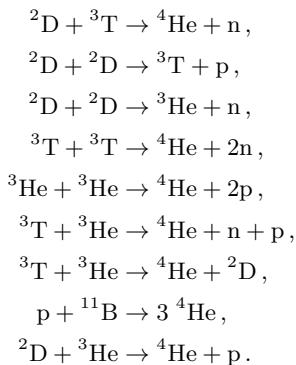


Úloha I.S ... seriál 1

10 bodů; průměr 3,50; řešilo 28 studentů

1. Spočítejte energetický výtěžek následujících reakcí a kinetické energie produktů reakce



2. Pomocí grafu rychlosti výtěžku v textu seriálu pro vámi zvolenou teplotu odvodte Lawsonovo kritérium pro dobu udržení inerciální fúze deuteria s deuteriem, protonu s borem a deuteria s heliem 3 a pro jednotlivé případy určete součin velikosti palivové peletky a hustotu stlačeného paliva. Mají tyto reakce nějakou výhodu oproti tradiční DT fúzi?
3. Určete, jak by vypadalo Lawsonovo kritérium pro nemaxwellovské rozdělení rychlostí, kdyby kinetická energie částic byla:

(a) $E_k = k_B T^\alpha$,

(b) $E_k = aT^3 + bT^2 + cT$.

Byla by takováto fúze vůbec realizovatelná? Pokud ano, jaké by mělo být palivo (fúzní reakce), jak velká by měla být palivová peletka a na jakou hustotu by se měla stlačit?

Časť 1

Ako jednotku hmotnosti budeme používať u , Atomová hmotnostná konštanta, pričom $1u = 931,49410242 \text{ MeV} \cdot c^{-2} = 1,66053906660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Ak je vám príjemnejšie počítat v eV/c^2 alebo kg . Ako prvé si potrebujeme zistiť hmotnosti jednotlivých izotopov a hmotnosť neutronu. My jsme použili¹

$$\begin{aligned}
 M_{1H} &= 1,007825 \text{ u}, \\
 M_{2D} &= 2,014102 \text{ u}, \\
 M_{3T} &= 3,016049 \text{ u}, \\
 M_{3He} &= 3,016029 \text{ u}, \\
 M_{4He} &= 4,002603 \text{ u}, \\
 M_{11B} &= 11,009305 \text{ u}, \\
 M_n &= 1,008664915 \text{ u},
 \end{aligned}$$

¹https://www.chem.ualberta.ca/~massspec/atomic_mass_abund.pdf

Tab. 1: Tabuľka energetického zisku ΔE pre jednotlivé reakcie, kde M_i je hmotnosť reaktantov M_o hmotnosť produktov a ΔM je rozdiel M_i a M_o

reakcia	$\underline{M_i}$	$\underline{M_o}$	$\underline{\Delta M}$	$\underline{\Delta E}$
	u	u	u	MeV
${}^2D + {}^3T \rightarrow {}^4He + n$	5,02905384	5,010170755	0,018883085	17,589
${}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3T + p$	4,02710684	4,022776887	0,00432995347	4,033
${}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3He + n$	4,02710684	4,023596755	0,003510085	3,270
${}^3T + {}^3T \rightarrow {}^4He + 2n$	6,03100084	6,01883567	0,01216517	11,332
${}^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2p$	6,02986368	6,016058773	0,01380490694	12,859
${}^3T + {}^3He \rightarrow {}^4He + n + p$	6,03043226	6,017447222	0,01298503847	12,095
${}^3T + {}^3He \rightarrow {}^4He + {}^2D$	6,03043226	6,01505926	0,015373	14,320
$p + {}^{11}B \rightarrow 3{}^4He$	12,01383857	12,00451752	0,00932104653	8,682
${}^2D + {}^3He \rightarrow {}^4He + p$	5,02848526	5,008782307	0,01970295347	18,353

ale pozor, tieto hmotnosti sú hmotnosti celého atómu, a to vrátane obalu, tj. elektrónov, ktoré sa na jadrových reakciách nezúčastňujú. Preto od týchto hmotností musíme odčítať hmotnosti príslušného počtu elektrónov², pričom $M_e = 5,4857990907 \cdot 10^{-4}$ u, teda dostávame

$$\begin{aligned}
 M_{1H} &\doteq M_p = 1,00727642 \text{ u}, \\
 M_{2D} &= 2,014102 \text{ u}, \\
 M_{3T} &= 3,01550042 \text{ u}, \\
 M_{3He} &= 3,01493184 \text{ u}, \\
 M_{4He} &= 4,00150584 \text{ u}, \\
 M_{11B} &= 11,0065621 \text{ u},
 \end{aligned}$$

