

JIŘÍ FRANTA A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XII. ročník – 1998/99



Předmluva

Milý čtenáři,

právě máš v rukou ročenku obsahující zadání a řešení úloh XII. ročníku FYKOSu (FYzikálního KOrespondenčního Semináře MFF UK), který proběhl ve školním roce 1998/99.

V průběhu roku vypadá seminář tak, že řešitelé pravidelně (každých šest týdnů) obdrží sérii sedmi úloh, z nichž je 5 teoretických (pátá, označená P, je „problémová“), 1 experimentální a poslední se tematicky váže k Seriálu na pokračování, který zadání doprovází (letos byl věnován moderní optice). Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (aktivnější i všechny) a poté svá řešení posílají na adresu semináře. Organizátoři úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Zásilky úloh a řešení jsou doplňovány průběžnou výsledkovou listinou sestavenou na základě bodování a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

K tomuto základnímu schématu semináře se brzy přidala dvě každoroční soustředění, která jsou dnes již jeho neodmyslitelnou součástí. Probíhají vždy na jaře a na podzim a jsou dobrou motivací a odměnou pro nejlepší účastníky. Další aktivitou je Den s experimentální fyzikou, kdy umožníme (ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF a ústavy Akademie věd) našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá „opravdová fyzika“.

V této ročence najdeš na začátku kompletní zadání teoretických a experimentálních úloh, následně jejich řešení (teoretická jsou z praktických důvodů oddělena od experimentálních), v další části je pak Seriál na pokračování, který je doplňován úlohami svázanými s daným tématem. Na konci pak najdeš soupisku nejlepších řešitelů.

Pokud tě tato ročenka nadchne natolik, že by ses chtěl přihlásit k soutěžení v semináři nebo se jen potřebuješ na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neboj se a napiš nám. Jsme k dispozici téměř nepřetržitě na adrese

FYKOS

Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF

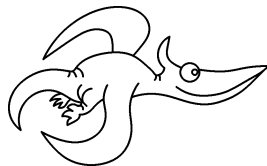
V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

www: <http://www.mff.cuni.cz/news/fks>

tel: (02) 2191 2493 (záznamník Ústavu teoretické fyziky)



Zadání úloh

Úloha I.1 ... srdce

Lidské srdce napumpuje za minutu $q = 5\text{ l}$ krve při tlaku $p \approx 100\text{ mmHg}$. Kolik dní by byla schopna konat stejnou práci standardní autobaterie s účinností $\eta = 50\%$? ($Q = 48\text{ A}\cdot\text{h}$, $U = 12\text{ V}$)

Řešení str. 9

Úloha I.2 ... brzdění na motocyklu

Vzdálenost mezi osou předního a zadního kola motocyklu je $d = 1,4\text{ m}$, jejich poloměr je $r = 0,3\text{ m}$ a koeficient tření mezi pneumatikami a silnicí je $f = 1$. Těžiště motocyklu je uprostřed mezi osami, ve výšce $h = 0,8\text{ m}$ nad zemí. Spočtete minimální brzdnu vzdálenost pro počáteční rychlost motocyklu $v = 60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, jestliže řidič používá

- jen zadní brzdu
- jen přední brzdu
- obě brzdy

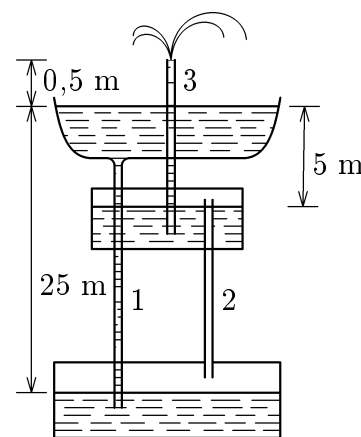
Zamyslete se nad získanými výsledky a zkuste je porovnat s vaší zkušeností.

Řešení str. 9

Úloha I.3 ... fontána

Na obrázku 1 je nakreslen důmyslný systém nádržek. Spočtete rychlost vody vystřikující z trubky 3. Viskozitu vody zanedbejte.

Řešení str. 10



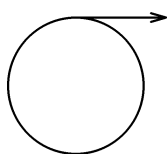
Obr. 1

Úloha I.4 ... roztržitý výletník

Roztržitý výletník zaparkoval své auto na kopci se sklonem $\alpha = 10^\circ$ a zapomněl jej zabrzdít. Jaké maximální rychlosti auto dosáhne? Parametry auta jsou: hmotnost $m = 1200\text{ kg}$, výkon $P = 55\text{ kW}$, maximální rychlost na rovné silnici $v_{\text{max}} = 140\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Předpokládejte, že odpor automobilu je úměrný druhé mocnině rychlosti.

Řešení str. 11

Úloha I.P ... planeta



Obr. 2

Mějme ve volném prostoru planetku (pro jednoduchost uvažujme, že planetka je homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R), na jejíž povrch připevníme raketový motor. Motor je ideální zařízení, které má nulovou hmotnost a bez ohledu na cokoli dokáže vyvíjet určitý tah F . Motor je upevněn k povrchu planetky a nemůže se od něho odpoutat. Upevněn je tak, aby vyvíjený tah měl směr tečný k povrchu — viz obr. 2. Určete alespoň kvalitativně, jak se bude planetka pohybovat po uvedení motoru v činnost.

Řešení str. 11

Úloha I. Exp ... var vody

Změřte měrné skupenské teplo vypařování u vody. Předpokládejte, že znáte měrnou tepelnou kapacitu vody, a z rychlosti ohřívání spočtete užitečný příkon vařiče. Nespalte se! Řešení str. 38

Úloha II.1 ... papiňák

Máme hrnec o objemu $V = 22\text{ l}$, v němž je dokonale suchý vzduch. Nalijeme do něj kapalnou vodu o hmotnosti $m = 18\text{ g}$. Hrnec poté hermeticky uzavřeme a ohřejeme na teplotu 100°C . Kolik vody zůstane v kapalném stavu? Vodní páru považujte za ideální plyn.

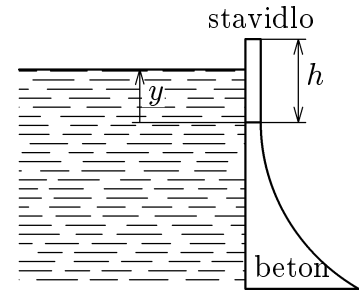
Řešení str. 12

Úloha II. 2 ... přehrada

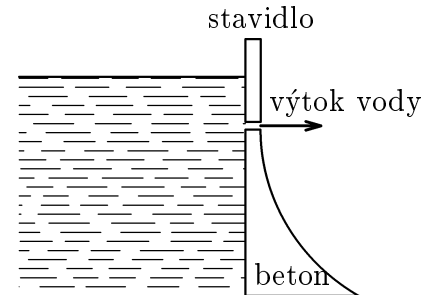
Na řece je postavena přehrada. Plocha umělého jezera je $100\,000\text{ m}^2$, voda z přehrady je vypouštěna stavidlem, které si můžeme představit jako ocelovou desku širokou $l = 20\text{ m}$ a vysokou $h = 10\text{ m}$, která, když přehrada nevypouští žádnou vodu, sedí na betonové konstrukci (obr. 3). Když chceme vodu vypouštět, stavidlo zvedneme a voda poteče mezi dolní stranou stavidla a betonovou konstrukcí přehrady (obr. 4). Běžný průtok přehradou je $20\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$, průtok větší než $100\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ je považován za povodeň.

Předpokládejme tuto situaci: Kvůli plnému energetickému využití je přehrada zcela naplněna vodou ($y = 10\text{ m}$), přitéká i odtéká $20\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ vody. Náhle (v čase t_0) se obsluha přehrady dozví neradostnou zprávou, že se blíží povodňová vlna — za tři hodiny se přítok najednou zvýší na $200\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ a tento stav potrvá další tři hodiny. Poté se přítok opět sníží na $20\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$. Obsluha má za úkol zabránit povodni pod přehradou. Nalezněte funkci $f(t)$, která popisuje závislost velikosti zvednutí stavidla na čase v intervalu (0 h; 6 h) tak, aby k povodni pod přehradou nedošlo. Pokud povodni zabránit nelze, stanovte maximální výšku vody y_{max} v čase t_0 , pro kterou je ještě možno zabránit povodni a určete funkci $f(t)$.

Řešení str. 13



Obr. 3



Obr. 4

Úloha II. 3 ... vodní lyže

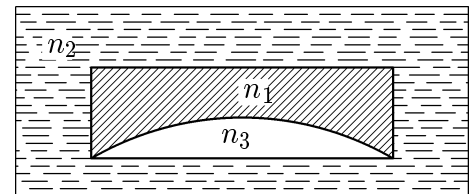
Vaším úkolem je přijít na to, jak fungují vodní lyže. Proč lyžař neklesne ke dnu? Proč je jeho pozice poměrně stabilní?

Řešení str. 14

Úloha II. 4 ... čočka ve vodě

Tenká, plaskodutá čočka je ponořena do vody ve vodorovné poloze dutou stranou dolů, jak ukazuje obrázek. Celková optická mohutnost takto vytvořené optické soustavy je $D = -2,6$ dioptrií. Určete poloměr křivosti skleněné čočky ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 1,33$; $n_3 = 1$).

