžu pohybovať.

$$\begin{aligned}
 & {}^2D + {}^3T \rightarrow {}^4He(3,541175451\text{MeV}) + n(14,04830686\text{MeV}), \\
 & {}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3T(1,009917924\text{MeV}) + p(3,023408197\text{MeV}), \\
 & {}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3He(0,8196533317\text{MeV}) + n(2,449970145\text{MeV}), \\
 & {}^3T + {}^3He \rightarrow {}^4He(4,793602106\text{MeV}) + {}^2D(9,526256731\text{MeV}), \\
 & {}^2D + {}^3He \rightarrow {}^4He(3,6908634\text{MeV}) + p(14,66232156\text{MeV}),
 \end{aligned}$$

Do vzťahu z textu seriálu

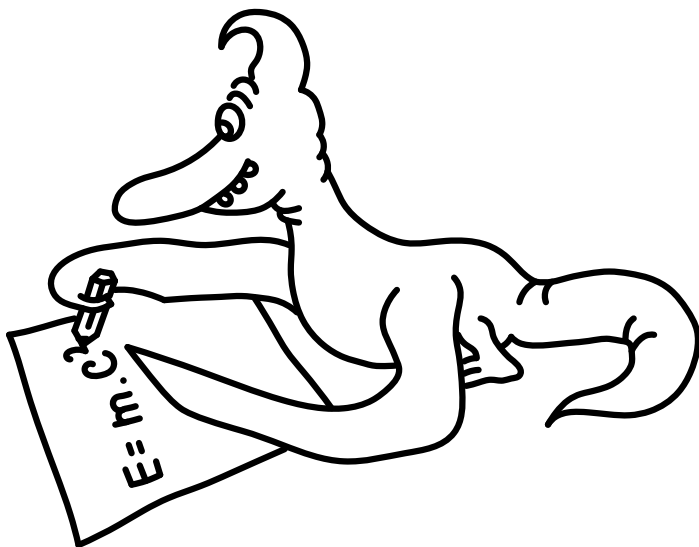
$$2nE_k < \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q,$$

dosadíme za  $E_k$  jednotlivé zo zadania najskôr pre prípad  $E_k = k_B T^\alpha$  a upravuje

$$\begin{aligned}
 2nk_B T^\alpha &< \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q, \\
 2k_B T^\alpha &< \frac{n\tau}{4} \langle v\sigma \rangle Q, \\
 n\tau &> \frac{8k_B T^\alpha}{\langle v\sigma \rangle Q}, \\
 \frac{8k_B T^\alpha}{\langle v\sigma \rangle Q} &\sim \frac{T^\alpha}{10^{-16} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} 10^7 \text{ eV}} =
 \end{aligned}$$

Michal Červeňák  
miso@fykos.cz





V dalším seriálu se zaměříme na první fázi fúzního cyklu, kterou je komprese paliva. Z minulého dílu víme, že z Lawsonova kritéria vyplývá, že fúze může nastat pouze pokud  $\rho R \simeq 1 \text{ g/cm}^2$ . Ze vztahu pro hmotnost peletky o poloměru  $R$

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{(\rho R)^3}{\rho^2}$$

můžeme získat potřebnou hustotu

$$\rho = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{(\rho R)^3}{M}},$$

na kterou musíme palivo stlačit, což pro 1 mg paliva<sup>10</sup> odpovídá hustotě přibližně  $100 \text{ g/cm}^3$ . Když uvážíme počáteční hustotu DT (led o teplotě přibližně 20 K) paliva  $0,225 \text{ g/cm}^3$ , palivo musí být stlačeno téměř 500-krát, případně DT plynu o počáteční hustotě  $0,5 \text{ mg/cm}^3$  je třeba palivo stlačit 200 000-krát.

## Rázové vlny: jak stlačit palivo tak, aby začalo fúzovat

Stlačení paliva na takto vysoké hustoty je jeden z nevyřešených úkolů inerciální fúze. Nicméně prakticky od samého počátku se uvažuje o stlačení pomocí silných rázových vln.

Rázová vlna vznikne, když intenzivní, krátký laserový impulz s vysokou energií dopadá na povrch peletky. Povrch peletky se téměř okamžitě (během několika pikosekund) vypaří, ionizuje a vznikne tak plazma, které rychle expanduje do vnějšího prostoru. Ze zákona zachování hybnosti vyplývá, že reakcí na expanzi plazmatu vzniká sférická rázová vlna, která se rychle šíří směrem do centra palivové peletky. Rychlost rázové vlny je přibližně dána Sedovovým-Taylorovým zákonem expanze

$$v_{RV} = \left( \frac{E_0}{\rho} \right)^{1/5} t^{-3/5},$$

kde  $E_0$  je energie laseru,  $\rho$  je počáteční hustota paliva,  $t$  je délka laserového impulzu.