Teraz nám ostáva len dosadiť do jednotlivých rovníc hmotnosti jadier a spočítať rozdiel energií vid' Tab. 1

Pre výpočet kinetických energií produktov potrebujeme vedieť 2 základné pravidlá

1. hybnosť produktov pri dvoj-produktových reakciách je rovnaká $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$, teda

$$m_1 |v_1| = m_2 |v_2|$$

2. súčet kinetických energií produktov je rovný uvoľnenej energii $\Delta E = E_{k1} + E_{k2}$

Na základe týchto pravidiel môžeme odvodiť vňah pre dvoj produktové reakcie, produkt reakcie bude mať energiu $E_{k1} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \Delta E$

$$\begin{aligned}
 &{}^2D + {}^3T \rightarrow {}^4He (3,541175451 \text{ MeV}) + n (14,04830686 \text{ MeV}), \\
 &{}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3T (1,009917924 \text{ MeV}) + p (3,023408197 \text{ MeV}), \\
 &{}^2D + {}^2D \rightarrow {}^3He (0,8196533317 \text{ MeV}) + n (2,449970145 \text{ MeV}), \\
 &{}^3T + {}^3He \rightarrow {}^4He (4,793602106 \text{ MeV}) + {}^2D (9,526256731 \text{ MeV}), \\
 &{}^2D + {}^3He \rightarrow {}^4He (3,6908634 \text{ MeV}) + p (14,66232156 \text{ MeV}),
 \end{aligned}$$

Pre troj a viac produktové reakcie toto rozdelenie energií nieje možné numericky spočítať, pretože $\sum_{i=0}^i m_i v_i = 0$, a produkty majú spojité spektrum energií v ktorých sa môžu pohybovať.

²Tento postup nieje úplne správny, pretože zanedbávame vatobnú energiu elektrónu.

Časť 2

Do vzťahu

$$n\tau > \frac{12k_B T}{\langle v\sigma \rangle Q},$$

môžeme dosadiť vzťahy pre rýchlosť rázovej vlny $\tau = \frac{R}{c_s}$ a hustotu častíc $n = \frac{\rho}{m}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\rho R}{mc_s} &> \frac{12k_B T}{\langle v\sigma \rangle Q}, \\ \rho R &> \frac{12mc_s k_B T}{\langle v\sigma \rangle Q} = n\tau mc_s. \end{aligned}$$

Ja som zvolil pre jednotlivé prípady rovnakú hodnotu $\langle v\sigma \rangle = 5 \cdot 10^{-16} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ a pre túto hodnotu dočítal z grafu príslušnú teplotu a to $T_{DD} = 35 \text{keV}$, $T_{pB} = 80 \text{keV}$ a $T_{DHe} = 20 \text{keV}$. Keďže teplota je už prevedená v eV Lawsonovo kritérium a vzťah pre veľkosť paletky prechádzajú do tvaru

$$n\tau > \frac{12T_{\text{eV}}}{\langle v\sigma \rangle Q}.$$

V týchto rovniciach už iba potrebujeme zistiť už iba hmotnosti jednotlivých atomov a z nich vypočítať priemernú hustotu paliva, tomu môžeme použiť zistené hmotnosti atomov z prvej časti úlohy, pričom $1 \text{u} = 1,66053904 \cdot 10^{-24} \text{g}$.

${}^2D + {}^2D$ Teda pre DD reakciu máme 2 možné scenáre a s produktami ${}^3T + p$ alebo ${}^3He + n$, tieto reakcie majú rovnakú pravdepodobnosť, ale my ich spočítame samostatne. Lawsonovo kritérium pre ${}^3T + p$ po dosadení

$$\begin{aligned} n\tau &> \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{1235 \text{keV}}{5 \cdot 10^{-16} \text{cm}^3 \text{s}^{-1} 4,033 \text{MeV}}, \\ n\tau &> 2,08 \cdot 10^{14} \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}, \end{aligned}$$

a pre ${}^3He + n$ po dosadení

$$\begin{aligned} n\tau &> \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{12 \cdot 35 \text{keV}}{5 \cdot 10^{-16} \text{cm}^3 \text{s}^{-1} 3,270 \text{MeV}}, \\ n\tau &> 2,57 \cdot 10^{14} \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}, \end{aligned}$$

Palivo tvorí v tomto prípade len 2D a teda $m = m_D$ a po prevedení na g dostávame $m = 3,34 \cdot 10^{-24} \text{g}$.