Řešení str. 15



Obr. 5

Úloha II. P ... ve výtahu

U každého výtahu v mrakodrapu je jisté riziko, že se zpřetrhají všechna lana, na kterých visí. Abychom předešli případnému úrazu, můžeme výtah vylepšit: Spodní část výtahové šachty utěsníme tak, abychom zamezili úniku vzduchu. Také okolo kabiny výtahu dáme těsnění. Výtah, který se utrhně v horním patře mrakodrapu se zabrzdí o vzduchový polštář, který si pod sebou stlačí. Předpokládejte, že kabina vážící 1000 kg se utrhlá 87 m vysoko a vzduchotěsná část výtahové šachty začíná 15 m nad zemí. Jak vysoko nad zemí se kabina nakonec zastaví? Jak velké síly působí po dobu pádu na cestující? V případě výpočtu síly se spokojíme i s kvalifikovaným odhadem, přesný výpočet bude po zásluze odměněn.

Řešení str. 16

Úloha II. Exp ... koulení

Sežeňte si několik (cca 6) předmětů kulového tvaru. Může jít například o míček na pingpong, tenis, fotbalový míč, ocelovou kuličku, hliněnou kuličku... Změřte jejich momenty setrvačnosti. Navrhněte a proveďte další měření s jejichž pomocí budete moci určit, zda se jedná o dutou nebo plnou kouli.

Řešení str. 41

Úloha III. 1 ... plovoucí krychle

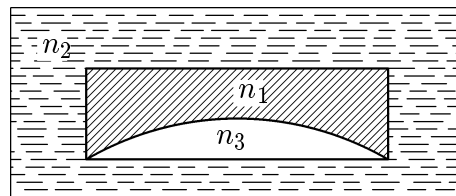
Krychle o hraně a z materiálu o hustotě ρ_1 plave v kapalině o hustotě ρ_2 . Určete, v jaké poloze se krychle ustálí.

Řešení str. 18

Úloha III.2 ... a zase ta čočka!

Tenkou ploskodutou čočku s poloměrem křivosti lámavé plochy R postupně ponořujeme do vody (obr. 6). Nalezněte závislost optické mohutnosti takovéto soustavy na hloubce ponoření čočky. Znáte index lomu skla, vody a vzduchu při atmosférickém tlaku. Závislost indexu lomu vzduchu na tlaku je lineární.

Řešení str. 19



Obr. 6

Úloha III.3 ... hmotnost atmosféry

Spočítejte co nejpřesněji, jakou hmotnost má zemská atmosféra.

Řešení str. 20

Úloha III.4 ... drtivý dopad

Z „nekonečné“ vzdálenosti se k Zemi blíží meteorit počáteční rychlostí v_0 . Vzdálenost meteoritu od přímky, která je rovnoběžná s vektorem rychlosti v_0 a prochází středem Země, je na začátku rovna a . Určete, jaký vztah musí platit mezi v_0 a a , aby meteorit nezasáhl Zemi. Řešení str. 21

Úloha III.P ... západ Slunce

Máme 1 m dlouhou tyč, zapíchnutou kolmo do země. Jak dlouhý stín bude mít tyč 2 h před západem Slunce? Určete, jak se bude lišit výsledek pro různé zeměpisné šířky a různá roční období.

Řešení str. 22

Úloha III.Exp ... tloušťka vlasu

Změřte tloušťku lidského vlasu více metodami, výsledky a chyby jednotlivých metod porovnejte. (Vzorek vlasu byl přiložen k zadání.)

Řešení str. 42

Úloha IV.1 ... hokejista

Hokejista jede po ledě jen po jedné brusli. Led, který má hustotu $0,9 \text{ gcm}^{-3}$ pod bruslí taje do hloubky $h = 0,03 \text{ mm}$. Nůž brusle je široký $d = 2 \text{ mm}$. Skupenské teplo tání ledu je $\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$. Spočítejte velikost třecí síly mezi bruslí a ledem. Tepelnou vodivost ledu zanedbejte.

Řešení str. 23

Úloha IV.2 ... družice

Špionážní družice létá okolo nepřátelské planety po kruhové dráze v rovníkové rovině. Doba jednoho oběhu je T , planeta má hustotu ρ . Na jak velké části povrchu planety může družice provádět špionáž?

Řešení str. 23

Úloha IV.3 ... tyč ve vodě

Tyč o hustotě ρ_1 a délce l je za jeden konec pohyblivě připevněna k vodorovné hrazdě (tak, že se okolo ní může tyč volně otáčet), druhý konec volně visí. Pokud budeme pomalu spouštět hrazdu dolů, bude se tyč přibližovat k hladině vody ($\rho > \rho_1$) a začne se do ní ponořovat. Zjistěte závislost úhlu, který svírá tyč se svislým směrem, na výšce hrazdy nad hladinou. Řešení str. 24

Úloha IV.4 ... zima a léto

Spočítejte, o kolik procent se bude lišit teplota na Zemi v periheliu, kdy je Země od Slunce vzdálena r , od teploty v aféliu, kdy je vzdálenost Země — Slunce $r(1 + \varepsilon)$ nepatrně větší. Předpokládejte, že Země je dokonale černé těleso a v každém okamžiku je v rovnováze s okolím. Celkový vyzářený výkon je úměrný σT^4 .

Řešení str. 25

Úloha IV.P ... v baloně

Vzduch v horkovzdušném balonu je zahříván konstantním příkonem, aby se vyrovnaly tepelné ztráty a balon letěl stále ve stejné výšce. Průměrná teplota vzduchu v balonu je $t = 57^\circ\text{C}$, teplota okolního vzduchu je $t_0 = 17^\circ\text{C}$. Tlak vzduchu v balonu je roven okolnímu tlaku. Pokud zvýšíme příkon hořáku tak, aby teplota v balonu vzrostla o $\Delta t = 0,1^\circ\text{C}$, o kolik se změní výška letu balonu?

Řešení str. 26

Úloha IV . Exp ... pružnost a pevnost

Sežěňte si tenké gumičky a

- změřte závislost protažení gumičky na působící síle a sestrojte graf naměřené závislosti,
- změřte také sílu, při které gumička praskne,
- zatižte gumičku co nejvíce (ale tak, aby se nepřetrhla) a po sundání zátěže proveďte znovu měření a).

Řešení str. 46

Úloha V . 1 ... jehla na vodě

Určete maximální průměr ocelové jehly, která se ještě udrží na vodní hladině. Jehla je pokryta tenkým olejovým filmem, aby ji voda nesmáčela. Znáte hustotu oceli, vody a povrchové napětí vody. Pokud řešení problému závisí na délce jehly, pokládejte ji za známou a diskutujte její vliv.

Řešení str. 27

Úloha V . 2 ... dvě láhve

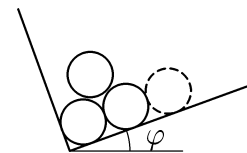
Dvě láhve, jednu plnou vody a jednu prázdnou, necháme kutálet po nakloněné rovině. Která se skutálí rychleji? Pokud ty samé láhve vyšleme se stejnou počáteční rychlostí po nakloněné rovině nahoru, která se dokutálí výše?

Řešení str. 29

Úloha V . 3 ... nákladní auto

Nákladní auto bylo naloženo stejnými hladkými kládami. Před jejich vykládkou zastavilo tak, že pravými koly stojí o poznání výše než levými (příslušná přední a zadní kola jsou ovšem ve stejné výšce). Řekněme, že rovina nákladního prostoru svírá s horizontální rovinou úhel φ (viz obrázek 7). Po vykládce zbyly na autě tři klády tak, jak je na obrázku nakresleno plnou čarou. Na jakou hodnotu by se musel snížit úhel φ , aby se klády přeuspořádaly tak, že by ležely vedle sebe? Jakékoli tření zanedbejte.

Řešení str. 30



Obr. 7

Úloha V . 4 ... kulička a nakloněná rovina

Dokonale pružnou ocelovou kuličku spustíme z výšky h (měřeno od místa dopadu) na nakloněnou rovinu, svírající s vodorovnou rovinou úhel α . Ve vzdálenosti d od místa dopadu kuličky (ve směru klesání roviny) je svislá stěna. Určete, jak vysoko (nad místem dopadu) v ní musíme udělat otvor, aby jím kulička proletěla. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $h = 50$ cm, $d = 15$ cm, $\alpha = 15^\circ$. Diskutujte pohyb kuličky v případě, že nakloněná rovina je nekonečná a kulička nic v cestě nestojí.

Řešení str. 30

Úloha V . P ... nabitá koule

Mějme rovnoměrně nabitou kovovou kulovou slupku s poloměrem R a s celkovým nábojem Q . Rozřízneme ji na dvě části rovinou, která je od středu koule vzdálena $d < R$. Úkolem je spočítat sílu, jakou se obě části budou odpuzovat, dokud jsou velmi blízko sebe.

Řešení str. 31

Úloha V . Exp ... listopad

Když vezmeme list papíru a pustíme jej ve vodorovné poloze, začne pomalu padat. Pokud jej přehneme na polovinu, bude padat rychleji — tož známý fakt. Vaším úkolem je pomocí tohoto jevu zjistit, podle jakého vztahu se mění odporová síla vzduchu působící na papír (závisí na rychlosti lineárně, či kvadraticky?). Pokuste se určit potřebné konstanty.

