

Úloha IV.E ... hodím si to

12 bodů; průměr 8,64; řešilo 45 studentů

Mějme přes tyč omotané lano se závažím o hmotnosti m na jednom svém konci. Změřte závislost hmotnosti zátěže M na druhém konci potřebné k uvedení lana do pohybu na počtu obtočení lana kolem tyče.

Patrik přemýšlí o různých metodách... výpočtu.

Teorie

Pro určení koeficientu tření vyjdeme z tzv. Capstanovy rovnice, která popisuje napětovou sílu F na obléhých površích

$$F = F_0 e^{f\varphi}, \quad (1)$$

kde φ je úhel obtočení lana, f značí koeficient statického tření mezi lanem a zaobleným povrchem a F_0 odpovídá počáteční napětové síle. Odvození vztahu (1) naleznete ve starší úloze lano.¹

V našem případě bude F_0 zprostředkovaná tíhovou silou danou působením našeho zvoleného závaží o hmotnosti m a F bude tíhová síla závaží M pro různé úhly obtočení φ . Pro výslednou závislost potřebujeme znát pouze hmotnosti závaží potřebné pro uvedení lana do pohybu

$$M(\varphi) = me^{f\varphi}.$$

Měření

Pomůcky

K měření jsme použili závaží o hmotnosti $m = (0,500 \pm 0,001)$ kg, plastové lano s průměrem $d = 2$ cm o celkové hmotnosti $m' = 25$ g a ocelovou hrazdu do dveří o průměru $D = 10$ cm.

Postup měření

Na jeden konec lana jsme upevnili závaží o hmotnosti m , na druhý konec uchytili nádobu na vodu o hmotnosti $m'' = (0,325 \pm 0,001)$ kg. Lano jsme vždy obtočili okolo hrazdy o požadovaný počet otáček a následně jsme do nádoby postupně přilévali vodu, dokud se lano nezačalo samovolně pohybovat. Měření bylo provedeno pro každou otočku jednou. Měření hmotnosti nádoby s vodou jsme prováděli na kuchyňské váze s přesností na 1 g, poslední měření jsme kvůli velké hmotnosti provedli na osobní váze.

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

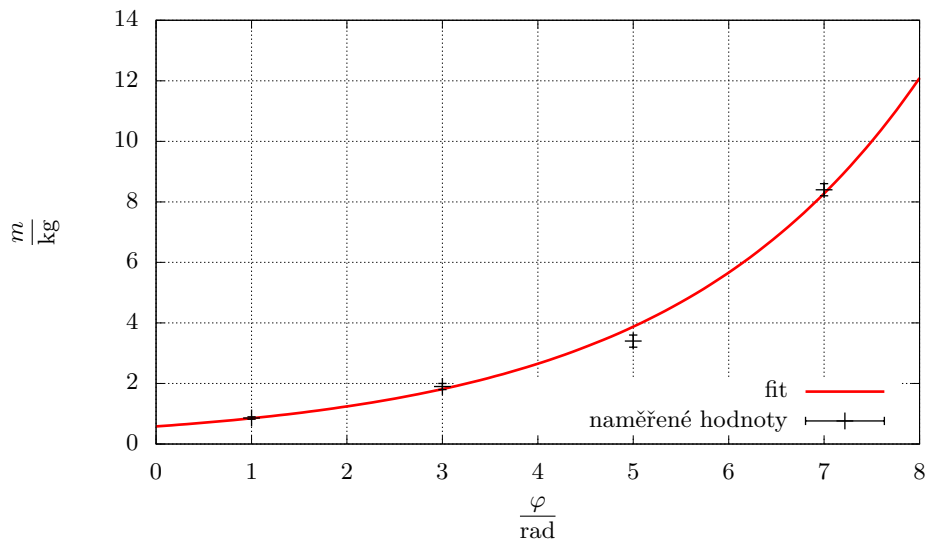
Naměřená data jsou uvedena v Tab. 1. Data jsme následně vynesli do grafu na Obr. 1 a v softwaru `gnuplot` proložili rovnicí ve tvaru

$$y(x) = Ae^{Bx}, \quad (2)$$

kde $A = (0,58 \pm 0,05)$ kg a $B = (0,379 \pm 0,015)$ rad⁻¹ jsou fitované parametry.

