

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

přichází pátá předposlední brožurka tohoto ročníku. Setkáte se v ní s novou dávkou zajímavých úloh, kdy se podíváte na to, jak se hraje na violoncello, nebo spočítáte, jak dlouho bude Karel čekat na výtah. V problémovce se zamyslíte nad vyvrácením stromů vlivem větru. S experimentem zabrousíme do optiky, hodit se vám bude staré CD či DVD a laserové ukazovátko.

V nejbližší době by měla nejlepším řešitelům dorazit pozvánka na jarní soustředění, které se letos bude konat 22. – 30. dubna. Pokud vám pozvánka nedorazila, nezoufejte a pusťte se do řešení, ať si zajistíte místo na tom podzimním.

Kromě semináře pořádáme již několik let prezenční týmovou soutěž Fyziklání, která je největší soutěží svého druhu na světě. V letošním roce se jí zúčastnilo 251 týmů z více než dvaceti zemí světa, v PVA Letňany se tedy sešlo téměř 1 200 zájemců o fyziku. Soutěž vyhrál tým CaminBaieti z Rumunska, s českých a slovenských týmů byl nejlepší tým Error404 z Gymnázia Kapitána Jaroše v Brně. Gratulujeme!

Abychom šířili povědomí o našich akcích po celém světě, vypravila se skupina organizátorů FYKOSu až do daleké Asie. Fotky z této expedice a další zajímavosti můžete sledovat na instagramu @fykosak.

Organizátoři



Zadání V. série

Termín uploadu: 28. 03. 2023 23.59

Termín odeslání: 27. 03. 2023

Úloha V.1 ... zamáčkly flażolet

3 body

Vojta hraje na violoncello. Na strunu naladěnou na frekvenci f zlehka přiloží prst do vzdálenosti $1/n$ její délky od hlavy nástroje a rozezní ji, přičemž slyší tón o základní frekvenci f_1 . Následně strunu na stejném místě úplně přimáčkne ke hmatníku a rozezní ji znovu. Tentokrát nástroj vydává tón o základní frekvenci f_2 . Určete poměr frekvencí f_1/f_2 v závislosti na přirozeném čísle n .

Úloha V.2 ... dopravní pás

3 body

Na pohybující se vodorovný dopravní pás každou sekundu svisle dopadá materiál o hmotnosti μ , který na jeho konci padá pryč. Na pás působí odporová síla $F_{\text{odp}} = kv$, která je přímo úměrná rychlosti pásu v přes konstantu k . Jak velkou rychlostí se bude pás pohybovat, pokud

- na něj působí konstantní pohonná síla F ?
- je poháněn motorem s konstantním výkonem P ?

Úloha V.3 ... čekáme na výtah

6 bodů

Karel jezdí výtahem v budově, která má přízemí a nad ním dalších 12 pater, přičemž výška jednoho patra je $h = 3,0$ m. Uvažujte, že výtah během své jízdy polovinu doby zrychluje a dru-

hou polovinu doby zpomaluje konstantním zrychlením $a = 1,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. S 50% pravděpodobností výtah stojí v přízemí a zbytek pravděpodobnosti je rovnoměrně rozdělený mezi ostatní patra. Jaká je očekávaná doba čekání na výtah v jednotlivých patrech budovy? Zanedbejte čas otevírání dveří.

Bonus Mějme 2 výtahy opět v dvanáctipatrové budově. Jeden výtah bude odvolávaný do přízemí. Do jakého patra bychom měli posílat druhý, abychom minimalizovali průměrnou dobu čekání? Předpokládejte analogicky, že polovina jízdy bude začínat v přízemí a druhá polovina s rovnoměrnou pravděpodobností v libovolném z dalších pater.

Úloha V.4 ... Dark Side Time

8 bodů

FYKOS plánuje vyslat do vesmíru vlastní družici. Ta bude poháněna solárními články, potřebujeme proto, aby se ve stínu Země nenacházela příliš dlouho. V jaké výšce nad povrchem bude doba průletu stínem Země nejmenší? Při svých výpočtech uvažujte (stejně jako organizátoři), že Země je dokonale kulatá, sluneční paprsky jsou v jejím okolí paralelní a Slunce, Země a trajektorie družice se nachází v jedné rovině.

Bonus Během řešení narazíte na analyticky neřešitelnou rovnici. Nepoužívejte online řešiče, ale naprogramujte vlastní řešení.

Úloha V.5 ... xenon šel na vandr

8 bodů

Jednou kladně ionizovaný atom xenonu vyletěl rychlostí $v = 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ze středu velké válcové cívky a začal se pohybovat homogenním magnetickým polem v rovině kolmé na magnetické siločáry. V tu chvíli cívku odpojíme od zdroje, takže její indukce začne exponenciálně klesat podle vztahu $B(t) = B_0 e^{-\Omega t}$, kde $B_0 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ a $\Omega = 600 \text{ s}^{-1}$. S jakou odchylkou od původního směru se atom bude pohybovat po ustálení?

Nápověda: V úloze se nebojte použít vhodnou aproximaci, nebo ji zkuste řešit numericky.

Úloha V.P ... napjatý strom

10 bodů

Popište co nejvíc přírodních vlivů, které způsobí vyvrácení/silné poškození osamocenému stromu na louce. Jeden z nich zkuste co nejlépe kvalitativně rozebrat. Jaký je rozdíl mezi listnatým stromem a jehličnanem?

Bonus Některý z vlivů rozeberte i kvantitativně.

Úloha V.E ... mizící CD

12 bodů

Pomocí difrakce na mřížce určete hustotu zápisu dat na CD. Zkuste porovnat výsledky s DVD.

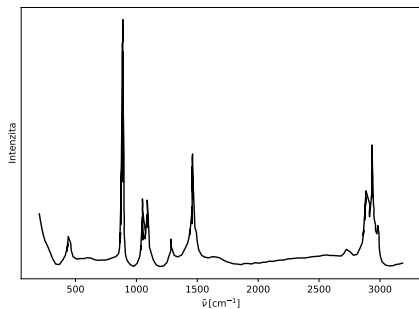
Úloha V.S ... ethanol či methanol?

10 bodů

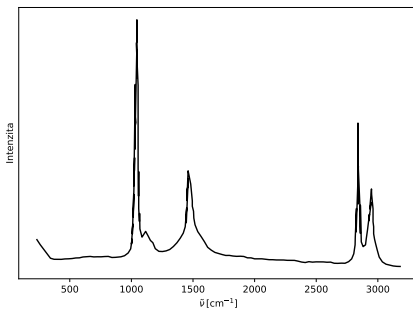
Vazebná energie molekuly fluoru je přibližně 37 kcal/mol . Pokud uvažíme dosah vazebných interakcí přibližně 3 \AA od optimální vzdálenosti, jakou (průměrnou) silou musíme působit, abychom molekulu roztrhli? Spočítejte „tuhost“ molekuly fluoru, pokud by uprostřed tohoto rozmezí působila síla o velikosti této průměrné síly. Jaká by byla vibrační frekvence této molekuly? Srovnajte s experimentální hodnotou $916,6 \text{ cm}^{-1}$. (4 b)

Zkuste pomocí Psi4 spočítat disociační křivku F_2 a proložit ji v okolí minima parabolou. Jaká vám z ní tentokrát vyjde energie vibračních přechodů? (3 b)

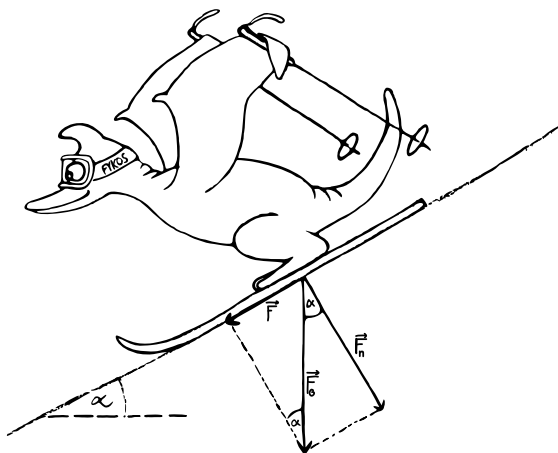
Máte dvě lahve alkoholu, které vám přišly přinejmenším podezřelé. Vzali jste je tedy do laboratoře a získali z nich následující Ramanova spektra. Pomocí programu Psi4 spočítejte, na jakých frekvencích jsou vibrační přechody molekul metanolu i etanolu, a na základě toho odhadněte, ve které lahvi je methanol a ve které ethanol. Můžete využít přibližné geometrie ethanolu a methanolu, které jsou součástí zadání na webu. (3 b)

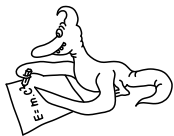


Obr. 1: Ramanovo spektrum lahve A



Obr. 2: Ramanovo spektrum lahve B





Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... vybíjení baterie

3 body; průměr 2,43; řešilo 100 studentů

Robert zjistil, že do své nové čelovky musí dát 3 baterie o kapacitě 1000 mAh a napětí $U = 1,5$ V. V čelovce jsou baterie zapojeny sériově. Za jak dlouho se baterie vybijí, pokud napájí čelovku o výkonu $P = 5$ W a účinnosti $\eta = 90\%$? *Robertovi nefungovala čelovka.*

Informace o zapojení baterií v čelovce je nadbytečná. Napětí a kapacita baterie nám totiž již dává informaci o energii, která je v baterii uložená. Tuto energii spočítáme jako

$$W = UQ,$$

kde Q je kapacita baterie. Čelovka má příkon $P_0 = P/\eta$. Příkon také spočítáme $P_0 = W/t$, kde W je energie v bateriích a t je čas, po který čelovka svítí. Tato dvě vyjádření příkonu dáme do rovnosti a získáme

$$\frac{P}{\eta} = \frac{3UQ}{t}.$$

Úpravou této rovnice dostaneme vztah

$$t = \frac{3UQ\eta}{P} \doteq 2920 \text{ s} \doteq 49 \text{ min}.$$

Baterie nám tedy vydrží asi na 49 min svícení.

Josef Knápek

josef.knapek@fykos.cz

Úloha IV.2 ... zmražený balónek

3 body; průměr 2,24; řešilo 91 studentů

Balónek o hmotnosti $m_b = 2,7$ g a objemu $V_0 = 41$ byl napuštěn heliem o stejné teplotě, jakou má okolní vzduch, tedy $T_0 = 20$ °C. Uvnitř balónku je tlak o $\Delta p = 2$ kPa vyšší než v okolí. Na jakou teplotu musíme balónek a plyn v něm zchladit, aby se přestal vznášet? Předpokládejte, že po zchlazení bude v balónku atmosférický tlak. *Vojta mění balónky za inspiraci.*

Nejprve potřebujeme určit hmotnost helia v balónku. Vyjděme ze stavové rovnice

$$pV_0 = \frac{m}{M_{\text{He}}} RT_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{(p_a + \Delta p)V_0 M_{\text{He}}}{RT_0},$$

kde p_a značí atmosférický tlak a M_{He} je molární hmotnost helia. Nyní označíme $\rho_v = 1,204$ kg·m⁻³ hustotu vzduchu při teplotě T_0 a atmosférickém tlaku a z rovnosti vztahové a tíhové síly určíme podmínku, aby se balónek již nevznášel. Podmínku formulujeme nerovnicí

$$V\rho_v g < (m + m_b)g \quad \Rightarrow \quad V < \frac{1}{\rho_v} \left(\frac{(p_a + \Delta p)V_0 M_{\text{He}}}{RT_0} + m_b \right),$$

kde objem V vyjádříme opět ze stavové rovnice v závislosti na teplotě balónku T jako

$$p_a V = nRT = \frac{(p_a + \Delta p)V_0 T}{T_0} \Rightarrow V = V_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_a}\right) \frac{T}{T_0},$$

což můžeme dosadit do výše odvozené nerovnosti a dostaneme

$$T < \frac{p_a}{\rho_v} \left(\frac{M_{\text{He}}}{R} + \frac{T_0}{p_a + \Delta p} \frac{m_b}{V_0} \right) \doteq -71,5^\circ\text{C}.$$

Balónek tedy stačí ponořit do kapalného dusíku a po chvíli se přestane vznášet.

Vojtěch David

vojtech.david@fykos.cz

Úloha IV.3 ... uzavírka na silnici

6 bodů; průměr 5,12; řešilo 91 studentů

Všichni to známe – uzavírky na silnicích a nekonečné stání na semaforech. Zelená svítí po dobu 60 s, ale než se stačí všichni rozjet, už je zase červená. Uvažujme 0,5 s reakční dobu řidiče, než se rozjede poté, co se dalo do pohybu auto před ním. O kolik procent by se zvýšil počet aut, která projedou uzavírkou, kdyby se všichni ve frontě rozjeli současně? První auto stojí na úrovni semaforu, vzdálenost předních nárazníků všech aut odhadněme na 5 m a všechna se rozjždí rovnoměrně zrychleně po dobu 5 s na rychlost $30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, kterou pak pokračují dále do uzavírky.