Řešení str. 48

Úloha VI . 1 ... plyn v láhvi

Uzavřená nádoba obsahující ideální plyn se pohybuje rychlostí v . Náhle se nádoba zastaví a veškerá kinetická energie plynu se změní v teplo. Zanedbejte teplo předané stěnám a spočítejte, o kolik se zvětší druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul plynu, je-li plyn

- jednoatomový
- dvouatomový.

Zdůvodněte rozdílné výsledky v případech a) a b).

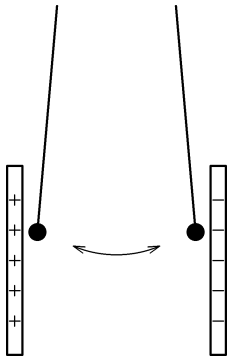
Řešení str. 32

Úloha VI.2 ... dipól v magnetickém poli

Mějme elektrický dipól (představte si ho jako dvě částice se stejnými hmotnostmi m a náboji $+q$ a $-q$ upevněné na koncích nehmotné tyčky délky l). Otáčí se v horizontální rovině okolo vertikální osy procházející středem dipólu. Popište pohyb dipólu poté, co zapneme konstantní vertikální magnetické pole B . Řešení str. 33

Úloha VI.3 ... oscilační obvody

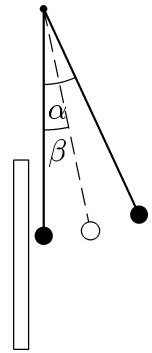
Rezonanční obvod se skládá z neideální cívky s indukčností $L = 1 \text{ H}$ a vnitřním odporem $R = 1 \Omega$ a neideálního kondenzátoru s kapacitou $C = 1 \mu\text{F}$ o neznámém svodovém odporu R_x . Jaká je velikost R_x , pokud víme, že se $1/3$ původní energie rezonančního obvodu ztrácí v podobě tepla na odporu cívky? Řešení str. 35

Úloha VI.4 ... míček v kondenzátoru


Obr. 9

Malá kovová kulička o hmotnosti $m = 3,0 \text{ g}$ je zavěšena na tenkém hedvábném vlákně délky $l = 30 \text{ cm}$ tak, aby se dotýkala svislé kovové desky. Kuličku vychýlíme o úhel α a uvolníme. Po prvním odrazu od desky se kulička vychýlí o úhel $\beta < \alpha$ (obr. 8).

Při druhém pokusu umístíme do vzdálenosti $d = 5,0 \text{ cm}$ od první desky druhou, stejně velkou. Závěs kuličky prodloužíme, aby byl mnohem delší než vzdálenost desek. Připojíme-li desky ke zdroji vysokého napětí $U = 2,00 \cdot 10^4 \text{ V}$ a závěs vychýlíme, kulička se rozkmitá a naráží střídavě na levou a pravou desku (obr. 9). Perioda nárazů se brzy ustálí na hodnotě $T = 0,45 \text{ s}$. Jak se mění při druhém pokusu rychlost kuličky mezi dvěma nárazy na desky? Jaký náboj nese kulička během letu mezi deskami? Řešení str. 35



Obr. 8

Úloha VI.P ... gravitace

Už od pradávna se lidé zabývali pozorováním oblohy a později pohybem planet okolo Slunce. Jak se to historicky odehrálo, asi všichni znáte. Tycho de Brahe sledoval mnoho let pohyby planet a zhotovil rozsáhlé tabulky. Z nich vyšel Kepler a objevil své zákony. Těch využil Newton, lépe pochopil jejich podstatu a dospěl ke krásnému vztahu:

$$F_G = \kappa \frac{mM}{r^2}.$$

Takto popisujeme pouze pohyb planet okolo Slunce. Můžeme říci, co vyvolává tuto sílu? Tímto se zabýval i Newton a nakonec se uspokojil poznáním toho, co se odehrává, bez znalosti mechanismu. Dodnes jej nikdo neobjevil. Bylo navrženo více mechanismů gravitace. Jeden ze zajímavých je tento:

Představte si, že v prostoru je velké množství částic, které se pohybují velkou rychlostí ve všech směrech a jsou málo absorbované při průchodu hmotou. Když jsou pohlcené Zemí, předávají jí hybnost. Je-li těch, které jdou jedním směrem, stejně jako těch z opačného směru, jsou hybnosti vyvážené. Když se k Zemi přiblíží Slunce, jsou částice přicházející na Zemi přes Slunce částečně absorbovány a ve směru od Slunce jich přichází méně, než z opačné strany. Země proto získá hybnost směřující ke Slunci.

Na vás je, abyste ověřili, jestli je taková gravitační síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti (uvažujte dvě koule, kde jedna je mnohem menší než ta druhá — stačí přibližně). Jak asi tušíte, tento mechanismus gravitace není správný. Zkuste přijít na to, kde selhává. Návod: najdete chybné důsledky. Řešení str. 36

Úloha VI.Exp ... atmosférický tlak

Změřte atmosférický tlak v místě vašeho bydliště a to touto metodou: Ponořte do nádoby s vodou prázdnou skleničku dnem vzhůru a z toho, jak vysoko se dostane voda ve skleničce, spočtete atmosférický tlak. Znáte hustotu vody ρ a tíhové zrychlení g . Nezapomeňte uvést místo a čas měření. Řešení str. 50



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... srdce

Lidské srdce napumpuje za minutu $q = 5\text{ l}$ krve při tlaku $p \approx 100\text{ mmHg}$. Kolik dní by byla schopna konat stejnou práci standardní autobaterie s účinností $\eta = 50\%$? ($Q = 48\text{ A}\cdot\text{h}$, $U = 12\text{ V}$)

Práci, kterou srdce vykoná, bychom mohli přirovnat k práci pístu, který vytlačuje krev pod tlakem p tak, že za minutu vytlačí objem q . Přitom předpokládáme, že po sevření srdce ochabne a další krev se do něho nalije samovolně, bez toho, aby muselo konat nějakou práci. Označme $q_S = q/\Delta t$ ($\Delta t = 1\text{ min}$) objemový průtok krve. Vypočteme nyní, jaký výkon P_S má srdce:

$$\begin{aligned}\Delta W_S &= F \Delta s \\ \Delta W_S &= p \Delta V \\ \frac{\Delta W_S}{\Delta t} &= p \frac{\Delta V}{\Delta t} \\ P_S &= p q_S\end{aligned}$$

Autobaterie má „v sobě“ energii rovnou $E_A = QU$, dokáže však poskytnout jenom energii $E' = \eta E_A$. Proto pro výsledný čas t (čas, po který je baterie schopna dodávat stejný výkon jako srdce) bude platit

$$\begin{aligned}t &= \frac{E'}{P_S} \\ t &= \frac{\eta QU}{pq} \Delta t \approx 10,8\text{ dne}\end{aligned}$$

Pozor na dosazované veličiny, většina chyb byla způsobena právě nesprávným převodem jednotek. Dosadíme $Q = 48\text{ A}\cdot\text{h} = 172\,800\text{ C}$, $p = 13300\text{ Pa}$, $q = 5 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$.

Úloha I.2 ... brzdění na motocyklu

Vzdálenost mezi osou předního a zadního kola motocyklu je $d = 1,4\text{ m}$, jejich poloměr je $r = 0,3\text{ m}$ a koeficient tření mezi pneumatikami a silnicí je $f = 1$. Těžiště motocyklu je uprostřed mezi osami, ve výšce $h = 0,8\text{ m}$ nad zemí. Spočtete minimální brzdnou vzdálenost pro počáteční rychlost motocyklu $v = 60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, jestliže řidič používá

- jen zadní brzdu
- jen přední brzdu
- obě brzdy

Zamyslete se nad získanými výsledky a zkuste je porovnat s vaší zkušeností.

Nejjednodušší je řešit příklad ve vztažné soustavě spojené s motocyklem. Je zřejmé, že na motorku působí tíhová síla $F_G = mg$, reakce vozovky na přední kolo R_p , na zadní R_z a setrvačná síla $F_s = ma$.

V případě a) se k výše uvedeným silám přidá třecí síla F_{tz} , která působí na zadní kolo proti směru pohybu. Platí, že výslednice všech sil ve svislém směru je nulová (motocykl nám nevzlétne ani se neproboří).

$$R_p + R_z = F_G \quad (1)$$

a dále je nulový výsledný moment všech sil vůči těžišti (motocykl by nám neměl rotovat):

$$R_z \frac{d}{2} + F_{tz} h = R_p \frac{d}{2}, \quad (2)$$

kde

$$F_{tz} = f R_z. \quad (3)$$

Po vyřešení této soustavy (do (1) a (2) dosadíme za R_z ze (3), z takto upravené (1) vyjádříme R_p a dosadíme do (2)) získáme vztah

$$F_{tz} = \frac{fmgd}{2(d+hf)},$$

což je zpomalující síla. Pro zpomalení dostáváme

$$F_{tz} = ma_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{fgd}{2(d+hf)}.$$

Případ b) je podobný. Rovnice (1) zůstává stejná, momentová věta je ve tvaru

$$R_z \frac{d}{2} + F_{tp}h = R_p \frac{d}{2}, \quad (4)$$

kde $F_{tp} = fR_p$ (3). Zde je nutno vyloučit případy, kdy $R_z < 0$ (což je z hlediska významu R_z nutná podmínka platnosti (4), jinak by motocyklista přeletěl přes říditka). Po dosazení ze (4) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{2(R_p d/2 - F_{tp}h)}{d} &< 0 \\ R_p \frac{d}{2} &< R_p f h \\ \frac{d}{2h} &< f \end{aligned}$$

což f ze zadání nesplňuje. Tuto hodnotu můžeme efektivně snížit tím, že nebudeme brzdit maximální silou, ale jen rozumnou částí. Tím se nám kola budou neustále otáčet a nezablokují se. Pokud snížíme tuto hodnotu efektivně na $f = 0,875$, což vyhovuje naší podmínce, pak pro zpomalení a dostaneme $a_2 = dg/(2h)$.