Předpokládáme, že plazma před a za rázovou vlnou ve stacionárním stavu, před rázovou vlnou je popsáno počátečním tlakem  $p_0$ , teplotou  $T_0$  a hustotou  $\rho_0$ , za rázovou vlnou  $p_1$ ,  $T_1$  a  $\rho_1$ , v tomto případě se plazma pohybuje rychlostí  $u_1$ . Za předpokladu, že plazma představuje ideální plyn, pro veličiny před rázovou vlnou a za rázovou vlnou jsou dány

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)p_1 - (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_1 - (\gamma + 1)p_0} \frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_0}{(\gamma - 1)\rho_0 - (\gamma + 1)\rho_1} \frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M^2 + 1}{M^2} (M^2 - 1),$$

<sup>10</sup>Toto množství paliva je dáno praktickými a technologickými možnostmi současné technologie, kdy se fúzní reakcí může uvolnit maximálně 1 GJ energie, protože pak by tepelná a radiační zátěž mohla poškodit reaktorovou nádobu.

kde  $\gamma$  je Poissonova konstanta a  $M = v_{RV}/c_S$  je tzv. Machovo číslo udávající poměr rychlosti rázové vlny  $v_{RV}$  a rychlosti zvuku v daném prostředí  $c_S$  danou vztahem

$$c_S = \sqrt{\frac{k_B T}{M_i}},$$

kde  $M_i$  je hmotnost iontů.

Pro tlak, který rázová vlna (ta není příliš silná) vytvoří, platí vztah

$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_{RV}^2$$

V případě extrémně silné rázové vlny, kdy výsledný tlak  $p_1 \rightarrow \infty$ , z rovnice ?? plyne

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

Pro jednoatomový plyn ( $\gamma = 5/3$ ) plyne, že  $\rho_1/\rho_0 = 4$ .

Z tohoto vyplývá, že maximální stlačení dokonce při nekonečně silné rázové vlně nikdy nestlačí hustotu více než 4x. K dosažení potřebného tlaku kompresí rázovou vlnou je ale třeba vynaložit mnohem více energie než při adiabatické kompresi<sup>11</sup> (viz obr. ). Jelikož potřebujeme palivo stlačit alespoň 500x, je tak potřeba užít řadu po sobě jdoucích spíše slabších rázových vln než jednu silnou rázovou vlnou. To má dvě zásadní výhody. První výhodou je, že užitím řady slabších rázových vln můžeme zůstat v blízkosti adiabatické (izentropické) komprese paliva a dosáhnout stejného kompresního tlaku jako jednou silnou rázovou vlnou (viz obr. ). Proto jedním z cílů inerciální fúze je vytvarovat časový profil laserového impulzu takovým způsobem, že vytvořené rázové vlny sledují křivku adiabatické komprese co nejvíce, jak jen to je možné. Navíc každá další rázová vlna musí být rychlejší než ta předchozí, aby do centra peletky dorazily ve stejnou dobu.

Další důležitou záležitostí inerciální fúze je to, na jakou teplotu musíme zahřát palivo, aby probíhalo termojaderné hoření. Zapálení termojaderné reakce a fúzní hoření plazmatu se objeví, když ohřívání fúzními produkty překoná energetické ztráty takovým způsobem, že není nutné žádné dodatečné vnější ohřívání. Poté se fúzní hoření plazmatu udrží samo.

Hlavní energetické ztráty v plazmatu jsou způsobeny vyzařováním rentgenového záření (tzv. brzdovým zářením vznikajícím při průletu elektronů kolem atomových jader). Hustotu výkonu radiačních ztrát můžeme vyjádřit jako

$$W_b = C_b n^2 T^{1/2} = 5,34 \times 10^{-31} n^2 T^{1/2} \text{ Js}^{-1} \text{ cm}^{-3},$$

kde hustotu měříme (jak je ve fyzice plazmatu obvyklé) v  $\text{cm}^{-3}$  a teplotu v keV. Tento vztah platí za předpokladu velmi tenkého plazmatu (tzv. opticky tenkého, kdy záření po velmi krátké

<sup>11</sup>Celková energie, která se při kompresi spotřebuje je dána obsahem pod danou křivkou.

době zcela opustí plazma).<sup>12</sup> Hustotu výkonu termojaderné fúze můžeme vyjádřit pomocí vzorce XYZ z prvního dílu seriálu jako

$$W_f = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle Q$$

což pro DT fúzi odpovídá hodnotě  $W_f = 7,04 \times 10^{-13} \text{Js}^{-1} \text{cm}^{-3}$ . Z fúzní reakce odnáší přibližně 14 MeV neutrony, které plazmatem proletí prakticky bez další interakce a tedy k ohřívání plazmatu nepřispívají. Kdežto produkovaná jádra helia plazma prakticky neopustí a veškerou svou energii spotřebují na jeho ohřátí či udržení jeho teploty. Jádra helia nesou přibližně 20 % fúzní energie. Pokud tedy porovnáme  $W_b = W_f = 1/5 W_a$ , získáme optimální teplotu pro zapálení jaderné fúze. Ta tedy musí být větší než 4,3 keV. Proto se ve většině úvah návrhu inerciálního fúzního zařízení uvažují teploty 5 keV či spíše 10 keV, při které má DT reakce vyšší účinný průřez.