U Jardy na vesnici už třetím rokem kopou kanály.

Označme si najprv veličiny zo zadania: doba, kedy svieti zelená a uzávierkou sa dá prejsť je $T = 60 \text{ s}$, reakčná doba vodičov je $t_r = 0,5 \text{ s}$, rýchlosť, na ktorú zrýchľujú pomenujeme klasicky $v = 8,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, vzdialenosť predných nárazníkov áut je $d = 5 \text{ m}$ a zrýchlenie dopočítame ako: $a = \Delta v / \Delta t = 8,3 / 5 = 1,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Úloha sa nás pýta na pomer áut, ktoré prejdú uzávierkou v prípade, kedy idú všetci súčasne a v prípade, kedy vodičom reakcia na rozbehnutie auta pred nimi nejaký čas trvá. Spočítajme počty týchto áut pre obe situácie.

V prípade, kedy sa všetci rozbehnú súčasne vieme, že sa autá môžu hýbať až celých T sekúnd. Teda prejdú maximálne vzdialenosť

$$s = \frac{1}{2} a T^2 + (T - 5)v \doteq 479 \text{ m}.$$

Dostávame tak vzdialenosť, z ktorej je ešte možné dôjsť k závore pred červenou. Vzdialenosť „ n “-tého auta od závoru dostaneme jednoducho ako

$$d_n = (n - 1)d.$$

Z podmienky

$$d_n \leq s,$$

dostaneme, že posledné auto, ktoré stihne prejsť závorou je v poradí $n_1 = 96$.

Prípád s reakčnou dobou vodičov len modifikuje (konkrétne zmešuje) čas, ktorý majú autá na pohyb. Množstvo času, ktoré takto n -tému vodičovi „ubudne“ je

$$t_n = (n - 1)t_r.$$

Dráhu, ktorú prejde n -té auto vypočítame ako

$$s_n = \frac{1}{2}a5^2 + (T - 5 - t_n)v.$$

Pričom limitným prípadom na prejdenie uzávierky je teraz: $s_n \geq d_n$. Odkiaľ pre n dostávame

$$n = \frac{\frac{1}{2}a5^2 + (T - 5)v}{d + vt_r} + 1.$$

To pre dané hodnoty znamená, že ešte $n_2 = 53$ áut uzávierkou prejde. Hľadaný pomer je $n_1/n_2 \doteq 1,8$. Teda keby sa všetci vodiči rozbehli súčasne, uzávierkou prejde o zhruba 80% viac áut.

Marek Jankola
marekj@fykos.cz

Úloha IV.4 ... vystřelený dalekohled

7 bodů; průměr 4,91; řešilo 56 studentů

Máme hvězdářský (Keplerův) dalekohled, který chceme vyslat do vesmíru. Nejdřív si ho však vyzkoušíme na Zemi, kde naměříme zvětšení Z . Jak se musí změnit vzájemná vzdálenost čoček, aby měl stejné zvětšení i ve vesmíru? Čočky mají index lomu n .

Karla sem tam chytají ty astromyšlenky.

Keplerov dalekohľad je tvorený dvoma spojnými šošovkami, pričom obrazové ohnisko prvej a predmetové ohnisko druhej splyvajú. Vzdialenosť šošoviek je teda $f_1 + f_2$. Keď dalekohľad priemestníme do iného optického prostredia, zmenia sa ohniskové vzdialenosti oboch šošoviek. Aby sme dostali ostrý obraz, musí obrazové ohnisko prvej a predmetové ohnisko druhej šošovky opäť splývať, čo znamená, že vzdialenosť šošoviek musí byť $f'_1 + f'_2$, kde f'_1 a f'_2 sú ohniskové vzdialenosti prvej, resp. druhej šošovky vo vákuu. Ohniskové vzdialenosti vo vzduchu a vákuu prvej šošovky môžeme vyjadriť ako

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\frac{1}{f'_1} = \left(\frac{n}{n_0} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Predelením prvej rovnice druhou dostávame pomer

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{\left(\frac{n}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}{\left(\frac{n}{n_0} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)},$$

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{n_0(n - n_1)}{n_1(n - n_0)}.$$

Tento pomer použijeme na vyjadrenie f'_1 pomocou f_1 a analogicky f'_2 pomocou f_2

$$f'_1 = f_1 \cdot \frac{n_0(n - n_1)}{n_1(n - n_0)},$$

$$f'_2 = f_2 \cdot \frac{n_0(n - n_1)}{n_1(n - n_0)}.$$

Zväčšenie keplerovho ďalekohľadu Z vo vzduchu vyjadríme ako

$$Z = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Zväčšenie ďalekohľadu Z' vo vákuu je

$$Z' = -\frac{f'_2}{f'_1} = -\frac{f_2 \cdot \frac{n_0(n-n_1)}{n_1(n-n_0)}}{f_1 \cdot \frac{n_0(n-n_1)}{n_1(n-n_0)}} = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Zväčšenie sa teda nemení. To, koľkokrát sa zmení vzájomná vzdialenosť šošoviek, vyjadríme pomerom p , ktorý počítame ako

$$p = \frac{f'_1 + f'_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1 \cdot \frac{n_0(n-n_1)}{n_1(n-n_0)} + f_2 \cdot \frac{n_0(n-n_1)}{n_1(n-n_0)}}{f_1 + f_2} = \frac{n_0(n-n_1)}{n_1(n-n_0)}.$$

Je zřejmé, že vzdialenosť šošoviek sa musí zmenšiť.

Pre predstavu uvažujme hodnoty $n_0 = 1$, index lomu skla $n = 1,5$ a $n_1 = 1,0003$ je index lomu vzduchu. Potom je hodnota pomeru asi $p \approx 0,9991$.

Elena Chocholaková

`elena.chocholakova@fykos.cz`

Úloha IV.5 ... vesmírná návšteva

9 bodů; průměr 4,64; řešilo 55 studentů

Dva mimozemšťané bydlí každý na své kosmické stanici. Stanice se nacházejí ve volném prostoru a vzdálenost mezi nimi je L . Když chce jeden mimozemšťan navštívit druhého, musí nasednout do své nerelativistické rakety a doletět k sousedovi. Jaký nejkratší čas může mimozemšťan strávit na cestě tam i zpět? Hmotnost rakety s palivem je m , bez paliva m_0 . Výtoková rychlost spalín je u , tok paliva je libovolný. Jeho soused mu žádné palivo načerpat nedovolí (sám má málo). Jarda potřeboval, aby si nikdo nevšiml, že na chvíli zmizel z porady.

Nejprve se zamysleme nad prováděnou optimalizací. Aby mimozemšťan strávil na cestě co nejméně času, je potřeba, aby letěl celou cestu co nejvyšší rychlostí. Nejvýhodnější tedy bude, když se již na začátku velmi rychle urychlí na nějakou požadovanou rychlost v_1 a nebude tedy ztrácet čas zrychlováním. Objemový tok paliva není omezen, můžeme si tedy představit, že naráz odhodí část svého paliva rychlostí u . Analogicky nebude ztrácet čas brzděním, takže zastaví okamžitě. Podobně po cestě zpět.

K vyřešení úlohy použijeme známou Ciolkovského rovnici ve tvaru

$$v_1 = u \ln \frac{m}{m_1},$$

kde v_1 je rychlost, kterou přeletí vzdálenost ke svému sousedovi, a m_1 je hmotnost, která zbyde jeho raketě po zrychlování.

Aby mohl zastavit u svého kamaráda, potřebuje zpomalit na nulu, takže musí platit

$$v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2},$$

odkud $m_1/m_2 = m/m_1$.

Pro cestu zpět analogicky platí $m_2/m_3 = m_3/m_0$.

Máme dvě rovnice pro tři neznámé, jako zbývající neznámou zvolíme m_2 (hmotnost rakety, se kterou doletí ke svému kamarádovi). Vyjádříme čas cesty k sousedovi v závislosti na m_2 jako

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{L}{u \ln \frac{m_1}{m_2}} = \frac{L}{u \ln \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{m_2}} = \frac{2L}{u \ln \frac{m_1}{m_2}}.$$

Podobně

$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{L}{u \ln \frac{m_2}{m_3}} = \frac{L}{u \ln \frac{m_2}{\sqrt{m_1 m_2}}} = \frac{2L}{u \ln \frac{m_2}{m_0}}.$$

Celkový čas je

$$T = t_1 + t_2 = \frac{2L}{u} \left(\frac{1}{\ln \frac{m_2}{m_0}} + \frac{1}{\ln \frac{m_1}{m_2}} \right) = \frac{2L}{u} \left(\frac{\ln \frac{m_1}{m_0}}{\ln \frac{m_2}{m_0} \ln \frac{m_1}{m_2}} \right).$$

Teď již jen zderivujeme podle m_2 a výslednou funkci položíme rovnu nule, tedy

$$\frac{dT}{dm_2} = -\frac{2L}{u} \ln \frac{m_1}{m_0} \frac{\left(\frac{1}{m_2} \ln \frac{m_1}{m_2} - \ln \frac{m_2}{m_0} \frac{1}{m_2} \right)}{\left(\ln \frac{m_2}{m_0} \ln \frac{m_1}{m_2} \right)^2} = 0,$$

odkud

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_0}.$$

Je zřejmé, že se v tomto bodě jedná o minimum dané funkce, protože kdyby $m_2 \rightarrow m_1$, tak by cesta k sousedovi trvala velmi dlouho, naopak kdyby $m_2 \rightarrow m_0$, tak by strávil velmi dlouho na cestě zpět.

Dosazením do derivované funkce dostáváme

$$T_{\min} = \frac{2L}{u} \left(\frac{\ln \frac{m_1}{m_0}}{\ln \sqrt{\frac{m_1}{m_0}} \ln \sqrt{\frac{m_1}{m_0}}} \right) = \frac{8L}{u} \frac{1}{\ln \frac{m_1}{m_0}},$$

což je námi hledaný výsledek.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha IV.P ... lodička si pluje

10 bodů; průměr 5,69; řešilo 55 studentů

Diskutujte, jaké fyzikální jevy ovlivňují rychlost plavby lodi a ponorky. Jaké odporové síly na ně působí? Jakou nejvyšší rychlostí loď nebo ponorka může plout?

Jindra pantoval na řece Cam.

Úvod

Pri plavbe lode/ponorky sa dejú dve základné veci. Motory, pomocou skrutiek produkujú ťahovú silu, ktorá zrýchľuje loď dopredu a súčasne prostredie (najmä voda) pôsobí odporovou silou proti tomuto pohybu. Maximálna možná rýchlosť (nazývaná aj ako medzná) sa dosiahne vtedy, keď sa obidve sily vyrovnajú. Poďme sa teraz bližšie pozrieť na odporovú silu tekutín, ako vzniká a na aké podtypy sa dá ďalej deliť.

Odporové sily

Odporová sila tekutín, na rozdiel od klasického trenia závisí od veľkosti rýchlosti vzájomného pohybu tekutiny a telesa, prípadne dvoch vrstiev tekutiny. Pri nízkych rýchlostiach nastáva laminárne prúdenie, pri ktorom odporová sila závisí lineárne na rýchlosti. Po zvýšení rýchlosti nad určitú kritickú hodnotu vzniká prúdenie turbulentné, pre ktoré je charakteristická závislosť odporovej sily od druhej mocniny rýchlosti. To, či ide o laminárne alebo turbulentné prúdenie môžeme zistiť pomocou Reynoldsovho čísla Re .

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}$$

kde ρ je hustota kvapaliny, v vzájomná rýchlosť kvapaliny a daného telesa, L typický rozmer a η dynamická viskozita kvapaliny. Ak bude $Re < Re_K$, pôjde o laminárne prúdenie, ak $Re > Re_K$, tak o turbulentné. Hodnotu Re_K určujeme pre dané geometrické usporiadanie väčšinou experimentálne.

Pri laminárnom prúdení sa jednotlivé vrstvy kvapaliny nemiešajú, naopak pri turbulentnom prúdení sa jednotlivé vrstvy premiešavajú za vzniku vírov. Laminárne prúdenie sa dá od turbulentného odlíšiť aj pohľadom, nakoľko laminárne prúdenie sa javí ako ustálené (tečúca kvapalina vyzerá, ako keby bola „odfotená“) a naopak turbulentné prúdenie mení svoj tvar s časom. Zo skúsenosti môžeme považovať plavbu lode aj ponorky za turbulentné prúdenie.