Případ c) přejde na případ b), neboť při maximálním brzdění ($f = 0,875$) je $R_z = 0$ a tedy nezáleží, jak moc zadní brzdou brzdíme $a_3 = a_2 = a_{2,3} = dg/(2h)$. Pokud zrychlení $a_1, a_{2,3}$ dosadíme do vztahu

$$s = \frac{v^2}{2a},$$

(který získáme buď z rovnosti práce vykonané třecí silou a úbytku kinetické energie $F_t s = \frac{1}{2}mv^2$, či pomocí kinematických vztahů $v = at$ a $s = \frac{1}{2}at^2$), tak dostaneme hodnoty $s_1 = 44,5$ m a $s_2 = 16,2$ m. Při výpočtu jsme považovali brzděné kolo ve stavu těsně před tím, než se „utrhne“ od vozovky. Pokud se již utrhl, koeficient tření mezi kolem a vozovkou se změní ze statického na smykový, který je menší (při valení kola jsou dotykový bod kola s asfaltem ve vzájemném klidu).

Úloha I. 3 ... fontána

Na obrázku je nakreslen důmyslný systém nádržek. Spočítejte rychlost vody vystřikující z trubky 3. Viskozitu vody zanedbejte ($h_1 = 5$ m, $h_2 = 0,5$ m a $h_3 = 25$ m).

Tato úloha byla pro většinu z vás poměrně jednoduchá. Obvykle si stačilo uvědomit, že v trubce 2 je vzduch. Z důvodu řešitelnosti musíme zavést rozumná zanedbání. Viskozitu jsme zanedbali už v zadání, dále musíme předpokládat, že průřez trubek je mnohem menší než povrch hladiny v jednotlivých nádobách (zřejmé z obr.10). Za těchto předpokladů můžeme pohyb vody v trubkách považovat za ustálený a k řešení použijeme Bernoulliho rovnici:

$$\begin{aligned} p_a &= p - h_3 \rho g \\ p - \Delta p - h_2 \rho g &= p_a + h_1 \rho g + \frac{1}{2} \rho v^2 \end{aligned}$$

Rychlosti hladin lze považovat za nulové, p je tlak vzduchu nad hladinou v dolní nádobě a Δp je úbytek tlaku způsobený tíhovým polem Země.

Řešením této rovnice získáme

$$v = \sqrt{2g(h_3 - h_2 - h_1 - \Delta p / \rho g)} .$$

Nyní již musíme určit jen hodnotu Δp . Jako odhad nám postačí

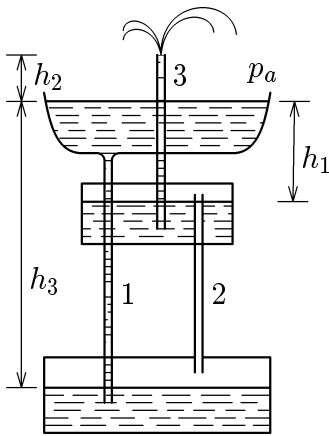
$$0 \leq \Delta p \leq (h_3 - h_2)\rho_v g ,$$

kde ρ_v je maximální hustota vzduchu. Tu určíme ze stavové rovnice

$$\rho_v = \frac{pM_m}{RT} = \frac{(p_a + h_3\rho g)M_m}{RT} .$$

Platí

$$\frac{\Delta p}{\rho g} \leq (h_3 - h_2) \frac{(p_a + h_3\rho g)M_m}{\rho RT} .$$



Obr. 10

Číselně je $\frac{\Delta p}{\rho g} < 9 \text{ cm} \ll h_3 - h_2 - h_1$, a proto je tento člen zanedbatelný. (Molární hmotnosti plynů jsou řádově stejné, proto je možno zanedbat Δp i pro jiný plyn.) Rychlost v našem případě vychází 20 ms^{-1} .

K došlým řešením máme několik poznámek. Hodně řešitelů vycházelo ze zákona zachování energie. V tomto případě se však neobešli bez předpokladu, že objem vody, který vyteče z horní nádoby, je roven objemu vody, který stříká z trubky 3 (uvažujte např. průřez trubky 3 větší než průřez trubky 1; ani v tomto případě se nejedná o perpetuum mobile — energie se čerpá z tlakové energie vzduchu ve spodní baňce).

Nakonec drobnou poznámku. Vzhledem k uvažovaným zanedbáním nemá smysl uvádět výsledek na 5 platných cifer.

Úloha I.4 ... roztržitý výletník

Roztržitý výletník zaparkoval své auto na kopci se sklonem $\alpha = 10^\circ$ a zapomněl jej zabrzdít. Jaké maximální rychlosti auto dosáhne? Parametry auta jsou: hmotnost $m = 1200 \text{ kg}$, výkon $P = 55 \text{ kW}$, maximální rychlost na rovné silnici $v_{\max} = 140 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Předpokládejte, že odpor automobilu je úměrný druhé mocnině rychlosti.

Pro odporovou sílu platí ze zadání $F_0 = kv^2$, kde k je konstanta úměrnosti. Na nakloněné rovině působí na automobil složka tíhové síly $F'_g = mg \sin \alpha$, která mu uděluje zrychlení. Při dosažení maximální možné rychlosti bude $F_0 = F'_g$ a automobil se bude dále pohybovat bez zrychlení. Pro maximální rychlost tedy dostaneme

$$mg \sin \alpha = kv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k}}$$

Konstantu k určíme z chování automobilu na rovině. Automobil je urychlován silou $F = P/v$, která bude mít při $v = v_{\max}$ velikost F_0 :

$$\begin{aligned} F_0 &= F \\ kv_{\max}^2 &= \frac{P}{v_{\max}} \\ k &= \frac{P}{v_{\max}^3} \end{aligned}$$

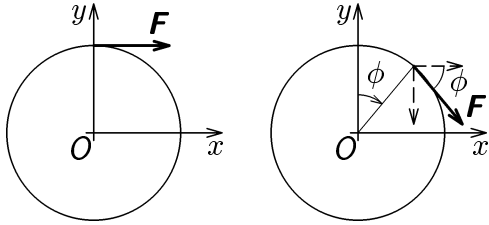
Pro hledanou rychlost v máme po dosažení vztah:

$$v = \sqrt{\frac{mgv_{\max}^3 \sin \alpha}{P}} ,$$

po dosažení konkrétních hodnot ze zadání $v = 47 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 170 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Úloha I. P ... planetka

Mějme ve volném prostoru planetku (pro jednoduchost uvažujme, že planetka je homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R), na jejíž povrch připevníme raketový motor. Motor je ideální zařízení, které má nulovou hmotnost a bez ohledu na cokoli dokáže vyvíjet určitý tah F . Motor je upevněn k povrchu planetky a nemůže se od něho odpoutat. Upevněn je tak, aby vyvíjený tah měl směr tečný k povrchu — viz obr. 11. Určete, alespoň kvalitativně, jak se bude planetka pohybovat po uvedení motoru v činnost.



Obr. 11

Planetku považujeme za tuhé těleso. Můžeme využít 1. a 2. větu impulsovou. Ty popisují pohyb hmotného středu tělesa a rotaci tělesa kolem osy procházející tímto bodem. Zvolíme-li soustavu Oxy a orientaci úhlů ϕ po směru hodinových ručiček (viz obr. 11), máme definovanou soustavu, ve které popisujeme pohyb. Vzhledem k symetrii problému bude pohyb rovinný.

Pro vyšetření otáčivého pohybu zvolme soustavu spojenou s hmotným středem planetky, takovou, že směr os bude pevný v prostoru. Tato soustava je sice neinerciální, ale setrvačné síly mají působiště v hmotném středu. Jediná síla, která způsobuje otáčení, je tedy síla způsobená motorem raketky. Tato síla je konstantní a proto bude v naší soustavě planetka konat rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb. Pro velikost úhlového zrychlení ε platí:

$$FR = M = J\varepsilon ,$$

kde

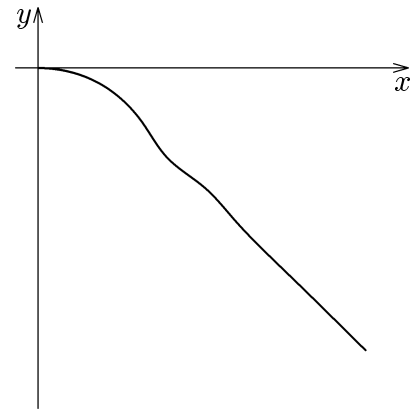
$$J = \frac{2}{5}mR^2 .$$

Úhlová rychlost po určitém čase t bude

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{F}{mR} t$$

a úhel otočení

$$\phi = \frac{5}{4} \frac{F}{mR} t^2 .$$



Obr. 12

Někteří z vás uvažovali, kdy se planetka roztrhne odstředivou silou.

