Úloha V.4 ... centrifuga

7 bodů; (chybí statistiky)

Uvažujme centrifugu o délce $L = 30\,\mathrm{cm}$, ve které jsou v roztoku homogenně rozmístěny malé kulovité částice o poloměru $r = 50\,\mathrm{\mu m}$ a hmotnosti $m = 5{,}5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}$. Hustota roztoku je $\rho_\mathrm{r} = 1\,050\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a jeho viskozita $\eta = 4{,}8\,\mathrm{mPa{\cdot}s}$. Nádoba s roztokem se nachází ve vodorovné pozici a náhle se začne otáčet úhlovou rychlostí $\omega = 0{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Určete, za jak dlouho se $90\,\%$ všech částic dostane na konec centrifugy. Vzájemné srážky a pohyb částic vlivem difúze neuvažujte. Nádoba se otáčí kolem vertikální osy umístěné na jednom z jejích konců.

Jarda rád vyrábí obohacený uran.

Vzhledem k vysoké hodnotě viskozity a nízkým předpokládaným rychlostem částic v odstředivce uvažujme laminární obtékání částic. Proto se odporová síla bude řídit Stokesovým vztahem

$$F_\mathrm{o} = 6\pi\eta r v\,,$$

kde η je dynamická viskozita prostředí, r poloměr částic a v jejich rychlost.

Na částice dále působí odstředivá síla směrem od středu centrifugy. Nesmíme ale zapomenout ani na vztlakovou sílu, která působí opačným směrem v analogii s ponořováním tělesa do kapaliny v homogenním tíhovém poli. Obecně má odstředivá síla v každém bodě částice jinou velikost, ale protože velikost síly roste se vzdáleností od středu lineárně a díky symetrii částic, můžeme částice považovat za hmotné body. Podobně můžeme argumentovat pro nalezení velikosti vztlakové síly. Jejich rozdíl tak můžeme zapsat jako

$$F_\mathrm{c} = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_\mathrm{č} - \rho_\mathrm{r}\right)\omega^2 x\,,$$

kde x je vzdálenost od osy otáčení, $\rho_\mathrm{č}$ je hustota částic, ρ_r hustota roztoku a ω je úhlová rychlost otáčení centrifugy. Hustotu částic najdeme z hodnot ze zadání jako $\rho_\mathrm{č} = \frac{3m}{4\pi r^3} \doteq 1050{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pokud by byla hustota částic nižší než hustota roztoku, vztlaková síla by převýšila odstředivou a částice by putovaly směrem ke středu odstředivky.

Dostáváme pohybovou diferenciální rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_\mathrm{c} - F_\mathrm{o} = \frac{4\pi r^3\left(\rho_\mathrm{č} - \rho_\mathrm{r}\right)\omega^2}{3}x - 6\pi\eta r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - ax = 0\,,$$

kde jsme označili zrychlení jako $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ a rychlost jako $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a pro zkrácení zápisu jsme zavedli konstanty $a = \frac{4\pi r^3(\rho_\mathrm{č} - \rho_\mathrm{r})\omega^2}{3m}$ a $b = \frac{6\pi\eta r}{m}$, přičemž m je hmotnost částic.

Naše rovnice je homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu, takže její řešení hledáme ve tvaru

$$x(t) = c_1\exp(\lambda_1 t) + c_2\exp(\lambda_2 t)\,,$$

kde $\lambda_{1,2}$ jsou řešení kvadratické rovnice

$$\lambda^2 + b\lambda - a = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2}\,.$$

Úlohu je možné dopočítat obecně, můžeme si ale všimnout, že podle hodnot ze zadání $b^2 \gg 4a$, takže ve argumentech exponenciál provedeme Taylorův rozvoj pro odmocninu

$$\lambda_1 = \frac{-b + b\sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}}}{2} \approx \frac{-b + b\left(1 + \frac{2a}{b^2}\right)}{2} = \frac{a}{b}, \lambda_2 \approx -\frac{b^2 + a}{b}\,.$$

Exponenciála s argumentem $\lambda_2 t$ však klesá mnohem rychleji, než roste exponenciála s $\lambda_1 t$. Než tedy částice dorazí na konec odstředivky, bude tento člen již zanedbatelný.

Pro jistotu ale najdeme oba koeficienty c_1 i c_2. Nechť má v čase $t = 0$ částice vzdálenost x_0 od středu centrifugy a její rychlost je nulová. Počáteční poloha částice x_0 nám dává podmínku

$$c_1 + c_2 = x_0\,,$$

zatímco její nulová rychlost při začátku procesu vede na rovnici

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \lambda_1 c_1 \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 c_2 \exp(\lambda_2 t)\,,\\ \dot{x}(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2\,,\\ c_1 \frac{a}{b} = c_2 \frac{b^2 + a}{b}\,,\end{aligned}$$

což nám dává řešení pro koeficienty

$$c_1 = x_0 \frac{b^2 + a}{b^2 + 2a}, c_2 = x_0 \frac{a}{b^2 + 2a}\,.$$

Je evidentní, že koeficient c_2 je mnohem menší než c_1. Pro ten navíc platí $c_1 \approx x_0$. Díky diskuzi výše je zřejmé, že celý člen s argumentem λ_2 můžeme zanedbat a pro polohu $x(t)$ můžeme psát

$$x(t) = x_0 \exp \frac{a}{b} t = x_0 \exp \frac{2r^2 \left(\rho_{\check{c}} - \rho_{\mathrm{r}}\right) \omega^2}{9\eta} t\,.$$

Tato rovnice platí pro každou částici s počáteční polohou x_0. Částice, které jsou blíže ke středu, se na konec dostanou později.

Hledaný čas tedy dostaneme jako dobu, za kterou se na konec dostane částice z polohy $x_0 = L/10$, protože je evidentní, že čím blíže byla částice ke konci trubice na začátku procesu, tím rychleji se k jejímu konci dostane. Protože byly částice v trubici na začátku rozděleny homogenně, tak 90 % se nachází za pozicí $L/10$ od středu otáčení. Proto potřebujeme zjistit čas přesunu právě z tohoto bodu. Konec leží ve vzdálenosti $x = L$, takže hledaný čas je

$$T = \frac{9\eta}{2r^2 \left(\rho_{\check{c}} - \rho_{\mathrm{r}}\right) \omega^2} \ln 10 \doteq 2\,200\,\mathrm{d}\,.$$

Potřebný čas je tedy asi 2 200 dní, což je přes pět a půl roku.

Můžeme si všimnout, že toto řešení je řešením rovnice

$$b \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax\,,$$

tedy to odpovídá situaci, kdy jsme v původní diferenciální rovnici úplně zanedbali člen se zrychlením. Jelikož je člen u odporové síly velký oproti členu a, pak odporová síla vždy velmi rychle vyrovnává odstředivou a tělíska tak zrychlují pouze velmi pomalu.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.