Delenie odporových síl

Odporové sily prostredia môžeme podľa vzniku rozdeliť do dvoch hlavných kategórii, a to tlakový (tvarový) odpor a viskózný odpor.

Tvarový odpor súvisí s tvarom telesa, s rozrážaním častíc tekutiny a mení ich smeru pohybu.

Viskózný odpor vzniká trením kvapaliny o stenu telesa. Pri kontakte s kvapalinou na povrchu telesa vznikne infinitezimálne tenká vrstva tejto kvapaliny, ktorá sa vzhľadom na teleso nebude hýbať (túto vrstvu bude teleso "ťahat" so sebou) a bude sa trieť o ostatné, pohybujúce sa, vrstvy. Pre pomalé lode to tvorí asi 80 % celkového odporu, pre rýchle asi 50 %.

Výpočet odporovej sily

Celková odporová sila bude súčtom vyššie uvedených efektov. Napríklad pri obtekaní gule zhruba 90 % celkovej odporovej sily vzniká v dôsledku tlakového odporu, naopak pri krídle je to len zhruba 10 %. Odporovú silu F_D môžeme vypočítať nasledovne (za predpokladu ponorenia celého telesa v kvapaline):

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D S.$$

Kde ρ je hustota danej tekutiny, v vzájomná relatívna rýchlosť prostredia a telesa, S účinná plocha (kolmá k smeru pohybu) a C_D je súčiniteľ odporu, ktorý závisí na geometrickom usporiadaní a určuje sa experimentálne (pre najbežnejšie tvary sa dá nájsť aj na wikipédii).

Ďalšie delenie tlakového odporu

K veľkosti tlakového odporu prispieva viacero efektov, na ktoré sa bližšie pozrieme v nasledujúcej časti. Nižšie spomenuté efekty môžu v konečnom dôsledku ovplyvniť napríklad aj veľkosť

viskózneho odporu, ale príčinou týchto zmien je vždy geometria daného telesa a preto sa tieto efekty zaraďujú ku tvarovému odporu.

Odpor tvorením vln Je typ odporu prostredia, ktorý ovplyvňuje len povrchové plavidlá a prezentuje energiu, ktorá je potrebná na odsunutie vody od trupu lode. Táto energia sa spotrebuje na vytvorenie vlny (ktorá ju aj odnáša od lode). Najsilnejšie vlny produkuje predná a zadná časť lode a tieto vlny sa delia na rozbiehavé (divergentné) a priečne.

Priečne vlny tvoria väčšinu tejto odporovej sily, keďže ovplyvňujú, aká plocha trupu je v kontakte s vodou (viskózna časť odporu). Vlnová dĺžka priečných vln je úmerná rýchlosti lode a pri istej rýchlosti (tzv. hull speed) bude vlnová dĺžka priečných vln rovná dĺžke lode (rôzne lode môžu mať rôzne hodnoty hull speed). V takomto prípade bude zmáčaná plocha trupu maximálna, čo dáva maximálnu hodnotu viskózneho odporu (prvé maximum odporovej sily). Ak by sme loď ešte zrýchlili (na tzv. hump speed), tak sa vlnová dĺžka priečných vln zvýši na 1,5násobok dĺžky trupu lode. To bude mať za následok pokles hladiny vody pri korme a naklonenie celej lode, čo vytvorí dojem, že loď ide neustále "hore kopcom". To vo výsledku zvyšuje energiu potrebnú na udržanie danej rýchlosti (druhé maximum odporovej sily). Pri ďalšom zvyšovaní rýchlosti lode sa bude odpor tvorením vln mierne znižovať (je potrebné ale prekonať predchádzajúce bariéry).

Rozbiehavé vlny zvierajú spolu uhol 39° (nezávisle od rýchlosti lode) a tvoria vonkajšie vlny v brázde za loďou.

Odpor tvorením vztlaku Zatiaľ čo odpor tvorením vln pôsobí silou proti pohybu, tak odpor tvorením vztlaku má aj nejakú zložku sily kolmú na pohyb, ktorú vieme využiť, hlavne v letectve. Tento odpor vzniká dôsledkom Newtonovho zákona akcie a reakcie, keď trup lode/krídlo mení smer pohybu častíc tekutiny smerom dole, čím naň pôsobí reakčná sila smerom nahor (dynamický vztlak).

Odpor vznikajúci prekonaním sonickej bariéry Pri prekročení rýchlosti zvuku v danom prostredí vznikajú rázové vlny, ktoré sú príčinou ďalšej straty energie. Veľkosť brzdnnej sily v tomto prípade nezávisí od viskozity danej kvapaliny. Nakoľko lode ani ponorky nedokážu ísť dostatočne rýchlo (rýchlosť zvuku vo vode je cca $1500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) tak tento efekt nebudeme ďalej uvažovať.

Výkon odporových síl a maximálna rýchlosť lode

Pri lodiach sa nezvykne udávať ťahová sila motorov ale ich výkon. Z tohto dôvodu by bolo výhodné, keby vieme stratu energiu plavidla popísať stratovým výkonom odporových síl. Potom by medzná rýchlosť bola taká, pri ktorej sa vyrovná výkon motorov lode so stratovým výkonom odporových síl. Stratový výkon odporových síl P_D dostaneme ak prenásobíme odporovú silu F_D rýchlosťou v .

$$P_D = F_D v = \frac{1}{2} \rho v^3 C_D S$$

V rovnováhe bude výkon plavidla $P = P_D$ a teda pre maximálnu rýchlosť v_{\max} dostaneme:

$$v_{\max} = \sqrt[3]{\frac{2P}{\rho C_D S}},$$

tento popis je zvlášť výhodný, pokiaľ plavidlo neprodukuje vlny (ponorená ponorka), maximálnu rýchlosť hladinovej lode nemôžeme týmto vzťahom určiť, pretože nepočíta s odporovou silou vzniknutých vln.

Započítanie odporu vln alebo Crouchova konštanta

George Crouch bol americký inžinier ktorý žil na prelome 19. a 20. storočia a preslávil sa navrhovaním a stavbou rýchlostných lodí, ktoré viackrát zvíťazili v Gold Cupe. Jeho vzťah pre maximálnu rýchlosť lode vyzerá nasledovne:

$$v_{\max} = C \sqrt{\frac{P}{M}},$$

kde C je Crouchova konštanta (závislá na type lodí), P je výkon lode a M jej hmotnosť. Najväčšou nevýhodou tohto vzťahu je fakt, že pán Crouch nepoznal metrický systém a tak zadával výkon P v konských silách ($1 \text{ kW} = 1,34 \text{ hp}$), hmotnosť M v librách ($1 \text{ kg} = 2,2 \text{ lbs}$) a rýchlosť v_{\max} vychádzala v míľach za hodinu ($1 \text{ mph} = 1,61 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$). V tabuľke 1 sú uvedené hodnoty Crouchových konštánt pre niektoré typy lodí.

Tab. 1: Crouchove konštanty pre rôzne typy lodí

| Typ lode | Crouchova konštanta |
|--|---------------------|
| krížnik, priemerná „runaboat“, výletné lode | 150 |
| lahký vysokorýchlostný krížnik, vysokorýchlostné runaboaty | 190 |
| pretekárske lode | 210 |
| hydroplány | 220 |
| pretekárske katamarány a „sea sledy“ | 230 |

Minimalizácia odporových síl

Pre lode

Čím vhodnejší tvar bude loď mať, tým väčšiu bude mať Crouchovu konštantu. Tu sa už cesta delí a pre rôzne využitia lodí sa robia rôzne úpravy.

Pri veľkých a pomalých lodiach s veľkým ponorom sa snažíme minimalizovať najmä odpor tvorením vln, nakoľko tvarový odpor by sme vedeli zmenšiť len ponorom lode, čo by nepriaznivo vplývalo na množstvo nákladu, ktorý dokáže uniesť. Za týmto účelom sa väčšinou do prednej časti lode pridáva valcovití výbežok, ktorý sa nachádza pod hladinou (angl. bulbous bow). Pri vhodnej vzdialenosti od hlavného trupu lode dokáže tento výbežok vytvoriť priečnu vlnu, ktorá následne deštruktívnou interferenciou vyruší priečnu vlnu, ktorá vznikne na prave lode, čím sa zníži odpor.

Druhým spôsobom ako zmenšiť odpor je minimalizácia častí lode pod vodou (minimalizácia viskózneho odporu). Tento spôsob sa používa hlavne pri menších a rýchlych lodiach. K dosiahnutiu tohto cieľa sa využíva dynamický vztlak (vzniká pri vhodnom tvare trupu lode), ktorý pomáha statickému vztlaku (Archimedov zákon) v prekonávaní tiažovej sily lode. Čím vyššia bude rýchlosť lode, tým väčší bude a mať dynamický vztlak, čím sa zmenší potrebný statický

vztlak a loď sa môže viac vynoriť (čím sa zmenší plocha trupu, ktorá bude brzdená vodou). V praxi sa to dá všimnúť pri malých motorových člnoch, ktoré pri vysokých rýchlostiach viac "letia" po hladine ako plávajú.

Najrýchlejšia loď by teda mala mať dobrý dynamický vztlak (zahrnuté v Crouchovej konštante), nízku hmotnosť a súčasne vysoký výkon (hmotnosť motoru s jeho výkonom súvisí, budeme teda hľadať kompromis).

Pre ponorky

Pri ponorenej ponorke sa budeme snažiť minimalizovať súčiniteľ odporu C_D . Po krátkom hľadaní nájdeme v tabuľkách tvar podobný dažďovej kvapke, ktorý má $C_D = 0,04$. Pri pohľade na moderné vojenské ponorky si môžeme všimnúť, že majú skutočne tvar predĺženej dažďovej kvapky. Týmto sme optimalizovali tvar ponorky, druhým dôležitým faktorom je veľkosť. Budeme sa snažiť minimalizovať účinnú plochu ponorky na čo najmenšiu. Tretím dôležitým faktorom je výkon, čím vyšší výkon bude ponorka mať, tým rýchlejšie pôjde (tu opäť budeme musieť hľadať vhodný kompromis, nakoľko výkon motora súvisí aj s jeho veľkosťou).

Konkrétne odhady maximálnych rýchlostí

Pretekárska loď

Vyberieme si vhodný tvar trupu lode (napríklad sea sled) a budeme uvažovať hodnotu Crouchovej konštanty $C = 230$. Môžeme predpokladať, že hmotnosť trupu lode s rastúcim jedným rozmerom bude rásť lineárne, čo pri zachovaní tvaru (raste do všetkých 3 rozmerov) bude dávať kubickú závislosť hmotnosti. Takže dáva zmysel zvoliť čo najmenšiu, jednomiestnu loď. Loď musí niekto riadiť, uvažujme že to bude človek s hmotnosťou 80 kg. Dôležitým faktorom bude výber motoru, budeme hľadať ten najlepší v pomere výkon/hmotnosť. Samozrejme, navrhnutá loď bude musieť mať vhodný vztlak, aby potrebné komponenty udržala.

Pre jednoduchosť výpočtov uvažujme, že má trup lode tvar kvádra (na ktorý sa sea sled s menšími rozdielmi skutočne podobá), ďalej predpokladajme, že plášť lode bude hrubý 0,5 cm, a že bude z nejakého ľahkého a odolného materiálu, napríklad hliníka. Pôvodné rozmery sea sledu sú: dĺžka 838 cm, šírka 274 cm a hĺbka ponorenej časti 30 cm (celkovú výšku trupu zvolíme 50 cm), čo dáva objem ponorenej časti na hodnotu $6,9 \text{ m}^3$. Keďže sea sled nemá presne tvar kvádra, odhadneme, že ponorený objem skutočného tvaru lode bude 60 % z tejto hodnoty, čiže $V_p = 4,1 \text{ m}^3$. V pokoji sa bude musieť tiažová sila vyrovnáť vztlakovej, čím určíme maximálnu hmotnosť lode m_{\max} , čo dáva:

$$m_{\max}g = F_g = F_{vz} = V_p \rho g.$$

Kde hustotu vody budeme uvažovať $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a rovnicu predelíme tiažovým zrýchlením g . Po dosadení dostaneme: $m_{\max} = 4100 \text{ kg}$.

Odhadnime teraz hmotnosť plášťa lode, ktorý bude hrubý 0,5 cm. Najskôr spočítame jeho objem, a to tak, že od objemu kvádra s rozmermi uvedenými v predchádzajúcom odstavci odrotáme kváder s rozmermi o hrúbku plášťa menšími (teda 837 cm na dĺžku, 273 cm na šírku a 49,5 cm na výšku). Objem plášťa teda bude $V_{p1} = 0,17 \text{ m}^3$. Hustota hliníka je $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. To predstavuje hmotnosť $m_{Al} = \rho_{Al}V_{p1} = 460 \text{ kg}$.