V soustavě pevné v prostoru působí na planetku jediná síla (tah motoru), rozkladem této síly do směrů x a y získáme pro pohyb hmotného středu diferenciální rovnice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} \cos \phi(t) , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F}{m} \sin \phi(t) ,$$

Bohužel tyto rovnice neumíme řešit analyticky. Někteří z vás je simulovali v Pascalu nebo Famulu a vytiskli i graf.

Z grafu na obr. 12 vidíme, že postupně se bude pohyb planetky stále více blížit přímce a planetka bude stále méně zrychlovat.

Úloha II. 1 ... papiňák

Máme hrnec o objemu $V = 221$, v němž je dokonale suchý vzduch. Nalijeme do něj kapalnou vodu o hmotnosti $m = 18$ g. Hrnec poté hermeticky uzavřeme a ohřejeme na teplotu 100°C . Kolik vody zůstane v kapalném stavu? Vodní páru považujte za ideální plyn.

Po zahřátí mohou nastat dvě možnosti. Buď se odpaří všechna voda (pak není co řešit), anebo se odpaří pouze část vody a v papiňáku budou syté vodní páry. Předpokládejme, že nastane druhý případ.

Tlak sytých vodních par při $100\text{ }^\circ\text{C}$ je roven atmosférickému tlaku (rozmyslete si proč!). Známe tedy tlak a objem vodní páry. Ze stavové rovnice dostaneme pro hmotnost páry:

$$m_{odp} = \frac{p_0 V M}{R_m T},$$

kde p_0 je atmosférický tlak, V objem nádoby, M molární hmotnost vody, R_m univerzální plynová konstanta a T termodynamická teplota. Dosazením konkrétních hodnot dostaneme:

$$m_{odp} = 13\text{ g}.$$

Vidíme, že se skutečně neodpařila všechna voda. Odečtením od celkové hmotnosti získáme hmotnost vody, která zůstala v kapalném stavu:

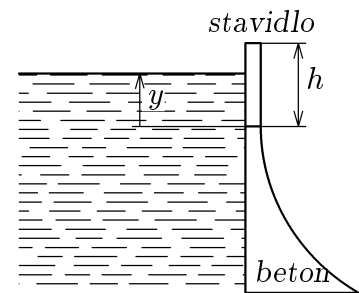
$$m_{kap} = 5\text{ g}.$$

Poznámka: Při řešení jsme směle zanedbali objem kapalné vody proti objemu papiňáku.

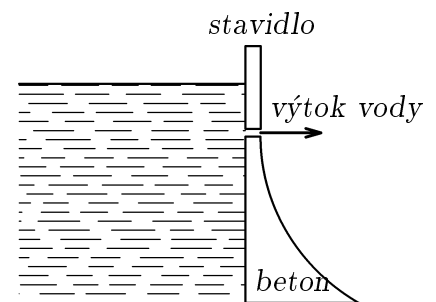
Úloha II.2 ... přehrada

Na řece je postavena přehrada. Plocha umělého jezera je $100\,000\text{ m}^2$, voda z přehrady je vypouštěna stavidlem, které si můžeme představit jako ocelovou desku širokou $l = 20\text{ m}$ a vysokou $h = 10\text{ m}$, která, když přehrada nevypouští žádnou vodu, sedí na betonové konstrukci (obr. 13). Když chceme vodu vypouštět, stavidlo zvedneme a voda poteče mezi dolní stranou stavidla a betonovou konstrukcí přehrady (obr. 14). Běžný průtok přehradou je $20\text{ m}^3\text{s}^{-1}$, průtok větší než $100\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ je považován za povodeň.

Předpokládejme tuto situaci: Kvůli plnému energetickému využití je přehrada zcela naplněna vodou ($y = 10\text{ m}$), přitéká i odtéká $20\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ vody. Náhle (v čase t_0) se obsluha přehrady dozví neradostnou zprávou, že se blíží povodňová vlna — za tři hodiny se přítok najednou zvýší na $200\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ a tento stav potrvá další tři hodiny. Poté se přítok opět sníží na $20\text{ m}^3\text{s}^{-1}$. Obsluha má za úkol zabránit povodni pod přehradou. Nalezněte funkci $f(t)$, která popisuje závislost velikosti zvednutí stavidla na čase v intervalu (0 h; 6 h) tak, aby k povodni pod přehradou nedošlo. Pokud povodni zabránit nelze, stanovte maximální výšku vody y_{\max} v čase t_0 , pro kterou je ještě možno zabránit povodni a určete funkci $f(t)$.



Obr. 13



Obr. 14

Při využití maximální přípustné výtokové rychlosti $100\text{ m}^3\text{s}^{-1}$

1. klesne před vlnou hladina o $(100 - 20)\text{ m}^3\text{s}^{-1} \cdot 3 \cdot 3600\text{ s} / 100000\text{ m}^2 = 8,64\text{ m}$
2. po vlně stoupne hladina o $(200 - 100)\text{ m}^3\text{s}^{-1} \cdot 3 \cdot 3600\text{ s} / 100000\text{ m}^2 = 10,8\text{ m}$

To značí, že pro $y_{\max} = 10\text{ m}$ přehrada přeteče, jelikož výsledná výška bude $12,16\text{ m} > h$ a povodni tedy nezabráníme. Funkci $f(t)$ budeme proto hledat pro počáteční výšku o $2,16\text{ m}$ menší, tedy $y_{\max} = 7,84\text{ m}$. Z toho ale plyne, že výška před vlnou bude $7,84\text{ m} - 8,64\text{ m} = -0,8\text{ m}$ pod otvorem. Na tento problematický výsledek můžeme pohlížet více způsoby:

1. Pokud má být v čase $t = 3\text{ h}$ hladina $0,8\text{ m}$ pod výtokovým otvorem, je toho možné dosáhnout jedině tak, že v čase $t = 0\text{ h}$ bude hladina vody pod výtokovým otvorem ($y_m < 0$).

Nevíme však, zda takového stavu lze v námi uvažované přehradě vůbec dosáhnout. Pokud ano (například vyschnutím, nebo vypouštěním vody utajeným nízko položeným otvorem), tak můžeme provést požadované výpočty. Jednoduchými kupeckými počty získáme $y_m = 12,4\text{ m}$. Funkce $f(t)$ bude do doby, než hladina dosáhne výtokového otvoru (v čase $t_1 = 3,22\text{ h}$) nedefinována (pro $t < t_1$). Pro $t > t_1$ získáme funkci $f(t)$ tak, že budeme uvažovat, že každou sekundu nám v přehradě přibude $Q = 100\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ ($Q_v = 100\text{ m}^3$ budeme stavidlem

upouštět). Pro výtokovou rychlost v hloubce y budeme pro zjednodušení používat vztah $v = \sqrt{2yg}$, i když vzhledem k nezanedbatelné šířce štěrby vneseme do výsledných vztahů nepřesnosti. Bude tedy platit:

$$Q_v = f(t)l\sqrt{2yg} = f(t)l\sqrt{2g(t-t_0)Q/S} \Rightarrow f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g(t-t_0)Q/S}},$$

2. Pokud nepřipustíme polohu hladiny pod výtokovým otvorem, můžeme se alespoň pokusit minimalizovat maximální průtok přehradou. Po uplynutí tří hodin musí být přehrada prázdná, $y_{max} = 8,64$ m. Obdobným výpočtem jako výše pak získáme funkci $f(t)$:

· pro $t < 3$ h je

$$f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g(y_{max} + \frac{Q_1 t}{S})}},$$

kde $Q_v = 100 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ a $Q_1 = -80 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$,

· pro $t > 3$ h je

$$f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g\frac{Q_2(t-3\text{ h})}{S}}},$$

kde $Q_v = 107 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, $Q_2 = 93 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$.

Vzhledem k tomu, že některé hodnoty v zadání byly uvedeny s přesností na jednu platnou cifru, můžeme i takovýto výsledek (maximální průtok $Q_v = 107 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$) považovat za zabránění povodni.

Úloha II.3 ... vodní lyže

Vaším úkolem je přijít na to, jak fungují vodní lyže. Proč lyžař neklesne ke dnu? Proč je jeho pozice poměrně stabilní?

Uvažujme nejprve, jaké síly na lyžaře působí. Určitě je tažen lanem za lodí a působí na něj tíhová síla. Jelikož se pohybuje ve vodě, bude na něj určitě působit vztlaková síla. Dále bychom asi měli uvažovat také odpor vzduchu a vody.

Vztlakovou sílu můžeme přibližně odhadnout z počátečních podmínek. Při bedlivém sledování "Neváhej a toč" či "Pobřežní hlídky" jsem zjistil, že lyžaři v záchranných vestách se potopí přibližně do 2/3 hrudníku. Jelikož jedoucí lyžař vyčuhuje z vody celý až na zbytek lyží, troufám si tvrdit, že vztlaková síla jeho udržení na hladině moc neovlivní.