Nejistota uvedená u měření hmotnosti byla určena z objemu přilité vody, která odpovídala právě tomu úseku, kdy se lano začalo tíhou nádoby samovolně odmotávat.

¹https://fykos.org/_media/rocnik32/ulohy/pdf/uloha32_6_4.pdf

Obr. 1: Graf závislosti úhlu φ na hmotnosti m .

Tab. 1: Závislost hmotnosti nutné k uvedení lana do pohybu v závislosti na úhlu obtočení.

φ rad	m kg
π	$0,86 \pm 0,04$
3π	$1,90 \pm 0,10$
5π	$3,40 \pm 0,20$
7π	$8,40 \pm 0,20$

Diskuse

Z proložené rovnice (3) na Obr. 1 vidíme, že jsme v rámci nejistoty správně určili původní zátěž M a zároveň i hledaný koeficient tření $f = (0.379 \pm 0.015)$. Hmotnost lana m' jsme mohli při výpočtech zanedbat vzhledem k relativně velké hmotnosti závaží M a faktu, že lano je z větší části namotané na tyči.

V experimentu jsme měřili exponenciální závislost. Vzhledem k jejímu průběhu je obvykle složité naměřit velký počet hodnot, protože požadovaná hmotnost pro rozpořívání lana roste exponenciálně, a tudíž síla potřebná k překročení třecí síly, může být i vyšší, než je maximální nosnost lana. Z grafu na Obr. 1 vidíme, že pro namotání $\varphi = 9\pi$ rad bychom vzhledem ke zkoumané závislosti již pro rozpořívání lana potřebovali zavěsit závaží o hmotnosti přibližně 20 kg, což by bylo pravděpodobně za hranici pevnosti použitého lana. Zároveň bude při jeho zátěži docházet k deformaci, to by však mělo mít minimální vliv na námi zkoumanou závislost, jelikož si část omotaná okolo hrazdy stále zachovává svoji délku. Statistická nejistota určení jednotlivých datových bodů by šla snížit zvýšením počtu měřených hodnot. Maximální mož-

ný zkoumaný počet obtočení bychom mohli efektivně navýšit použitím lehčího závaží, v tom případě bychom ale pravděpodobně museli započítat i nenulovou hmotnost samého lana.

Při namotávání jsme nechávali malý volný prostor mezi jednotlivými smyčkami lana, aby nedocházelo ke vzájemnému tření mezi jednotlivými smyčkami lana. Samotný povrch tyče byl pokovovaný, takže jeho koeficient tření by byl při translačním pohybu relativně malý. Přesnějších výsledků bychom dosáhli použitím siloměru, čímž bychom se vyhnuli nejistotě vzniklé při manipulaci s vodou.

Porovnáme-li rovnice (1) a (3), můžeme formálně zanedbat jednotku u parametru fitu B a stanovit tak koeficient statického tření mezi lanem a tyčí jako $f = (0,379 \pm 0,015)$. Porovnáním hodnoty f s tabelovanými hodnotami² můžeme říci, že se nejvíce blíží hodnotě koeficientu tření kombinace oceli a nylonu $f' = 0,4$, který se používá pro výrobu lan.

Závěr

Seznámili jsme se s jevem tření na zaoblených površích a proměřili závislost hmotnosti zátěže M na druhém konci potřebné k uvedení lana do pohybu na počtu obtočení lana kolem tyče. Naměřené hodnoty v Tab. 1 jsme proložili očekávanou závislostí z Capstanovy rovnice

$$y(x) = Ae^{Bx}, \quad (3)$$

kde parametry splňují $A = (0,58 \pm 0,05)$ kg a $B = (0,379 \pm 0,015)$ rad⁻¹. Formálním zanedbáním jednotky u parametru B jsme určili koeficient statického tření mezi lanem a tyčí jako $f = (0,379 \pm 0,015)$, který dobře odpovídá $f' = 0,4$ pro dvojici povrchů nylon a ocel v rámci 2σ .

Patrik Kašpárek
patrik.kasperek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²https://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html