Trup lode bude treba ale nejak vystužiť, rovnako bude treba pridať nejakú batériu na štartovanie, elektroniku, ovládanie, palivovú nádrž a ďalšie pomocné systémy. Uvažujme teda, že všetky tieto veci spolu nebudú vážiť viac ako 1000kg.

Na záver už len stačí vybrať vhodný motor. Perfektným kandidátom je privesný motor s výkonom takmer 450 kW a hmotnosťou 570 kg. Po odrátaní hmotnosti človeka, trupu a ostatných systémov zistíme, že loď môžeme ešte zaťažiť hmotnosťou 2500 kg, čo predstavuje 4 takéto motory s celkovým výkonom 1800 kW, ktoré budú spolu vážiť 2280 kg.

Už vieme všetko potrebné na odhadnutie maximálnej rýchlosti. Celková hmotnosť lode bude 3820 kg = 8420 lb a jej výkon bude 1800 kW = 2400 hp. Po dosadení do Crouchovo vzťahu dostaneme: $v_{\max} = 123 \text{ mph} = 200 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Tento rýchlostný rekord sa skutočne podarilo dosiahnuť Garovi Woodovi v roku 1932. Absolútny rekord rýchlosti na vode aktuálne drží Ken Warby, ktorý dosiahol rýchlosť takmer $560 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ na lodi s prúdovým pohonom (nutné podotknúť, že úmrtnosť pilotov vysokorýchlostných lodí pri snahe prekonať tento rekord činí asi 60%).

Pretekárska ponorka

V tomto prípade bude dôležitý priemer najširšej časti ponorky, ktorý musíme zvoliť tak aby sa do nej zmestil človek. Uvažujme že priemerná výška človeka je 180 cm a že človek bude pri riadení ponorky sedieť. V takomto prípade by najväčší rozmer ponorky mohol byť 2 m, čo by malo postačovať na pohodlné usadenie človeka do prostrednej časti (približná dĺžka potom bude 6 m).

Ako pohon ponorky je výhodné použiť elektromotor s dostatočnou zásobou batérií, keďže nemá prístup na vzduch. Komerčne sa dá zohnať motor na jednosmerný prúd s výkonom od 20 kW do 2000 kW. Výrobca udáva rozmery takéhoto motora na max. 60 cm, čo nám vyhovuje, lebo ho zmestíme do ponorky. Stačí nám už len odhadnúť, koľko batérií potrebujeme a akú energiu do nich vieme uložiť, na základe čoho vyberieme výkon motoru (tak, aby sa ponorka dokázala hýbať dlhšie ako pár minút). Kandidát na batériu má od výrobcu uvedenú kapacitu 1,3 kWh a rozmery ($26 \times 17 \times 23$) cm (objem jednej takejto batérie je cca $10\,200 \text{ cm}^3$).

Odhadnime teraz objem ponorky. Kvapkovitý tvar s priemerom 2 m a dĺžkou 6 m aproximujeme valcom s priemerom 1,5 m a dĺžkou 5 m, čo predstavuje objem približne $8,8 \text{ m}^3$. Predpokladajme, že človek na pohodlné sedenie potrebuje kváder s výškou 2 m a podstavou širokou 60 cm a dlhou 70 cm, čo dá objem $0,84 \text{ m}^3$. Motor má maximálny rozmer 60 cm, jeho maximálny objem môžeme preto aproximovať kockou s touto hranou, ktorej objem je $0,216 \text{ m}^3$. Okrem toho potrebujeme ponorku vybaviť aj nejakými pomocnými systémami (kormidlo, komory na potápanie/vynáranie, podpora života, počítač, chladenie...), uvažujme, že všetky tieto prístroje nezaberú väčší objem ako 2 m^3 . Po odrátaní vyššie uvedených vecí z objemu ponorky, nám zostane objem $5,7 \text{ m}^3$ na batérie, čomu zodpovedá 558 kusov vyššie uvedených batérií. Avšak, nie vždy by sme vedeli batérie do tohto objemu naukladať presne vedľa seba, rovnako ako aj ponorka má zadnú časť pomerne úzku, preto odhadneme, že 20% z tohto počtu sa do ponorky nezmestí, čím nám zostane 446 kusov bateriek s celkovou kapacitou cca 580 kWh.

Ďalej uvažujme, že 10% z uloženej energie spotrebujú pomocné systémy ponorky, teda motor bude môcť využiť 522 kWh. Ak zvolíme výkon motora na 1000 kW, tak sa ponorka bude môcť plaviť polhodinu, čo by malo stačiť na otestovanie jej rýchlostných vlastností. Predpokladajme, že motor má účinnosť 90%, čiže efektívny výkon bude 900 kW. Účinný prierez spočítame pomocou známeho polomeru nasledovne: $S = \pi d^2/4$, kde d je priemer najširšej časti. Po dosadení $S = 3,14 \text{ m}^2$. Budeme uvažovať testovanie v sladkej vode s hustotou $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Už poznáme všetky potrebné údaje na odhadnutie medznej rýchlosti, po dosadení: $v_{\max} = 24,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 87,5 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pre porovnanie rýchlostný rekord ponorky pod vodou drží Soviet-

ska ponorka K-222 s maximální dosiahnutou rýchlosťou $83 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, takže nami aproximovaný popis funguje skutočne dobre.

Pár slov na záver

Je nutné podotknúť, že vyššie odhadované modely lodí sú naozaj len hrubé a orientačné, nakoľko sme neuvažovali viacero faktorov, takže to rozhodne neskúšajte doma overiť experimentálne.

Zdroje

- rozmery pôvodného sea sledu: <https://www.soundingsonline.com/boats/hickman-sea-sled>
- výber prívesného motoru: <https://www.mercurymarine.com/en-gb/europe/engines/outboard/verado/verado-600hp/>
- rýchlostný rekord na vode: https://en.wikipedia.org/wiki/Water_speed_record
- k výberu elektromotoru: <https://www.menzel-motors.com/dc-motors>
- k výberu batérie: <https://lionenergy.com/products/lion-safari-ut-1300>
- najrýchlejšia ponorka: https://en.wikipedia.org/wiki/Underwater_speed_record

Juraj Jánošík

juraj.janosik@fykos.cz

Úloha IV.E ... hodím si to

12 bodů; průměr 8,64; řešilo 45 studentů

Mějme přes tyč omotané lano se závažím o hmotnosti m na jednom svém konci. Změřte závislost hmotnosti zátěže M na druhém konci potřebné k uvedení lana do pohybu na počtu obtočení lana kolem tyče.

Patrik přemýšlí o různých metodách... výpočtu.

Teorie

Pro určení koeficientu tření vyjdeme z tzv. Capstanovy rovnice, která popisuje napětovou sílu F na oblých površích

$$F = F_0 e^{f\varphi}, \quad (1)$$

kde φ je úhel obtočení lana, f značí koeficient statického tření mezi lanem a zaobleným povrchem a F_0 odpovídá počáteční napětové síle. Odvození vztahu (1) naleznete ve starší úloze lano.¹

V našem případě bude F_0 zprostředkovaná tíhovou silou danou působením našeho zvoleného závaží o hmotnosti m a F bude tíhová síla závaží M pro různé úhly obtočení φ . Pro výslednou závislost potřebujeme znát pouze hmotnosti závaží potřebné pro uvedení lana do pohybu

$$M(\varphi) = m e^{f\varphi}.$$

Měření

Pomůcky

K měření jsme použili závaží o hmotnosti $m = (0,500 \pm 0,001) \text{ kg}$, plastové lano s průměrem $d = 2 \text{ cm}$ o celkové hmotnosti $m' = 25 \text{ g}$ a ocelovou hrazdu do dveří o průměru $D = 10 \text{ cm}$.

¹https://fykos.org/_media/rocnik32/ulohy/pdf/uloha32_6_4.pdf

Postup měření

Na jeden konec lana jsme upevnili závaží o hmotnosti m , na druhý konec uchytili nádobu na vodu o hmotnosti $m' = (0,325 \pm 0,001)$ kg. Lano jsme vždy obtočili okolo hrazdy o požadovaný počet otáček a následně jsme do nádoby postupně přilévali vodu, dokud se lano nezačalo samovolně pohybovat. Měření bylo provedeno pro každou otočku jednou. Měření hmotnosti nádoby s vodou jsme prováděli na kuchyňské váze s přesností na 1 g, poslední měření jsme kvůli velké hmotnosti provedli na osobní váze.

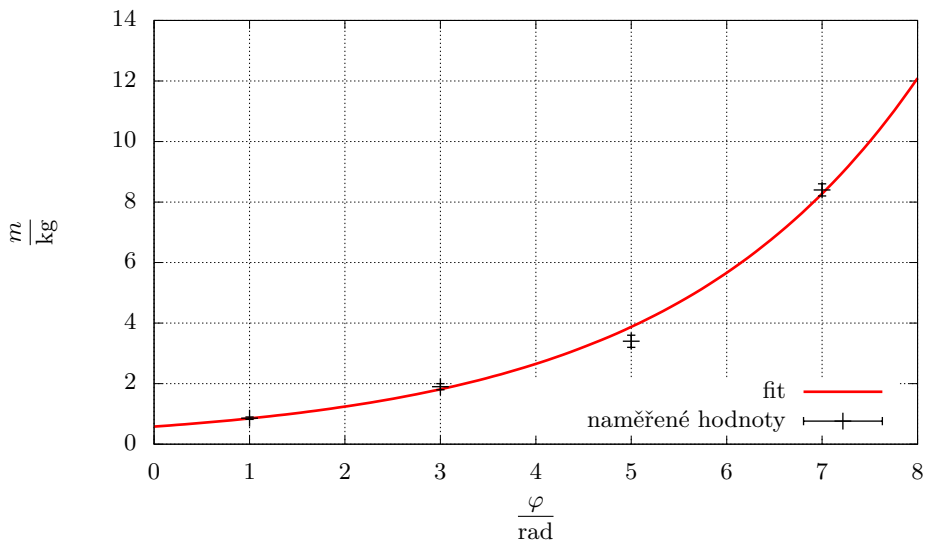
Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Naměřená data jsou uvedena v Tab. 2. Data jsme následně vynesli do grafu na Obr. 3 a v softwaru `gnuplot` proložili rovnicí ve tvaru

$$y(x) = Ae^{Bx}, \quad (2)$$

kde $A = (0,58 \pm 0,05)$ kg a $B = (0,379 \pm 0,015)$ rad^{-1} jsou fitované parametry.

Nejistota uvedená u měření hmotnosti byla určena z objemu přilité vody, která odpovídala právě tomu úseku, kdy se lano začalo tíhou nádoby samovolně odmotávat.



Obr. 3: Graf závislosti úhlu φ na hmotnosti m .

Diskuse

Z proložené rovnice (3) na Obr. 3 vidíme, že jsme v rámci nejistoty správně určili původní zátěž M a zároveň i hledaný koeficient tření $f = (0,379 \pm 0,015)$. Hmotnost lana m' jsme mohli při výpočtech zanedbat vzhledem k relativně velké hmotnosti závaží M a faktu, že lano je z větší části namotané na tyči.

Tab. 2: Závislost hmotnosti nutné k uvedení lana do pohybu v závislosti na úhlu obtočení.

| $\frac{\varphi}{\text{rad}}$ | $\frac{m}{\text{kg}}$ |
|------------------------------|-----------------------|
| π | $0,86 \pm 0,04$ |
| 3π | $1,90 \pm 0,10$ |
| 5π | $3,40 \pm 0,20$ |
| 7π | $8,40 \pm 0,20$ |

V experimentu jsme se měřili exponenciální závislost. Vzhledem k jejímu průběhu je obvykle složité naměřit velký počet hodnot, protože požadovaná hmotnost pro rozpohybování lana roste exponenciálně, a tudíž síla potřebná k překročení třecí síly, může být i vyšší, než je maximální nosnost lana. Z grafu na Obr. 3 vidíme, že pro namotání $\varphi = 9\pi$ rad bychom vzhledem ke zkoumané závislosti již pro rozpohybování lana potřebovali zavěsit závaží o hmotnosti přibližně 20 kg, což by bylo pravděpodobně za hranici pevnosti použitého lana. Zároveň bude při jeho zátěži docházet k deformaci, to by však mělo mít minimální vliv na námi zkoumanou závislost, jelikož si část omotaná okolo hrazdy stále zachovává svoji délku. Statistická nejistota určení jednotlivých datových bodů by šla snížit zvýšením počtu měřených hodnot. Maximální možný zkoumaný počet obtočení bychom mohli efektivně navýšit použitím lehčího závaží, v tom případě bychom ale pravděpodobně museli započítat i nenulovou hmotnost samého lana.