Ve skutečném světě ale plazma není ideální plyn, má spíše vlastnosti kapaliny, zvláště za velkých hustot, proto čelo šířící se rázové vlny není ostré, ale předchází jej tzv. noha (anglicky se tato struktura označuje jako "foot"), která jednak snižuje sílu samotné rázové vlny a jednak předehrívá plazma před rázovou vlnou. Tím výrazně snižuje účinnost stlačení plazmatu. Tomuto jevu se proto snažíme vyhnout. V inerciální fúzi je věnováno velké úsilí tomu, aby se vytvořila posloupnost vhodných rázových vln a toto chodidlo bylo co nejmenší (tzv. "low-foot" režim). Vhodné posloupnosti rázových vln můžeme dosáhnout tvarováním časového profilu laserového impulzu.

V 70. letech 20. století se lidé domnívali (díky výše zmíněným poznatkům), že inerciální fúze tak může být relativně snadno realizovatelná, protože energie na zapálení termojaderné fúze se nezdála být příliš veliká (i když v té době nebyly ještě dostupné lasery s vysokým výkonem, ale rychlý vývoj laserové technologie naznačoval, že by takové lasery mohly být brzy realizovány). Základním konceptem první fáze fúzního cyklu, tedy stlačení paliva, bylo tzv. objemové stlačení, kdy se rázovými vlnami tlačí na vysoké hustoty a teploty, kdy dojde k zapálení termojaderných reakcí, celý objem paliva. Avšak brzy se přišlo na to, že na získání takových podmínek by bylo potřeba, aby laserový svazek nesl energii 60 MJ, což je i dnes nerealistické.

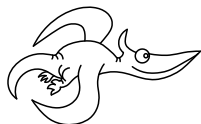
Důvody pro takovouto obrovskou energii potřebnou ke stlačení jsou v podstatě dva: zahřátí paliva spotřebovává mnohem více energie než jeho stlačení a stlačení horkého materiálu vyžaduje také mnohem více energie než stlačení chladného materiálu.

Z těchto důvodů se začalo upřednostňovat zapálení centrální tzv. horké skvrny (anglicky "hot-spot"). V tomto schématu se palivo pohybuje do středu s narůstající rychlostí podle toho, jak laser předává svou energii do plazmatu. Výsledkem tohoto zrychleného pohybu je, že se vnitřní centrální část palivové peletky prakticky adiabaticky tlačí na vyšší teploty (5 - 10 keV) než vnější části (1 keV). Jak centrální část, tak její obal se tlačí na vysoké hustoty, ale horký střed má nižší hustotu (přibližně  $100 \text{g/cm}^3$ ), kdežto obal dosáhne hustoty přibližně  $800 \text{g/cm}^3$ . Takže palivo začíná hořet

<sup>12</sup>V případě velmi hustého plazmatu, jaké se obvykle vyskytuje během termojaderného hoření, může dojít k tomu, že záření bude v plazmatu pohlcováno a může být v termodynamické rovnováze s plazmatem, takže většina záření bude udržovat vhodnou teplotu plazmatu.

pouze v malém okolí středu peletky (o průměru přibližně  $1\ \mu\text{m}$ ) a hoří po dobu 100 - 200 ps (tj. než celé vyhoří). Odtud se termojaderná reakce šíří do vnějších částí peletky. Tento jev nastane díky tomu, že alfa částice profukované fúzní reakcí dostatečně prohřejí (na teplotu vyšší než 5 keV, viz výše) vnější části peletky. Nakonec termojaderná fúze hoří na samém okraji peletky až reakce zhasne úplně. (Poté se do reaktorové nádoby vhodí nová peletka a celý cyklus se opakuje.)

Jelikož je v konceptu horké skvrny nutné zapálit menší množství paliva (termojaderná reakce se udrží, pokud horká skvrna obsahuje 2 % hmotnosti peletky), na stlačení paliva nám postačí energie 1 - 2 MJ. V současné době takovéto lasery již dostupné jsou např. americký NIF a francouzský LMJ.



## Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“%	Σ	
Student Pilný	MFF UK	6	6	5	7	8	10	14	10	66	100	18	66

## Kategorie druhých ročníků

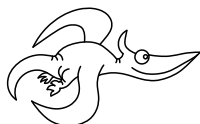
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“%	Σ	
Student Pilný	MFF UK	6	6	5	7	8	10	14	10	66	100	18	66

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“%	Σ	
Student Pilný	MFF UK	3	3	5	7	8	10	14	10	60	100	16	60

## Kategorie čtvrtých ročníků


jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“%	Σ	
Student Pilný	MFF UK	3	3	5	7	8	10	14	10	60	100	16	60



**FYKOS**  
**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <https://fykos.cz>

e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.