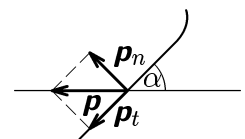
Takže nám zůstaly tyto síly: tíhová, tažná, odpor vzduchu a vody. Odporová síla vzduchu pravděpodobně bude působit pouze horizontálně, kde může lyžaře brzdit a vychylovat ze směru (to vychýlení asi nebude velké, ledaže by foukal větříček, což zanedbáme), její velikost odvodíme z Newtonova vzorce

$$F = \frac{1}{2}CS\rho v^2, \quad (5)$$

kde S je kolmý průmět plochy lyžaře do směru rychlosti, ρ je hustota vzduchu, v jeho rychlost vůči lyžaři a C součinitel odporu.

Tahovou sílu lodi uvažujeme rovnoběžnou s hladinou a tíhová síla je přirozeně vertikální.

Zbývá nám tedy určit odporovou sílu vody. Síla vzniká jako reakce lyží a vody. Zřejmě je způsobena molekulami vody, které při nárazu do lyží mění svoji hybnost. Uvažme (trochu nerealisticky), že hybnost všech molekul je stejná. Dle obr. 15 můžeme hybnost rozložit na 2 složky. Tečná složka zřejmě nebude pohybem lyže ovlivněna, ale normálová ano. Odporová síla vody má tedy směr kolmice k lyžím (z výše uvedených úvah pro ni dostaneme vzorec podobný Newtonovu).

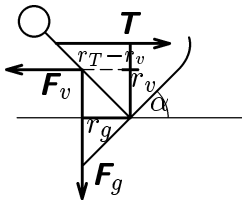


Obr. 15

Lyžař se udržuje na hladině, ale zároveň se po ní může pohybovat volně, takže jeho zrychlení v horizontálním směru může být libovolné. Podmínkou pro udržení na hladině je nulové zrychlení

ve vertikálním směru. Jelikož v tomto směru působí pouze tíhová síla a vertikální průmět odporové síly vody, dostaneme rovnost

$$\frac{1}{2}C' S \rho v^2 \cos \alpha = mg . \quad (6)$$



Obr. 16

Tím jsme určili podmínku pro potopení lyžaře, zbývá nám ošetřit, zda se do vody jednoduše nepřevrátí, čili potřebujeme, aby jeho moment sil byl nulový. Nejprve určíme osu rotace. Většina ji zvolila do středu lyže, kde je upnuto vázání lyžaře. Nyní určíme působíště jednotlivých sil. U tíhové a tahové síly to není žádný problém. Horší je to s oběma odporovými silami. Pokud však aproximujeme člověka do obdélníkového průřezu a počítáme s rovnoměrným rozložením na tuto plochu, můžeme umístit působíště výslednice odporové síly vzduchu také k těžišti. Obdobně aproximujeme odporovou sílu vody do osy rotace. Tato síla tedy působí v ose rotace a nemá vliv na výsledný moment sil. Z obr. 16 odvodíme

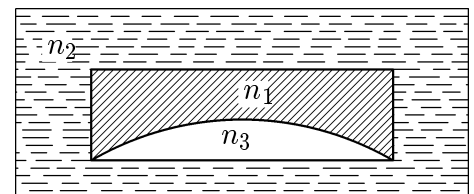
$$mgr_g + \frac{1}{2}C_{\rho v} S_c v_0^2 r_v = Tr_T . \quad (7)$$

Dostali jsme tedy dvě podmínky rovnováhy — (6) a (7).

Nyní se podívejme, jak je na tom lyžař se stabilitou. Ve vertikálním směru zřejmě závisí na úhlu α , rychlosti vůči vodě, průřezu ponořené části lyží, úhel α je určitě závislý na momentu sil. Pokud se lyžař ponoří více pod hladinu, zvětší se odporová síla vody a lyžař se tedy vydá opět k hladině. Pokud lyžař zrychlí, stoupne výše nad hladinu, pokud zpomalí, klesne hlouběji pod hladinu. Tady jeho poloha ve směru vertikály stabilní není. Zrychlovat či zpomalovat může lyžař pouze díky člunu, nebo díky proudění vody. Pokud se změní tahová síla člunu, dojde ke změně momentu sil i horizontálního zrychlení. Tím se ovlivní rychlost vůči vodě i vzduchu a úhel α . Odporová síla vzduchu a horizontální složka odporové síly vody působí vždy proti zrychlování pohybu, ale souhlasně s jeho zpomalováním. Tady tedy stabilitu nenalezneme. Čili rychlost obecně není stabilní, pokud se změní síly. Stabilitu rychlosti musí ovlivňovat člun. Pokud se ale lyžař nakloní ve směru úhlu α , evidentně neexistuje síla, která by ho vracela zpět do původní pozice. Lyžař by se tedy měl při sebemenší výchylce převrátit. Pomohlo by, kdybychom uvažovali, že odporová síla vody nepůsobí v ose rotace, ale v závislosti na α . Podle mého názoru ale její rameno bude velmi malé, takže její moment bude malý, a proto nestačí kompenzovat větší výchylky jako jsou vlny. Zde podle mě hraje roli sám lyžař, který musí aktivně měnit ramena sil svým nakláněním a předřepáváním. Takže o rotační stabilitu se musí postarat hlavně sám lyžař. Problém stability orientace a směru v horizontální poloze si už můžete promyslet sami.

Úloha II.4 ... čočka ve vodě

Tenká, ploskodutá čočka je ponořena do vody ve vodorovné poloze dutou stranou dolů, jak ukazuje obrázek. Celková optická mohutnost takto vytvořené optické soustavy je $D = -2,6$ dioptrií. Určete poloměr křivosti skleněné čočky ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 1,33$; $n_3 = 1$).



Obr. 17

Úlohu lze řešit mnoha způsoby — například můžeme využít toho, že celková optická mohutnost tenkých čoček těsně k sobě přiložených je rovna součtu optických mohutností jednotlivých čoček, nebo pomocí paraxiálních paprsků. Protože se první způsob při znalosti vztahu pro výpočet ohniskové vzdálenosti tenké čočky (uveden ve většině tabulek či učebnic fyziky) redukuje na vyjádření neznámé ze jmenovatele, tak bych se věnoval způsobu druhému. Jako první způsob předpokládá, že se čočka nachází v nevelké hloubce a vzduchová bublina není zakřivena. Paprsek rovnoběžný s optickou osou dopadá „zhora“ na čočku. Na rozhraní voda-sklo se neláme (dopadá kolmo), na rozhraní sklo-vzduch dopadá pod úhlem α a láme se pod úhlem β , na rozhraní vzduch-voda dopadá pod úhlem $\beta - \alpha$ a láme se pod úhlem γ (viz. obr.18). Vzhledem ke zjednodušení uvedeným výše a v zadání (paraxiální paprsky, rozhraní voda-sklo a

vzduch-voda jsou rovnoběžná, tenká čočka) budou úhly α , β , γ malé a můžeme využít rovnosti $\sin \phi \doteq \text{tg } \phi \doteq \phi$ (pro úhel ϕ zadaný radiánech).

Z obrázku je patrné, že $\sin \gamma = d/f \doteq \gamma$ a ze zákona lomu plyne $n_2 \sin \gamma = n_3 \sin(\beta - \alpha)$ a tedy

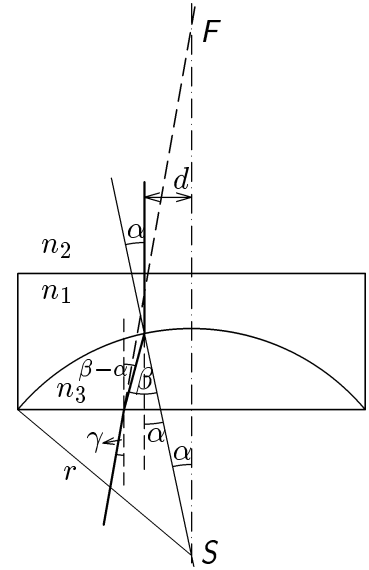
$$\beta - \alpha = \frac{\gamma n_2}{n_3} = \frac{dn_2}{fn_3}. \quad (8)$$

Dále platí (zákon lomu pro rozhraní voda-sklo): $n_1 \sin \alpha = n_3 \sin \beta$ a tedy $\alpha n_1 = \beta n_3 \Rightarrow \beta = \alpha n_1/n_3$ a po dosazení z trigonometrického vztahu $\sin \alpha = d/r \doteq \alpha$ dostáváme $\beta = dn_1/rn_3$, což můžeme dosadit do (8):

$$\frac{dn_1}{rn_3} - \frac{d}{r} = \frac{dn_2}{fn_3}$$

a s využitím toho, že $f = 1/D$ dostaneme výsledný vztah

$$r = \frac{n_1 - n_3}{Dn_2}.$$



Obr. 18

Číselně vychází pro zadané hodnoty $r = -14,5$ cm. Zápornost výsledku je způsobena použitou znaménkovou konvencí.