Při namotávání jsme nechávali malý volný prostor mezi jednotlivými smyčkami lana, aby nedocházelo ke vzájemnému tření mezi jednotlivými smyčkami lana. Samotný povrch tyče byl pokovovaný, takže jeho koeficient tření by byl při translačním pohybu relativně malý. Přesnějších výsledků bychom dosáhli použitím siloměru, čímž bychom se vyhnuli nejistotě vzniklé při manipulaci s vodou.

Porovnáme li rovnice (1) a (3), můžeme formálně zanedbat jednotku u parametru fitu B a stanovit tak koeficient statického tření mezi lanem a tyčí jako $f = (0,379 \pm 0,015)$. Porovnáním hodnoty f s tabelovanými hodnotami² můžeme říci, že se nejvíce blíží hodnotě koeficientu tření kombinace oceli a nylonu $f' = 0,4$, který se používá pro výrobu lan.

Závěr

Seznámili jsme se s jevem tření na zaoblených površích a proměřili závislost hmotnosti zátěže M na druhém konci potřebné k uvedení lana do pohybu na počtu obtočení lana kolem tyče. Naměřené hodnoty v Tab. 2 jsme proložili očekávanou závislostí z Capstanovy rovnice

$$y(x) = Ae^{Bx}, \quad (3)$$

kde parametry splňují $A = (0,58 \pm 0,05)$ kg a $B = (0,379 \pm 0,015)$ rad⁻¹. Formálním zanedbáním jednotky u parametru B jsme určili koeficient statického tření mezi lanem a tyčí jako $f = (0,379 \pm 0,015)$, který dobře odpovídá $f' = 0,4$ pro dvojici povrchů nylon a ocel v rámci 2σ .

Patrik Kašpárek
patrik.kasperek@fykos.cz

²https://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html

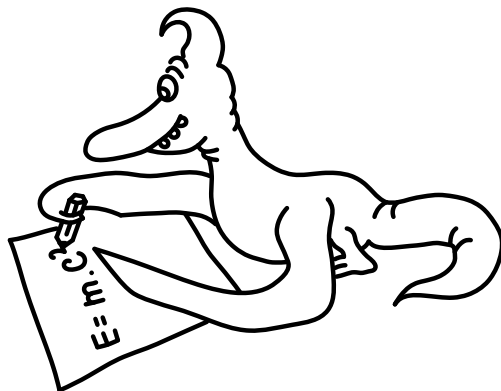
Úloha V.S ... kvanta molekul

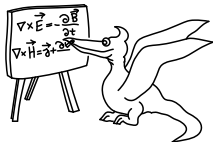
10 bodů

1. Na začátku seriálu jsme zmínili několik aproximací, které jsme použili – jednak zafixování jader a jednak zanedbání relativistických efektů. Pro které prvky čekáte, že se budou elektrony nejvíce vzájemně ovlivňovat s pohybem jader, a proč? A ve které části periodické tabulky si myslíte, že se nejvíce projeví relativistické efekty? Z jakého důvodu? (2b)
2. Celková energie molekuly vody, jak ji dostaneme z kvantově chemického výpočtu, je cca. -75 Ha. Energie uvolněná slučováním vodíku a kyslíku na vodu je $242 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Pokud spočítáme energii reaktantů i produktů s chybou 1%, jaká bude chyba v určení reakční energie? Také zkuste najít nějakou analogii s měřením v reálném světě. (Například: „Zvážím se s pětikorunou a bez ní, abych určil její hmotnost.“) (3b)
3. Nainstalujte si program Psi4 a pokuste se spočítat, o kolik se liší energie lodičkové a (zkřížené) vaničkové konformace cyklohexanu. Můžete použít přiložené vstupní soubory s již optimalizovanou geometrií. Jak moc se liší výsledek od experimentální hodnoty $21 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$? (2b)
Poznámka: Pokud narazíte na problémy s programem Psi4, neváhejte se ozvat na emailovou adresu mikulas@fykos.cz
4. Zkuste spočítat energii reakce pro chloraci benzenu $\text{C}_6\text{H}_6 + \text{Cl}_2 \Rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{Cl} + \text{HCl}$. Srovnajte s experimentální hodnotou $-134 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Můžete využít geometrii molekuly benzenu. (3b)
Bonus: Vyberte svoji oblíbenou (nebo jakoukoliv jinou) chemickou reakci a spočítejte její energii. (až +3b)

Mikuláš rozdává i po Vánocích.

Řešení seriálové úlohy bude dostupné na našem webu.





Seriál: Vibrující kvanta

V dnešním díle se konečně podíváme na to, co se stane, pokud v molekulách přeci jen rozpohybujeme jádra.

To chce mít potenciál!

Pokud si ještě vzpomenete, tak v minulém díle jsme si zjednodušili Schrödingerovu rovnici pro molekulu tím, že jsme našli efektivní potenciál, ve kterém se pohybuje každý elektron, a tím pádem jsme nemuseli řešit Schrödingerovu rovnici dohromady pro všechny elektrony i jádra. Místo toho nám stačilo vyřešit sadu téměř nezávislých rovnic pro jednotlivé elektrony. Nyní bychom chtěli podobným způsobem najít potenciál pro pohyb jader.

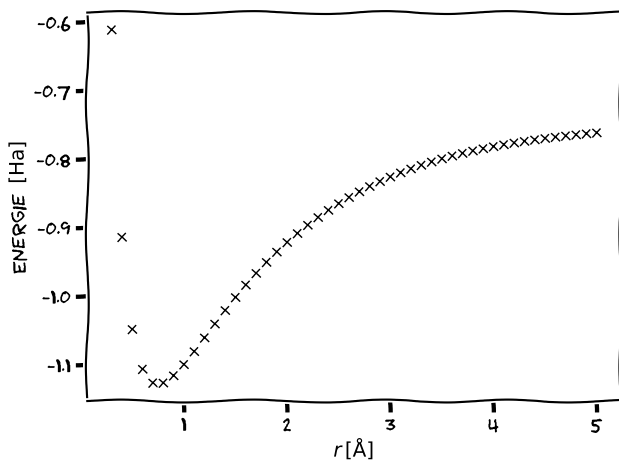
V předchozím díle jsme také při výpočtech zafixovali jádra na základě toho, že se elektrony kvůli rozdílu hmotností pohybují mnohem rychleji než jádra, a tedy pro potřeby modelování elektronového obalu můžeme předpokládat, že jsou jádra nehybná. Nyní ale řešíme přesně opačný problém. Zabýváme se problémem jader, a elektrony v něm fungují jen jako jakési lepidlo, které jádra drží pohromadě. Tentokrát nám nepomůžou triky z minula. Bohužel by nefungovalo ani to, kdybychom vzali zprůměrovanou nábojovou hustotu elektronů (kterou bychom si předem spočítali) a z ní bychom potom utvořili potenciál pro pohyb jader. Problémem je v tomto případě, že orbitály elektronů jsou centrované na jádrech, a tedy se hýbou spolu s nimi. Navíc z toho, jak se mění geometrie molekuly, se změní i jejich tvar. Co tedy s tím?

Představte si, že máme nějakou dvojjadrovou molekulu, například H_2 . Tu vezmeme, pro nějakou konkrétní vzdálenost jader, například $0,3 \text{ \AA}$, a spočítáme její elektronovou energii. V tomto případě dostaneme hodnotu $-0,61 \text{ Ha}$. Nyní jádra malinko posuneme, na $0,4 \text{ \AA}$. Dostaneme energii o něco nižší, $-0,91 \text{ Ha}$. Takhle můžeme postupně projít všechny možné vzdálenosti a vynést si energie do grafu. Dostaneme takovýto obrázek, jež se též nazývá disociační křivka molekuly.

To ale skoro vypadá jako potenciál pro pohyb jader. Trochu potíží je, že nemáme pouze jednu částici, která by se v tomto potenciálu pohybovala, ale dvě částice, které se k sobě přibližují a zase oddalují. Tento nedostatek nicméně snadno vyřešíme trikem, který je mnohem starší než kvantová mechanika samotná a už po více než století se používal k popisu pohybu astronomických těles. Ukazuje se, že pokud popisujeme pohyb dvou těles, jejichž vzájemná síla závisí na vzdálenosti, můžeme místo toho vzít odpovídající potenciál, a v něm nechat pohybovat se těleso o takzvané redukované hmotnosti μ . Tato redukovaná hmotnost pro dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 je daná vztahem

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

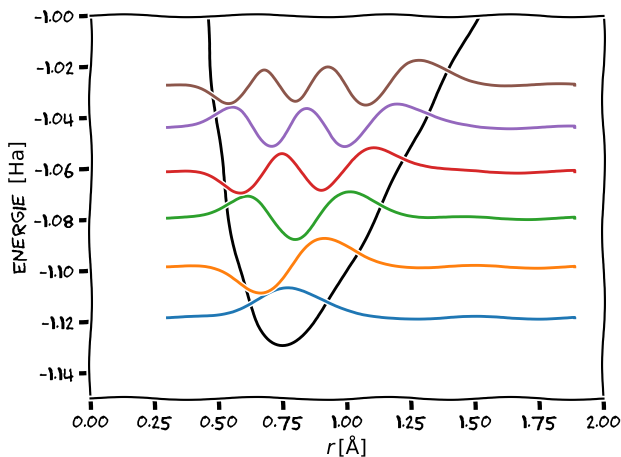
Ve speciálním případě, kdy obě tělesa mají stejnou hmotnost (tedy $m_1 = m_2$), bude redukovaná hmotnost rovna přesně polovině hmotnosti těles $\mu = m_1/2$. Naopak v limitním případě, že je jedno z těles řádově těžší než druhé $m_2 \gg m_1$, bude redukovaná hmotnost téměř rovna hmotnosti lehčího z těles $\mu \approx m_1$.



Nyní nám nic nebrání k tomu vyřešit numericky Schrödingerovu rovnici pro pohyb jader v tomto potenciálu

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x),$$

kde $V(x)$ je potenciál daný disociační křivkou molekuly. Získáme tím následující stavy, které vykreslíme podobně jako ve druhém díle seriálu. Tedy vykreslíme vlnovou funkci několika stavů s nejnižší energií, kterou posuneme ve svislém směru o energii daného stavu.



Výsledné vlnové funkce $\Psi(x)$ mají i v tomto případě interpretaci amplitudy pravděpodobnosti. Je zde ale drobný rozdíl, hustota pravděpodobnosti $|\Psi(x)|^2$ v tomto případě neodpovídá

přímo pravděpodobnosti výskytu částice v konkrétním místě, ale udává pravděpodobnost, že jsou od sebe jádra vzdálena o danou hodnotu. Tedy v základním stavu můžeme očekávat, že mezijaderná vzdálenost molekuly je s největší pravděpodobností v okolí minima potenciálu. Naopak pro první excitovaný stav lze očekávat, že molekula bude mít buď větší nebo naopak menší vzdálenost jader, než je rovnovážná vzdálenost, protože v okolí minima je hustota pravděpodobnosti nulová.

Může se zdát, že šlo jen jakési cvičení na použití kvantové mechaniky, ale opak je pravdou. Když se zamyslíme, zjistíme, že jsme v podstatě do kvantového podoby převedli vibrace molekul. Jistě Vás tedy nepřekvapí, že se tyto vibrace často mohou objevit i v přírodě.

Vibrace molekul v přírodě i v laboratoři

Tak jako může molekula působením elektromagnetického záření přejít do excitovaného stavu, což vlastně znamená přeskok na vyšší kvantový stav elektronů, může stejně tak dobře přeskočit do vyššího vibračního stavu. Rozdíl je v tom, že elektronové přeskoky mají energie, které odpovídají fotonům v ultrafialové a viditelné oblasti spektra, takže je často můžeme přímo pozorovat jako barvy jednotlivých chemických sloučenin. Na rozdíl od toho vibrační přechody molekul leží v infračervené oblasti, takže pro pozorování potřebujeme speciální přístroje. Přesto jsou pro nás zásadní. Například vibrační přechody molekul vody, oxidu uhličitého i dalších molekul v atmosféře absorbují infračervené záření, které by se jinak vyzářilo do vesmíru. To je podstatou dnes tak často zmiňovaného skleníkového efektu.