Po dosadení pre ${}^3T + p$

$$\rho R > n\tau mc_s = 2,98 \cdot 10^{14} \text{s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 3,34 \cdot 10^{-24} \text{g} \cdot 10^7 \text{cms}^{-1} = 6,96 \cdot 10^{-3} \text{g} \cdot \text{cm}^{-2},$$

a pre ${}^3He + n$

$$\rho R > n\tau mc_s = 3,67 \cdot 10^{14} \text{s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 3,34 \cdot 10^{-24} \text{g} \cdot 10^7 \text{cms}^{-1} = 8,59 \cdot 10^{-3} \text{g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

$p + {}^{11}\text{B}$ Obdobne postupujeme aj v tomto prípade, len s rozdielom, že tu môže nastať len jeden typ reakcie. Lawsonovo kritérium po nadobúda pre naše hodnoty

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{1280 \text{ keV}}{5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} 8,682 \text{ MeV}},$$

$$n\tau > 2,98 \cdot 10^{14} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3},$$

V tomto prípade je palivo zložené z p a ${}^{11}\text{B}$ a teda $m = (m_p + m_B)/2$ a po prevedení na g dostávame $m = 9,97 \cdot 10^{-24} \text{ g}$. Po dosadení pre súčin veľkosti paletky a hustoty dostávame

$$\rho R > n\tau m c_s = 2,98 \cdot 10^{14} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 9,97 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 10^7 \text{ cms}^{-1} = 2,21 \cdot 10^{-2} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

$D + {}^3\text{He}$ Rovnako ako v predchádzajúcom prípade tu môže nastať taktiež len jeden prípad. Lawsonovo kritérium pre nami zvolené je

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{1220 \text{ keV}}{5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} 18,353 \text{ MeV}},$$

$$n\tau > 2,62 \cdot 10^{13} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3},$$

Pre tento prípad je palivo zložené z D a ${}^3\text{He}$ a teda $m = (m_D + m_H)/2$ a po prevedení na g dostávame $m = 4,18 \cdot 10^{-24} \text{ g}$.

$$\rho R > n\tau m c_s = 2,62 \cdot 10^{13} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 4,18 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 10^7 \text{ cms}^{-1} = 1,09 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Časť 3

Do vzťahu z textu seriálu

$$2nE_k < \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q,$$

dosadíme za E_k jednotlivé zo zadania najskôr pre prípad $E_k = k_B T^\alpha$ a upravuje

$$2nk_B T^\alpha < \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q,$$

$$2k_B T^\alpha < \frac{n\tau}{4} \langle v\sigma \rangle Q,$$

$$n\tau > \frac{8k_B T^\alpha}{\langle v\sigma \rangle Q},$$

Obdobne postupujeme pre $E_k = aT^3 + bT^2 + cT$

$$2nk_B (aT^3 + bT^2 + cT) < \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q,$$

$$2k_B (aT^3 + bT^2 + cT) < \frac{n\tau}{4} \langle v\sigma \rangle Q,$$

$$n\tau > \frac{8k_B (aT^3 + bT^2 + cT)}{\langle v\sigma \rangle Q},$$

$$\frac{8k_B (aT^3 + bT^2 + cT)}{\langle v\sigma \rangle Q}$$

Poznámky k došlým řešením

Velká část řešení zabudla od hmotnosti atomov odčítat hmotnost elektornu, ktorá je približne $m_e = 0,511 \text{ MeV}$, oproti hmotnosti jadra je to zanedbateľné, ale ak si pozrieme výťažky fúzyňch reakcii, vidíme že sa jedná o zrovnateľnú hotnotu.

Niekoľko riešení sa vyskytlo aj s nadmerným zaokrúhľovaním, ak si uvedomíme, že $1 \text{ MeV}/c^2 \sim 0,0$ musíme pri presnosti ktorú potrebujeme používať aspoň 4-5 desatinných miest, tj. 6-7 platných cifier pri použití iných jednotiek (kg, MeV/c^2).

Zároveň sa vyskytli riešenia s neobvyklým riešením, nie podľa textu serialu, pomocou „Binding Energy“ jadernej energie, ktorú si môžete zistiť z tabuľky <http://dbserv.pnpi.spb.ru/elbib/tablisot/toi98/www/astro/table2.pdf> úsklalie tohoto riešenia, je že pre zistenie energie jednotlivých produktov nakoniec aj tak potrebujeme zistiť hmotnosti jadier produktov.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.