Úloha II. P ... ve výtahu

U každého výtahu v mrakodrapu je jisté riziko, že se zpřetrhají všechna lana, na kterých visí. Abychom předešli případnému úrazu, můžeme výtah vylepšit: Spodní část výtahové šachty utěsníme tak, abychom zamezili úniku vzduchu. Také okolo kabiny výtahu dáme těsnění. Výtah, který se utrhne v horním patře mrakodrapu se zabrzdí o vzduchový polštář, který si pod sebou stlačí. Předpokládejte, že kabina vážící 1000 kg se utrhla 87 m vysoko a vzduchotěsná část výtahové šachty začíná 15 m nad zemí. Jak vysoko nad zemí se kabina nakonec zastaví? Jak velké síly působí po dobu pádu na cestující? V případě výpočtu síly se spokojíme i s kvalifikovaným odhadem, přesný výpočet bude po zásluze odměněn.

Pohyb kabiny výtahu je jednorozměrným problémem. Považujme tedy směr dolů za kladný a směr nahoru za záporný. Výškou kabiny výtahu rozumějme vzdálenost dna kabiny od dna výtahové šachty. Označme m hmotnost kabiny výtahu, S plochu dna kabiny, h výšku vzduchotěsné části výtahové šachty a H výšku, ve které se kabina utrhne. Poměr m/S je výhodné označit jako m^* . Reálné hodnoty m^* leží zhruba mezi 500 až 1000 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$. V dalších výpočtech uvažujme hodnotu $m^* = 750 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$.

Kvalitativní popis pohybu kabiny je zhruba následující: Kabina se začne pohybovat šachtou směrem dolů vlivem tíhové síly. Tento pohyb je zpomalován působením okolního vzduchu. V okamžiku, kdy dno kabiny dosáhne vzduchotěsné části šachty, začne kabina stlačovat vzduch pod sebou. Rostoucí tlak pod kabinou způsobí její zabrzdění a její následné urychlení směrem nahoru. Děj ve vzduchotěsné části lze považovat za adiabatický, neboť bude poměrně rychlý. To znamená, že velikost rychlosti kabiny po opuštění vzduchotěsné části šachty bude stejná jako při vstupu do ní. Pohyb kabiny směrem nahoru je brzděn jednak tíhovou silou a jednak působením okolního vzduchu. Kabina se tedy zastaví ve výšce, která je menší než výška, ve které pohyb začal. Pohyb kabiny se poté opakuje. Díky působení okolního vzduchu a tepelným ztrátám ve vzduchotěsné části šachty se kabina ustálí někde ve vzduchotěsné části. Zbývá tedy určit tuto výšku.

Tlak vzduchu nad kabinou lze prakticky vždy považovat za rovný atmosférickému. Tlak vzduchu pod kabinou při pohybu v neutěsněné části výtahové šachty bude mít hodnoty zhruba někde mezi p_a a $p_a + m^*g$. V případě, že kabina vstupuje do vzduchotěsné části naposledy, bude tlak vzduchu pod kabinou téměř roven atmosférickému. Teplota T vzduchu ve vzduchotěsné části je stejná před vstupem i výstupem kabiny a je rovna teplotě okolí. Pro výšku h_k , ve které se výtah

ustálí (dojde i k vyrovnání teploty plynu s teplotou okolí), tedy platí podle stavové rovnice:

$$\frac{(p_a + m^*g)h_k S}{T} = \frac{p_a h S}{T}$$

$$h_k = \frac{h}{1 + m^*g/p_a} = 14 \text{ m}$$

Jelikož je m^*g podstatně menší než p_a , vychází h_k téměř rovné h . Protože nic není dokonale těsné, bude kabina velmi pomalu klesat ke dnu výtahové šachty, kde již skončí natrvalo.

Síly působící na cestující lze popsat pomocí veličiny a , která udává zrychlení tělesa v soustavě spojené s kabinou, které mu uděluje výslednice tíhové a setrvačné síly. Aby byl cestující v kabině v klidu, musí na něho působit další síly o výslednici $-m_c a$, kde m_c je hmotnost cestujícího. Je-li výslednice silového působení okolního vzduchu na kabinu rovna F , potom pro a platí:

$$a = g - \left(g + \frac{F}{m} \right) = -\frac{F}{m}$$

Určit sílu F je velmi složité. Nejdůležitější informaci o silách působících na cestující udává maximální velikost a .

Pohybuje-li se kabina směrem dolů v neutěsněné části, potom je hodnota a někde mezi 0 a g (přesná hodnota závisí na brzdě síle F). Pohybuje-li se kabina směrem nahoru, potom je $a < 0$, přičemž velikost a bude nejspíše menší než g . Maximálních hodnot a se bude dosahovat při pohybu ve vzduchotěsné části. Je-li y výška kabiny ve vzduchotěsné části šachty, potom pro tlak p pod kabinou platí:

$$p_a (Sh)^\kappa = p (Sy)^\kappa \quad \Rightarrow \quad p = p_a \left(\frac{h}{y} \right)^\kappa$$

To tedy znamená, že:

$$a = \frac{(p - p_a)S}{m} = \frac{p_a}{m^*} \left[\left(\frac{h}{y} \right)^\kappa - 1 \right]$$

Je-li y_m minimální výška y , potom pro maximální hodnotu a_m platí:

$$a_m = \frac{p_a}{m^*} \left[\left(\frac{h}{y_m} \right)^\kappa - 1 \right]$$

Je-li v_0 rychlost, kterou kabina vstupuje do vzduchotěsné části šachty, pak pro minimální y_m platí *) :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + (p_a + m^*g)(h - y_m)S = \frac{p_a S h}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{h}{y_m} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

Levá strana této rovnosti udává práci, která se vykoná na plynu pod kabinou při jeho adiabatickém stlačení z objemu Sh na objem Sy_m . Jelikož se jedná o adiabatický děj, je tato práce rovna přírůstku vnitřní energie plynu pod kabinou. Tento přírůstek je vyjádřen pomocí pravé strany rovnice. Tvar pravé strany rovnice se dostane úpravou vztahu $C_V n(T_m - T)$ pro přírůstek vnitřní energie za použití stavové rovnice $pV = nRT$ a vztahů $\kappa = C_p/C_V$, $C_p = C_V + R$. Vyjádříme-li y_m pomocí a_m , potom získáme tento vztah:

$$v_0^2 = \frac{2p_a h}{m^*} \left\{ \frac{(1 + m^*a_m/p_a)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1}{\kappa - 1} - \left(1 + \frac{m^*g}{p_a} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{m^*a_m}{p_a} \right) \right] \right\}$$

Známe-li v_0 , pak lze určit a_m . To je však možné pouze numericky. Využijeme-li však toho, že v_0 s rostoucím a_m roste, potom můžeme postupovat i jinak. Bude-li $a_m = 10 \text{ g}$, nemělo by dojít k těžkým zraněním cestujících. Pro $a_m = 5 \text{ g}$ by vše mohlo proběhnout bez vážnějších úrazů. Při

*) Používáme vztahy platné pro rovnovážné děje, i když tento děj rovnovážný není.

odhadu těchto mezí je důležité si uvědomit, že k průletu vzduchotěsnou částí může dojít několikrát a směr a se během pohybu neustále mění. Pro uvedené meze vycházejí následující hodnoty:

$$a_m = 5 \text{ g} : v_0 = 9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a_m = 10 \text{ g} : v_0 = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Zbývá určit hodnotu rychlosti v_0 . Maximální možná hodnota v_0 je ta, která odpovídá volnému pádu:

$$v_0 = \sqrt{2g(H - h)} = 38 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Minimální odporová síla vzduchu je určena Newtonovým vzorcem. Té přísluší mezní rychlost v_m :

$$v_m = \sqrt{\frac{2m^*g}{C\rho}} = 110 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

kde $\rho = 1,28 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu a hodnota C je zhruba 1. Porovnáme-li tuto hodnotu s maximální možnou hodnotou v_0 , potom dojdeme k závěru, že v případě velké mezery mezi kabinou a výtahovou šachtou a malé těsnosti stěn výtahové šachty může dojít k těžkým zraněním cestujících, popřípadě k jejich smrti.

Je-li celková plocha mezer S' , kterými může unikat vzduch z prostoru pod kabinou, podstatně menší než S , potom lze mezní rychlost v_m odhadnout následovně: Tlak pod kabinou je při mezní rychlosti roven $p_a + m^*g$. Je-li rychlost unikajícího vzduchu rovna v , potom dle Bernoulliho rovnice platí:

$$p_a + m^*g = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Mezi v a v_m platí, že $S'v = Sv_m$. Pro v_m tedy dostáváme toto vyjádření:

$$v_m = \frac{S'}{S} \sqrt{\frac{2m^*g}{\rho}}$$

Pro $S'/S < 0,1$ dostaneme, že $v_m < 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. V tomto případě by se vše mohlo obejít bez vážných úrazů. Nicméně i přesto by bylo lepší užít pokud možno jiný záchranný systém.

Úloha III.1 ... plovoucí krychle

Krychle o hraně a z materiálu o hustotě ρ_t plave v kapalině o hustotě ρ_k . Určete, v jaké poloze se krychle ustálí.