Zároveň se vibrace složitějších molekul dají použít k rychlé a přesné identifikaci látky v neznámém vzorku. Sice je možné měřit přímo infračervené spektrum, ale je to značně komplikované. Jedním z nejzásadnějších problémů je, že látky, které máme zafixované jako průhledné, například sklo či voda, pro infračervené záření vůbec průhledné nejsou. Přicházíme tak o možnost pozorovat vzorky v roztoku. Z tohoto důvodu se ujal trik, který nám umožňuje celou dobu pracovat s viditelným zářením, pomocí jevu nazývaného Ramanův rozptyl. Pokud prochází látkou světlo o vlnové délce, která není absorbována, tak se pořád občas může při náhodných srážkách s molekulami rozptylovat a odrážet v jiném než původním směru. Tento efekt se nazývá Rayleighův rozptyl, a mimo jiné způsobuje modré zbarvení oblohy. (A vlastně i to, že ve stínu není tma jako v pytli.) Nicméně v malém zlomku případů (uvádí se jeden z milionu) se při rozptýlení fotonu zároveň excituje molekula na vyšší vibrační stav. To je pak právě ten zmiňovaný Ramanův rozptyl. Logicky se tedy kvůli zákonu zachování energie musí i o malinko změnit vlnová délka rozptýleného fotonu.

Na tomto principu je založená Ramanova spektroskopie, kdy vzorek osvítíme laserem o konkrétní vlnové délce a detekujeme rozptýlené záření, které se vlnovou délkou liší od původního záření. Do grafu pak vynášíme jen hodnotu tohoto posunu. Z toho, o kolik se vlnová délka posune, pak můžeme určit energie jednotlivých vibračních hladin. Tato metoda se dnes již používá i v mnoho oblastech praktického života. Například jako užitečná se ukázala při metanolové aféře. Tam se využilo toho, že metanol můžeme detekovat přes sklo, tedy aniž bychom museli otevřít lahev. Běžně se ale také používá na letištích, kde slouží k detekci výbušnin i drog. Dokonce i nejnovější vozítko na Marsu, Perseverance, má v sobě jeden Ramanův spektroskop zabudovaný. Úspěch Ramanovy spektroskopie je v tom, že zvláště u organických molekul má každá funkční skupina konkrétní frekvence, na kterých vibruje. Ty pak můžeme snadno ve spektru poznat a díky tomu zjistit, jak daná molekula vypadá.

Praktické aspekty výpočtu vibračních spekter.

Při hledání potenciálu pro jádra jsme museli opakovat kvantově chemický výpočet pro řadu různých mezijaderných vzdáleností. To ale znamená, že pro jeden výpočet vibrací jader musíme provést velké množství jednotlivých výpočtů pro elektrony. To velmi rychle pro větší molekuly začne být výpočetně příliš náročné. Naštěstí máme v rukávu ještě jeden trik. Podíváme-li se na disociační křivku, v okolí minima, kde nás zajímá, by se dala docela dobře proložit parabolou. Obecný předpis funkce paraboly je $f(x) = ax^2 + bx + c$, který ale můžeme doplnit na čtverec, a dostaneme předpis našeho parabolického potenciálu $V(x) = k(x - x_{\min})^2/2 + E_{\min}$. Zde ale většinu parametrů známe! x_{\min} je rovnovážná vzdálenost a E_{\min} je energie v minimu potenciálu. Parametr E_{\min} navíc jen posunuje energie všech stavů, a proto jej můžeme položit nule, a všechny energie, které nám vyjdou, pak budou definované jako rozdíl vůči této hodnotě.

Jedinou neznámou je tedy v tomto případě tuhost k . Tu nemusíme určovat pomocí fitování, ale můžeme ji rovnou určit z druhé derivace energie podle polohy jader. Tuto druhou derivaci lze analyticky určit přímo z vlnové funkce v optimalizované geometrii a celkově nám tedy stačí jediný kvantově chemický výpočet. Při výpočtu derivace z definice bychom přitom potřebovali výpočty energie minimálně tři.

Tím ale zjednodušení nekončí! Vzpomenete-li si na začátek třetího dílu, ukázali jsme si tehdy lineární harmonický oscilátor, který má přesně takový, parabolický potenciál. Tím pádem se nemusíme trápit numerickým řešením Schrödingerovy rovnice, ale můžeme energie jednotlivých hladin najít analyticky. Schrödingerova rovnice harmonického oscilátoru má tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{k}{2} x^2 \psi(x) = E\psi(x),$$

kde jsme rovnou použili výše zavedenou redukovanou hmotnost μ .

Nebudeme si ukazovat postup, jakým se rovnice řeší, protože by se seriál neúměrně natáhnul. Pro výpočet poloh vibračních čar ve spektrech nám totiž stačí znát energie jednotlivých hladin. Tyto hladiny jsou ekvidistantní a energie n -té hladiny je daná vzorcem

$$E_n = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

kde n nabývá celočíselných hodnot od 0 do ∞ . Všimněte si, že rozdíl energie mezi jednotlivými hladinami je $\hbar\sqrt{k/\mu}$, což odpovídá fotonu o přesně stejné frekvenci, jakou by měl oscilátor s tuhostí k v klasické mechanice. Toto je jeden z mnoha příkladů korespondence mezi klasickou a kvantovou mechanikou. Přeskoky mezi sousedními hladinami budou tedy způsobovat absorpci právě na této na energii $\hbar\sqrt{k/\mu}$. Navíc se ukazuje, že přeskoky o více než jednu hladinu jsou zakázané, a tedy v přírodě téměř neprobíhají.

A co když máme atomů víc?

Pokud máme více než dvouatomovou molekulu, je situace o něco složitější. Celkem totiž má soustava N atomů $3N$ stupňů volnosti, protože polohu každého atomu lze popsat pomocí tří souřadnic. Z toho 3 stupně volnosti odpovídají translaci, tedy pohybu celé molekuly jako celku. Dále 3 stupně volnosti odpovídají rotaci molekuly. (Pro lineární molekulu jen 2). Pokud tyto zanedbáme, protože pro nás nejsou zajímavé, tak nám zbyde $3N - 6$ ($3N - 5$ pro lineární molekulu) stupňů volnosti, které odpovídají různým vibracím.

Postup řešení je v zásadě obdobný, jako jsme si ukázali v předchozí části pro jednu vibraci, až na to, že řešíme problém v mnoha dimenzích. Najdeme optimální geometrii, spočítáme vlnovou funkci a z ní druhé derivace energie ve všech směrech. Z těch pak nakonec získáme energie jednotlivých vibrací. Výhodou je, že programy celou tuto sekvenci kroků provádí automaticky, takže nám stačí zoptimalizovat geometrii a o zbytek se program postará sám.

Výsledkem výpočtu jsou v tomto případě vlastní módy, tedy stojatá vlnění, která mají přesně určenou frekvenci. To je opět analogie s klasickou mechanikou, kde při vibraci makroskopických těles můžeme takovéto módy též pozorovat. Nás ale primárně zajímají frekvence těchto módů, které pak například umíme srovnat s experimentálním Ramanovým spektrem. Může se také někdy stát, že nám program některé frekvence vypíše záporné – To značí, že nemáme optimální geometrii, protože ve směru daného vibračního módu se energie sníží.

Jako příklad si ukážeme výpočet v programu Psi4 na molekule vody. Připravíme si vstup podobný jako v minulém díle, jen přidáme řádek `frequency("HF")`. Vstup pro Psi4 tedy bude vypadat:

```
set basis cc-pvdz
molecule {
0 1
  O -1.818556 -0.320567 1.225399
  H -0.898992 -0.062457 1.771117
  H -2.278145 -1.054597 1.903623
}
optimize("HF")
frequency("HF")
```

Po spuštění ve výpisu najdeme těsně před koncem sekci `==> Harmonic Vibrational Analysis <==`, kde můžeme najít výsledné frekvence. Na konci této sekce je

...

```
Vibration 7 8 9
Freq [cm-1] 1776.1024 4113.4307 4211.9124
Irrep Ap Ap Ap
Reduced mass [u] 1.0817 1.0461 1.0820
Force const [mDyne/A] 2.0105 10.4283 11.3092
Turning point v=0 [a0] 0.2503 0.1673 0.1625
RMS dev v=0 [a0 u1/2] 0.1841 0.1210 0.1196
IR activ [km/mol] 80.8468 21.1727 60.6078
Char temp [K] 2555.4159 5918.3109 6060.0042
```

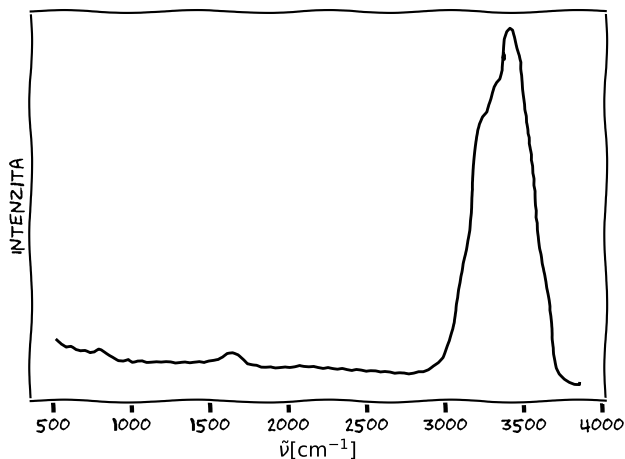
```
-----
1 O -0.01 -0.07 0.00 -0.00 0.05 -0.00 -0.07 -0.01 0.00
2 H 0.38 0.59 -0.00 0.61 -0.35 0.00 0.59 -0.38 -0.00
3 H -0.48 0.52 0.00 -0.54 -0.45 -0.00 0.52 0.48 0.00
```

...

To je v souladu s výše uvedeným pravidlem, které předpovídá právě 3 vibrační módy. Molekula vody by tedy měla vibrovat na energiích 1776 cm^{-1} , 4113 cm^{-1} a 4211 cm^{-1} . Energie vibrací ve spektroskopii se standardně udávají pomocí vlnočtu v recipročných centimetrech (cm^{-1}).

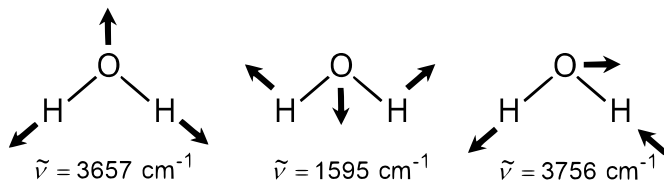
Výhodou je, že vlnočet $\tilde{\nu} = 1/\lambda = E/(hc)$ je přímo úměrný energii záření, na rozdíl od vlnové délky.

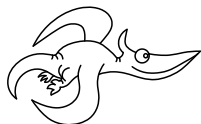
Nyní se můžeme podívat na experimentální Ramanovo spektrum vody.



Můžeme v něm najít všechny tři módy, ač, jejich frekvence se od té, co jsme spočítali my, trochu liší. Dvě čáry, které v našich výpočtech mají energie 4113 cm^{-1} a 4211 cm^{-1} , se slijí do jednoho širokého píku, který ve skutečnosti leží mezi 3000 cm^{-1} a 3500 cm^{-1} . Naopak třetí čára, která nám vyšla na 1776 cm^{-1} , je v grafu sotva zřetelná, ale zato leží téměř tam, kde jsme ji spočítali, přibližně na 1600 cm^{-1} . To je další úskalí výpočtů vibračního spektra, ne všechny přechody se v Ramanově spektroskopii projeví. Některé mohou být zakázané, takže ve spektru budou slabé nebo se neprojeví vůbec. Z výpočtu lze samozřejmě určit i intenzity jednotlivých přechodů, ale to už přesahuje rámec našeho textu.

Na závěr ještě dodáme, že zmíněné tři módy vypadají takto. Pod obrázky jsou uvedeny jejich experimentální energie.





Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

| jméno Student | škola MFF UK | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | IV | „%“ | % | Σ |
|---------------------------------|--------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | 6 | 6 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 66 | 100 | 110 | 264 |
| 1. <i>Kosma Šatánek</i> | ZŠ a MŠ Telecí | 6 | 6 | 6 | 7 | 5 | 11 | 5 | 11 | 57 | 78 | 86 | 206 |
| 2. <i>Damian Šatánek</i> | G Teplice | 6 | 6 | 6 | 6 | – | 12 | 8 | 11 | 55 | 84 | 83 | 199 |
| 3. <i>Jiří Preč</i> | G J. A. Komenského, Uh. Brod | 6 | 4 | 6 | 2 | 4 | 9 | 10 | 3 | 44 | 70 | 75 | 179 |
| 4. <i>Vojtěch Jan Schreib</i> | G Jírovcova, České Budějovice | 4 | 6 | 6 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 35 | 66 | 66 | 159 |
| 5. <i>Adam Pustka</i> | G F. X. Šaldy, Liberec | 4 | 4 | 6 | 4 | 8 | – | 12 | – | 38 | 83 | 62 | 149 |
| 6. <i>Ludmila Šírová</i> | Mensa G, Praha 6 | 4 | 4 | 6 | 6 | – | – | 11 | 3 | 34 | 63 | 58 | 139 |
| 7. <i>Vojtěch Kubrycht</i> | G, Budějovická, Praha | 4 | 4 | 7 | – | – | – | – | 9 | 24 | 86 | 53 | 126 |
| 8. <i>Lukáš Franta</i> | G Christiana Dopplera, Praha | 6 | 6 | 6 | 3 | – | – | – | 7 | 28 | 90 | 40 | 97 |
| 9. <i>Michal Stroff</i> | G, Budějovická, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 95 | 38 | 92 |
| 10. <i>Gala Dědková</i> | G, Roudnice nad Labem | 2 | 4 | 6 | 3 | 3 | 2 | 4 | 3 | 27 | 31 | 34 | 82 |
| 11.–12. <i>Patrik Pöschl</i> | G F. X. Šaldy, Liberec | 4 | 6 | 6 | – | – | – | – | – | 16 | 75 | 33 | 79 |
| 11.–12. <i>Ondřej Skála</i> | G Volgogradská 6a, Ostrava | 2 | 2 | 6 | – | – | 5 | 11 | – | 26 | 55 | 33 | 79 |
| 13. <i>Anežka Skupinová</i> | G, Hodonín | 6 | 6 | – | 6 | – | – | – | – | 18 | 76 | 33 | 78 |
| 14. <i>Jakub Hlavenka</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 3 | 8 | – | 31 | 48 | 32 | 77 |
| 15. <i>Md Faiyaz Siddiquee</i> | DPS STS School Dhaka | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 58 | 25 | 59 |
| 16.–17. <i>Matej Karpáč</i> | ZŠ Jána Švermu | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 69 | 23 | 54 |
| 16.–17. <i>Mikuláš Vlčan</i> | SPŠ, Třebíč | 6 | 4 | 1 | – | – | – | – | – | 11 | 63 | 23 | 54 |
| 18. <i>Barbora Blínová</i> | Podkrušnohorské G, Most | 4 | – | 1 | – | 3 | 4 | – | – | 12 | 36 | 20 | 49 |
| 19. <i>Domínik Kaňka</i> | Lepařovo G, Jičín | – | – | 6 | – | – | – | – | – | 6 | 58 | 18 | 42 |
| 20. <i>Monika Nováková</i> | Reálné G a ZŠ, Prostějov | 2 | – | 1 | – | 2 | – | – | – | 5 | 23 | 15 | 37 |
| 21. <i>Tomáš Řehák</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | 6 | – | – | – | – | – | – | – | 6 | 95 | 15 | 36 |
| 22. <i>Ján Lakota</i> | G Grösslingová, Bratislava | – | 4 | – | – | – | 4 | – | – | 8 | 83 | 14 | 34 |
| 23. <i>Samuel Šandor</i> | G Poštová, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 107 | 13 | 31 |
| 24. <i>Vojtěch Janáček</i> | G F. X. Šaldy, Liberec | 4 | 2 | – | – | – | – | – | – | 6 | 78 | 12 | 28 |
| 25. <i>Vojtěch Novosád</i> | G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 84 | 11 | 27 |
| 26.–27. <i>Daniel Švaňa</i> | G Christiana Dopplera, Praha | 6 | 6 | – | – | – | – | – | – | 12 | 81 | 10 | 25 |
| 26.–27. <i>Nina Vážna</i> | ŠpMNDaG, Bratislava | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 76 | 10 | 25 |
| 28. <i>Teo Višňovský</i> | ŠpMNDaG, Bratislava | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 73 | 10 | 24 |
| 29. <i>Filip Krafcík</i> | G T. Vansovej, Stará Lubovňa | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 44 | 9 | 21 |
| 30. <i>Erik Ježek</i> | Smíchovská SPŠ Praha 5 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 8 | 20 |
| 31.–32. <i>Roberto Franchin</i> | Liceo Sci. Augusto Righi, Roma | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 8 | 18 |
| 31.–32. <i>Vit Vycudilik</i> | Gymnázium Oty Pavla, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 36 | 8 | 18 |
| 33.–34. <i>Bára Kopačková</i> | G a SOŠ Podbořany | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 24 | 7 | 17 |
| 33.–34. <i>Barbora Salajová</i> | G, Litoměřická, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 65 | 7 | 17 |

Kategorie druhých ročníků

| jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i> | škola MFF UK | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | IV | „%“ | % | Σ |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| | | 6 | 6 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 66 | 100 | 110 | 264 |
| 1. David Něnička | G, Rožnov pod Radhoštěm | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 4 | 10 | 13 | 60 | 86 | 83 | 199 |
| 2. Vladimír Slanina | G Poštová, Košice | 6 | 6 | 6 | 7 | – | – | 8 | 12 | 45 | 99 | 74 | 178 |
| 3. Lukáš Hrdý | G, Lesní čtvrť, Zlín | 6 | 6 | 5 | 7 | 7 | 7 | 8 | 5 | 51 | 71 | 73 | 174 |
| 4. Filip Cihlár | G J. Š. Baara, Domažlice | 4 | 4 | 6 | 7 | 3 | 5 | – | 13 | 42 | 69 | 65 | 157 |
| 5. Linda Tománková | G, Boskovice | 6 | 2 | 6 | 2 | 3 | 5 | 12 | 2 | 38 | 64 | 63 | 152 |
| 6. Anna Škrdletová | G, Lovosice | 4 | 4 | 6 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 | 31 | 52 | 57 | 136 |
| 7. Pavla Šimová | G, Šumperk | 6 | 4 | 6 | – | – | – | – | – | 16 | 76 | 56 | 135 |
| 8. Zuzana Grycová | G Botičská, Praha | 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | – | – | 17 | 55 | 56 | 134 |
| 9. Tomáš Otrubčák | G Ludovíta Štúra, Trenčín | 6 | 6 | 6 | – | – | – | – | 14 | 32 | 88 | 55 | 132 |
| 10. Hana Žitňanská | Slovanské G, Olomouc | 2 | 4 | 1 | 7 | 5 | 3 | 3 | 5 | 30 | 49 | 54 | 130 |
| 11.–12. Jakub Buzalka | G, Považská Bystrica | 6 | 6 | 6 | 1 | – | – | – | – | 19 | 65 | 50 | 120 |
| 11.–12. Lujza Lea Lavriková | G, P. Horova, Michalovce | 6 | 6 | 6 | – | 3 | – | – | – | 21 | 69 | 50 | 120 |
| 13. Tomáš Kubrický | G Poštová, Košice | 6 | 4 | 6 | – | – | – | 12 | – | 28 | 93 | 48 | 114 |
| 14. Ivan Žemlička | G Ústavní, Praha | 6 | 4 | 4 | 7 | 4 | – | – | 5 | 30 | 80 | 45 | 109 |
| 15. Petr Brettschneider | G, Dukelská, Bruntál | 6 | 2 | 6 | – | – | 4 | 5 | – | 23 | 52 | 44 | 106 |
| 16. Tomáš Bourek | G J. Heyrovského, Praha | 4 | 4 | 6 | – | 3 | – | – | – | 17 | 76 | 44 | 105 |
| 17.–18. Jakub Kubica | G F. Hajdu, Ostrava | 4 | 6 | 6 | 6 | 3 | 7 | 8 | – | 40 | 67 | 43 | 104 |
| 17.–18. Matouš Mišta | G, Olomouc-Hejčín | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 85 | 43 | 104 |
| 19. Daniel Švec | G, Pelhřimov | 4 | 4 | 6 | – | 3 | 9 | 7 | – | 33 | 63 | 43 | 102 |
| 20. Martin Zuzek | G Dobruška | 6 | 4 | – | – | – | – | 8 | – | 18 | 69 | 41 | 98 |
| 21. Radim Švec | G, Pelhřimov | 6 | 4 | 6 | – | 2 | 3 | 7 | – | 28 | 60 | 40 | 97 |
| 22. Matyáš Beran | G dr. A. Hrdličky, Humpolec | 4 | 4 | 6 | 1 | 9 | – | – | – | 24 | 61 | 35 | 83 |
| 23. Gabriela Kotáčová | G PdC, Piešťany | 4 | 4 | 2 | – | – | 9 | – | – | 19 | 69 | 31 | 74 |
| 24.–25. Sabína Mihulová | G, Nad Alejí, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 63 | 29 | 69 |
| 24.–25. Soňa Vasilová | G, Kukučínova, Poprad | 6 | 4 | 6 | – | – | – | – | – | 16 | 95 | 29 | 69 |
| 26. Jakub Radim Zbončák | G, Křenová, Brno | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 93 | 27 | 65 |
| 27. Giulio Vertucci | Liceo Sci. Augusto Righi, Roma | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 | 5 | – | – | 37 | 71 | 26 | 62 |
| 28. Petr Toman | G, Velké Meziříčí | 6 | 6 | 6 | – | – | – | – | – | 18 | 88 | 24 | 58 |
| 29. Petr Kozák | G, Písek | 6 | 6 | – | – | – | – | 6 | – | 18 | 50 | 23 | 56 |
| 30.–31. Zuzana Harbutová | G L. Štúra, Zvolen | – | 4 | – | – | – | – | – | – | 4 | 63 | 23 | 55 |
| 30.–31. Eva Žilková | G Fr. Švantnera | 6 | – | 6 | – | – | – | – | – | 12 | 71 | 23 | 55 |
| 32. Lucia Kleščová | G Poštová, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 78 | 22 | 52 |
| 33. Martin Uhrin | G Hubeného, Bratislava | 2 | – | 6 | – | – | – | – | – | 8 | 82 | 21 | 51 |
| 34. Matěj Pěnička | G, Nad Alejí, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 82 | 21 | 50 |
| 35. Veronika Pavlíková | G, Křenová, Brno | 6 | 4 | 6 | – | – | – | – | – | 16 | 90 | 19 | 45 |
| 36. Petra Ivanišová | G, Ohradní, Praha-Michle | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 40 | 18 | 44 |
| 37. Tudor Popescu | Inter. Computer HS, Bucharest, RO | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 95 | 18 | 42 |
| 38.–40. Jana Bartoňová | G, Broumov | 4 | 2 | – | – | – | – | – | – | 6 | 79 | 17 | 41 |
| 38.–40. Michal Friml | G Dobruška | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 77 | 17 | 41 |
| 38.–40. Pavel Kučera | G F. Palackého, Val. Mez. | 2 | 2 | 2 | – | – | – | – | – | 6 | 55 | 17 | 41 |
| 41.–44. Adam Filip | G, Česká Lípa | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 60 | 16 | 39 |
| 41.–44. Ondřej Hejsek | G a SOŠ, Jilemnice | 4 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | – | – | 12 | 35 | 16 | 39 |
| 41.–44. Klaudia Laľová | G L. Svobodu, Humenné | – | – | 6 | – | – | – | – | – | 6 | 76 | 16 | 39 |
| 41.–44. Mária Mederlyová | G Grösslingová, Bratislava | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 91 | 16 | 39 |
| 45. Kate Timofeeve | Physics and Mathematics S, SFU | 6 | 4 | 6 | 1 | 4 | 4 | 10 | 2 | 37 | 56 | 15 | 37 |
| 46.–47. Terézia Dadažová | Gymnázium Federica Garciu Lorcu | – | 6 | 4 | – | – | 5 | – | – | 15 | 55 | 15 | 35 |

Kategorie třetích ročníků

| jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i> | škola MFF UK | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | IV | „%“ | % | Σ |
|---|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| | | 3 | 3 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 60 | 100 | 100 | 240 |
| 1. <i>Radovan Lev</i> | G F. Palackého, Val. Mez. | 3 | 3 | 6 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 65 | <i>98</i> | <i>98</i> | 235 |
| 2. <i>Jan Klír</i> | G B. Hrabala | 3 | 3 | 6 | 7 | 7 | 10 | 12 | 15 | 63 | <i>96</i> | <i>96</i> | 231 |
| 3. <i>Patrik Stercz</i> | G Poštová, Košice | 3 | 3 | 6 | 7 | 8 | – | 12 | 11 | 50 | <i>98</i> | <i>90</i> | 215 |
| 4. <i>Matej Kundrák</i> | G Poštová, Košice | 3 | 3 | 6 | 7 | 4 | 7 | 10 | 10 | 50 | <i>83</i> | <i>81</i> | 195 |
| 5. <i>Adam Harmanský</i> | G Poštová, Košice | 3 | 3 | 6 | 7 | 6 | – | – | 6 | 31 | <i>90</i> | <i>78</i> | 187 |
| 6. <i>Jan Strnad</i> | G, Postupická, Praha | 3 | 2 | 6 | 7 | 4 | 8 | 12 | – | 42 | <i>80</i> | <i>77</i> | 184 |
| 7.–8. <i>Martin Mičuch</i> | G Šrobárova, Košice | 3 | 3 | 4 | 7 | 4 | 6 | – | 11 | 38 | <i>80</i> | <i>76</i> | 182 |
| 7.–8. <i>Jiří Sýkora</i> | G, Trhové Sviny | 3 | 2 | 6 | 5 | 9 | 9 | 4 | 13 | 51 | <i>79</i> | <i>76</i> | 182 |
| 9. <i>Jana Mária Žeňuchová</i> | G, P. Horova, Michalovce | 3 | 3 | 1 | 7 | 8 | 5 | 11 | 6 | 44 | <i>73</i> | <i>73</i> | 175 |
| 10. <i>Monika Drezlerová</i> | G, Rožnov pod Radhoštěm | 3 | 2 | 6 | 3 | 3 | 7 | 10 | 10 | 44 | <i>70</i> | <i>70</i> | 168 |
| 11.–12. <i>Lukáš Jurábek</i> | G Grösslingová, Bratislava | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 5 | 4 | 8 | 35 | <i>60</i> | <i>60</i> | 144 |
| 11.–12. <i>David Ševčík</i> | G, Uherské Hradiště | 3 | 2 | 6 | 6 | 9 | 7 | 5 | 11 | 49 | <i>67</i> | <i>60</i> | 144 |
| 13. <i>Veronika Plevná</i> | G, Cheb | 2 | 2 | 6 | 7 | 4 | 6 | 12 | – | 39 | <i>78</i> | <i>55</i> | 131 |
| 14. <i>Michael Ruman</i> | G V. P. Tótha, Martin | 3 | 2 | 6 | – | – | – | – | 5 | 16 | <i>83</i> | <i>51</i> | 123 |
| 15. <i>Maroš Jankovič</i> | G V. Nedožerského, SR | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>69</i> | <i>49</i> | 118 |
| 16. <i>Filip Hošek</i> | Masarykovo klasické G, Říčany | 3 | 2 | 6 | 7 | – | 10 | 11 | – | 39 | <i>78</i> | <i>42</i> | 101 |
| 17. <i>Vladimíra Jiříčková</i> | G J. Vrchlického, Klatovy | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>87</i> | <i>40</i> | 96 |
| 18. <i>Tadija Jelesijević</i> | Gimnazija Kruševac | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>81</i> | <i>33</i> | 80 |
| 19. <i>Veronika Bartáková</i> | Slovanské G, Olomouc | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>84</i> | <i>28</i> | 68 |
| 20.–22. <i>Barbora Klusáková</i> | BG B. Balbína, Hradec Králové | 3 | 3 | 6 | 5 | – | – | – | – | 17 | <i>93</i> | <i>28</i> | 67 |
| 20.–22. <i>Cristina Mihaela Rău</i> | CNI Tudor Vianu, Romania | 2 | – | 6 | 1 | 2 | 5 | – | – | 16 | <i>52</i> | <i>28</i> | 67 |
| 20.–22. <i>Tomáš Vysoký</i> | G Poštová, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>65</i> | <i>28</i> | 67 |
| 23.–24. <i>Lukáš Linhart</i> | G P. Bezruč, Frýdek-Místek | 3 | – | – | 7 | – | – | – | – | 10 | <i>67</i> | <i>28</i> | 66 |
| 23.–24. <i>Martin Marcinčák</i> | G Šrobárova, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>86</i> | <i>28</i> | 66 |
| 25. <i>Daniel Čtvrtečka</i> | G Christiana Dopplera, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>85</i> | <i>25</i> | 61 |
| 26. <i>Kamila Čidlinská</i> | G Botičská, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>62</i> | <i>25</i> | 59 |
| 27. <i>Jakub Savula</i> | G Jírovcova, České Budějovice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>97</i> | <i>24</i> | 58 |
| 28. <i>Maximilian Ladislav Skuda</i> | G, Boskovice | 2 | 3 | 6 | – | – | 2 | 10 | 9 | 32 | <i>56</i> | <i>24</i> | 57 |
| 29.–30. <i>Terézia Hanáková</i> | Gymnázium Janka Matúšku Galanta | 3 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | – | 2 | 19 | <i>36</i> | <i>23</i> | 56 |
| 29.–30. <i>Lachyn Hydyrova</i> | 86th specialized school, TM | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>36</i> | <i>23</i> | 56 |
| 31. <i>Ondřej Kopeček</i> | G, Lesní čtvrť, Zlín | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>68</i> | <i>23</i> | 54 |
| 32. <i>Richard Materna</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>61</i> | <i>20</i> | 47 |
| 33. <i>Anežka Čechová</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>58</i> | <i>19</i> | 46 |
| 34. <i>Matej Bryja</i> | G D. Tatarku, Poprad | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>63</i> | <i>19</i> | 45 |
| 35. <i>Ondřej Kadlec</i> | G, Moravský Krumlov | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>84</i> | <i>18</i> | 42 |
| 36. <i>Jan Šimáček</i> | Gymnázium Brno-Bystrc | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>93</i> | <i>17</i> | 41 |
| 37. <i>Martin Kubánek</i> | G, Roudnice nad Labem | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>84</i> | <i>15</i> | 36 |
| 38.–39. <i>Nikola Beňáková</i> | G, P. Horova, Michalovce | 3 | 3 | 2 | 7 | 3 | 3 | 10 | 4 | 35 | <i>58</i> | <i>15</i> | 35 |
| 38.–39. <i>Kateřina Šmídová</i> | Gymnázium Brno-Bystrc | 1 | – | 6 | – | – | – | – | – | 7 | <i>51</i> | <i>15</i> | 35 |
| 40. <i>Klaudia Sýkorová</i> | G Poštová, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | <i>61</i> | <i>13</i> | 31 |
| 41. <i>Štěpán Fröde</i> | G Dobruška | 2 | 3 | 6 | 7 | 3 | – | – | – | 21 | <i>74</i> | <i>12</i> | 29 |
| 42. <i>Magdalena Tyrmerová</i> | G a SOŠE, Sedlčany | 3 | 1 | 1 | 6 | 2 | 6 | 1 | 7 | 27 | <i>45</i> | <i>11</i> | 27 |

Kategorie čtvrtých ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | IV | „%“ | % | Σ |
|--|----------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|----------|------------|
| <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | MFF | UK | | | | | | | | 100 | 100 | 240 |
| 1. <i>Martin Švanda</i> | Arcibiskupské G, Praha | 2 | 2 | 6 | 6 | 9 | 10 | 11 | 5 | 51 | 85 | 85 | 203 |
| 2. <i>Jakub Hadač</i> | G V. Hlavatého, Louny | 2 | 3 | 6 | 7 | 4 | 7 | 12 | 11 | 52 | 80 | 76 | 183 |
| 3. <i>Tereza Voltrová</i> | G Mikulášské n. 23, Plzeň | 1 | 2 | 6 | 4 | 4 | 7 | 10 | 4 | 38 | 69 | 69 | 165 |
| 4. <i>Nikola Kadlečková</i> | G, nám. TGM, Zlín | 3 | 3 | 6 | 7 | 7 | 5 | 11 | 6 | 48 | 75 | 66 | 158 |
| 5. <i>Jiří Vestfál</i> | G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 93 | 59 | 141 |
| 6. <i>Tereza Hochmanová</i> | G Chotěboř | – | – | – | – | – | – | 11 | – | 11 | 76 | 53 | 126 |
| 7.–8. <i>Katarína Horská</i> | G Jana Keplera, Praha | 2 | 2 | 6 | – | – | 6 | – | – | 16 | 73 | 50 | 120 |
| 7.–8. <i>Daniela Karpíšková</i> | Masarykovo G, Plzeň | 3 | 3 | 6 | 7 | 4 | 5 | 6 | – | 34 | 57 | 50 | 120 |
| 9. <i>Lukáš Létal</i> | G J. Škody, Přerov | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 65 | 41 | 99 |
| 10. <i>Dzenan Mdzic</i> | JU Gimnazija Bihać, BiH | 2 | 3 | 6 | 2 | 9 | – | – | 11 | 33 | 88 | 40 | 95 |
| 11. <i>David Bálek</i> | G Legionářů, Příbram | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 97 | 38 | 91 |
| 12. <i>Pavel Horský</i> | G, Brno-Řečkovice | 3 | 3 | 6 | 7 | 2 | 3 | 7 | – | 31 | 67 | 37 | 88 |
| 13. <i>Jaromír Potůček</i> | G Jana Keplera, Praha | 3 | 2 | 5 | 3 | 5 | 6 | – | 5 | 29 | 59 | 35 | 85 |
| 14. <i>Vladimíra Brabcová</i> | SPŠ Ostrov n. Ohří | 2 | 2 | 6 | – | – | – | – | – | 10 | 81 | 29 | 70 |
| 15. <i>Jakub Vyskočil</i> | G P. Bezruč, Frýdek- Místek | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 56 | 27 | 65 |
| 16. <i>David Škrob</i> | SPŠ a VOŠT Brno | 2 | – | – | – | – | 3 | – | 8 | 13 | 50 | 25 | 59 |
| 17. <i>Jakub Ježek</i> | G B. Němcové, HK | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 95 | 24 | 57 |
| 18. <i>Filip Liška</i> | 1. súkromné G v Bratislave | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | – | – | 10 | 37 | 23 | 56 |
| 19.–20. <i>Radek Košinár</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 68 | 22 | 52 |
| 19.–20. <i>Rudolf Žižka</i> | G, Brno-Řečkovice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 58 | 22 | 52 |
| 21. <i>Patrik Jendele</i> | SPŠ stavební Plzeň | 2 | 2 | 6 | – | – | – | – | – | 10 | 83 | 20 | 49 |
| 22. <i>Juraj Pavolko</i> | G, P. Horova, Michalovce | 1 | 1 | 2 | – | 3 | – | – | – | 7 | 52 | 20 | 48 |
| 23. <i>Jonáš Dej</i> | Wichterlovo G, Ostrava | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 110 | 19 | 46 |
| 24. <i>Jan Lepič</i> | G, Strakonice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 79 | 17 | 41 |
| 25. <i>Barbora Růžičková</i> | G, Moravská Třebová | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 80 | 16 | 39 |
| 26. <i>Adam Juttner</i> | G, Nový Jičín | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 52 | 13 | 31 |
| 27. <i>Emilija Zdravković</i> | Gimnazija Kruševac | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 50 | 12 | 28 |
| 28. <i>Maxim Arkhipov</i> | G, Voděradská, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 59 | 11 | 27 |
| 29. <i>Jakub Kopčil</i> | G Mikulášské n. 23, Plzeň | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 86 | 10 | 25 |
| 30. <i>Martin Bánský</i> | G Fr. Švantnera | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 59 | 10 | 23 |
| 31. <i>Jakub Gerža</i> | G Dobruška | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 105 | 9 | 21 |
| 32.–33. <i>Maxim Archipov</i> | G, Voděradská, Praha | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 63 | 8 | 20 |
| 32.–33. <i>Josef Lezna</i> | G dr. K. Polesného., Zno- jmo | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 8 | 20 |
| 34.–35. <i>Jan Engler</i> | G, Hodonín | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 86 | 8 | 19 |
| 34.–35. <i>Eduard Mrug</i> | G Grösslingová, Bratislava | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 112 | 8 | 19 |
| 36. <i>Dovletgeldi Merdanov</i> | 86th specialized school, TM | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 39 | 7 | 16 |
| 37. <i>Martin Hrabá</i> | G, Benešov | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 75 | 6 | 15 |
| 38. <i>Robin Rádek</i> | G Neumannova, Žďár n. S. | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 5 | 12 |
| 39. <i>Yashwinder Rajput</i> | Bhupindra Int. PS, India | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 61 | 5 | 11 |
| 40. <i>Michal Alamáši</i> | G, Park mládeže, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 91 | 4 | 10 |
| 41. <i>Vojtěch Marek</i> | Biskupské G, Brno | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 56 | 4 | 9 |
| 42. <i>Anna Vodáková</i> | G, Litovel | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 42 | 2 | 5 |
| 43. <i>Natália Čigašová</i> | G Poštová, Košice | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 67 | 2 | 4 |
| 44.–46. <i>Fatma Amin</i> | G, Uherské Hradiště | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 1 | 3 |
| 44.–46. <i>Pragun Pudukoli</i> | NC for Excellence, India | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 1 | 3 |
| 44.–46. <i>Vojtěch Štěpán</i> | G, Benešov | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 100 | 1 | 3 |
| 47. <i>Tomaš Názler</i> | SPŠ a VOŠT Brno | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 15 | 1 | 2 |



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

 /FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.