Na začátku bych rád podotkl, že když krychle v kapalině plave (tak to bylo zadáno), tak musí být $\rho_t \leq \rho_k$. V případě $\rho_t = \rho_k$ se bude krychle ve vodě vznášet a může zaujmout jakoukoli polohu. Dále budeme uvažovat pouze $\rho_t < \rho_k$.

Nyní si ujasníme, v jaké poloze se krychle může ustálit. Bude to v každé stabilní rovnovážné poloze. Rovnovážná je taková poloha, kdy výsledná síla i výsledný moment sil působící na krychli je nulový. Stabilní je tehdy, když se navíc těleso po malé výchylce v jakémkoli směru vrátí do původní polohy. Z energetického hlediska je stabilní ta poloha, v níž má potenciální energie tělesa lokální minimum.

Pro krychli plovoucí v kapalině existují 3 rovnovážné polohy

1. horní a dolní podstava je vodorovná
2. dvě stěnové uhlopříčky jsou svislé (hranou nahoru)
3. jedna tělesová uhlopříčka je svislá (rohem nahoru).

Teď bychom měli rozhodnout, pro jaký poměr hustot ρ_t/ρ_k jsou jednotlivé polohy stabilní. Nepodařilo se mi najít jednoduché řešení tohoto problému (vám také ne), a proto budeme řešit trochu jednodušší případ. Pro daný poměr hustot spočteme potenciální energii všech tří poloh a nejnižší z nich bude jistě odpovídat stabilní poloze (globální extrém je i extrémem lokálním). Místo všech možných stabilních poloh najdeme pouze tu „nejstabilnější“.

Položme místo nulové potenciální energie i počátek souřadnic na hladinu kapaliny, pak bude potenciální energie plovoucí krychle

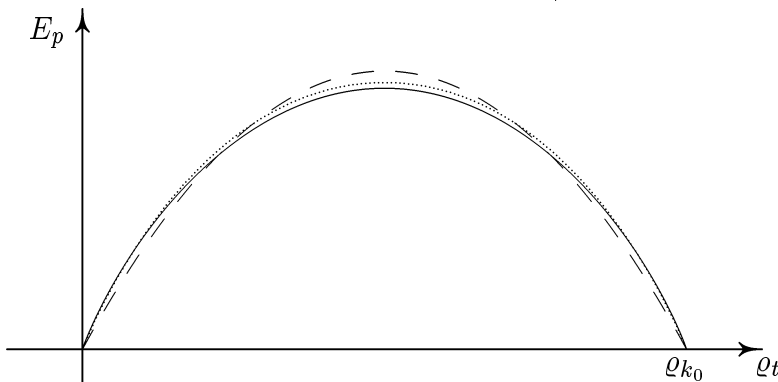
$$E_p = mgh - m_k gh_p,$$

kde h je svislá souřadnice těžiště krychle (její geometrický střed), m její hmotnost, m_k je hmotnost kapaliny v díře po tělese a h_p je svislá souřadnice geometrického středu ponořené části. Z Archimédova zákona víme, že $m_k = m$. Potenciální energie je

$$E_p = mg(h - h_p).$$

Uvědomme si, že h_p je vždy záporné.

Uvažujme hustotu kapaliny ρ_{k_0} za konstantní a hustotu krychle budeme měnit v intervalu $\rho_t \in (0, \rho_{k_0})$. Průběhy závislosti $E_p(\rho_t)$ jsou v následujícím obrázku (čárkovaně — poloha 1, tečkovaně — poloha 2, plně — poloha 3).

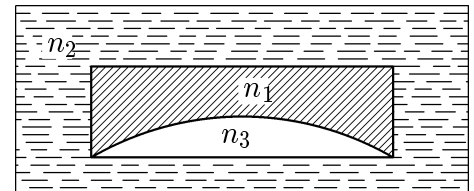


Obr. 19

Pro nízké hustoty má nejnížší potenciální energii poloha 1, pro vyšší hustoty poloha 3 a blízko hustoty kapaliny je to opět poloha 1. Průsečík křivek odpovídajících polohám 1 a 3 můžeme vypočítat. Výpočet je ovšem dosti dlouhý a je to spousta geometrie. Vyplývá z něj, že pro hustoty $\rho_t \in (0; 0,2\rho_{k_0}) \cup (0,8\rho_{k_0}; \rho_{k_0})$ je stabilní poloha 1 a pro hustoty $\rho_t \in (0,2\rho_{k_0}; 0,8\rho_{k_0})$ je stabilní poloha 3.

Úloha III.2 ... a zase ta čočka!

Tenkou ploskodutou čočku s poloměrem křivosti lámavé plochy R postupně ponořujeme do vody (obr. 20). Naleznete závislost optické mohutnosti takovéto soustavy na hloubce ponoření čočky. Znáte index lomu skla, vody a vzduchu při atmosférickém tlaku. Závislost indexu lomu vzduchu na tlaku je lineární.



Obr. 20

Nejprve popíšeme, co se vlastně děje, když se čočka ponořuje. S rostoucí hloubkou se zvyšuje hydrostatický tlak, což způsobuje vzrůst tlaku ve vzduchové části čočky. Vzhledem k tomu, že v zadání nebylo uvedeno nic o přístroji, který by nám pod čočku dofukoval vzduch a udržoval jeho původní objem, tak se objem vzduchu bude zmenšovat. Pod čočkou nám tedy vznikne vzduchová bublina, jejíž hladina se bude u skla zakřívovat směrem do vzdušného prostoru (voda ke sklu na rozhraní se vzduchem dokonale vzlíná) a v centrální části ji můžeme považovat za vodorovnou (předpokládejme, že čočka je dostatečně velká, aby se neprojevily kapilární jevy). Z výše uvedeného vyplývá, že můžeme kapilární jevy zanedbávat. Vzhledem k tomu, že téměř každý z vás měl svou hypotézu o chování vzdušné části čočky (kromě těch, co stlačování vzduchu „neuvažovali“), tak jsme se rozhodli provést pokus k potvrzení naší hypotézy.

Po provedení drobných úprav (odřezání hrdla a dna) na umělohmotných lahvích od perlivé vody značky **** jsme tři takto upravené lahve spojili a získali tak prostor pro cca. 1 m vysoký vodní sloupec (poznámka pro ty, co by nás chtěli napodobit — u spodní lahve je vhodné dno ponechat). K překvapení všech zúčastněných se vodní sloupec rozhodl neopustit naši „nádobu“ a mohli jsme tedy přistoupit k vlastnímu pokusu. Modelem čočky byla sklenice ve vrchní části dostatečně zakřivená (s čočkou se nám velmi špatně manipulovalo), kterou jsme postupně ponořovali. Výsledky našeho experimentování jsou následující:

1. Rovnice kontinuity platí (což se projevilo efektním transportem vody z pro ni vymezeného prostoru na stůl a na Šéfa).

2. Voda je mokrá (o čemž se přesvědčilo — díky prvnímu zjištění — hlavně šatstvo Velkého Šéfa).

3. V rámci neextrémních hloubek lze naši teorii považovat za odpovídající realitě.

Tímto bych chtěl poděkovat Jirkovi Frantovi a Janě Gřondilové za spolupráci.

A nyní můžeme spokojení a mokří přistoupit k vlastnímu řešení úlohy. Úpravou výsledného vztahu ze vzorového řešení 4. příkladu II. série dostaneme vztah pro optickou mohutnost při hladině: $D = (n_1 - n_{p_a})/Rn_2$. Označme $n(p)$ index lomu vzduchu při tlaku p , pak

$$D(p) = \frac{n_1 - n(p)}{Rn_2}.$$

Dle zadání je n lineární funkcí tlaku: $n = kp + q$, kde k, q jsou konstanty. Ze znalosti toho, že pro $p = 0$ je $n = 1$ a pro $p = p_a$ je $n = n_{p_a}$ dostáváme $q = 1$ a $k = (n_{p_a} - 1)/p_a$ a závislost n na p vypadá následovně:

$$n = \frac{n_{p_a} - 1}{p_a} p + 1.$$

(Zde je nutno zdůraznit, že n_{p_a} není přesně rovno jedné.)

Abychom dostali závislost na hloubce ponoření, vyjádříme p jako součet hydrostatického a atmosférického tlaku $p = p_a + h\rho g$. Finální tvar vzorce pro optickou mohutnost má tedy tvar

$$D = \frac{1}{Rn_2} \left[n_1 - \left(\frac{(n_{p_a} - 1)(p_a + h\rho g)}{p_a} + 1 \right) \right] = \frac{1}{Rn_2 p_a} [(n_1 - n_{p_a})p_a + h\rho g(n_{p_a} - 1)].$$

K tomuto řešení je ovšem nutno dodat, že jeho přesnost bude klesat s hloubkou a to tím více, čím menší poloměr bude mít čočka, neboť hladina se bude v důsledku kapilárních jevů zakřivovat.

Poznámka k hodnocení: Tento příklad byl nešťastný v tom, že i ti, co „zapomněli“ na stlačování vzduchu, mohli dostat stejný výsledek (neboť změna objemu vzduchu v námi uvedeném přiblížení nepřispívá ke změně opt. mohutnosti, ale pro větší hloubky a čočky s menším průměrem to bude majoritní jev).

Úloha III. 3 ... hmotnost atmosféry

Spočtěte co nejpřesněji, jakou hmotnost má zemská atmosféra.

Jak asi všichni víte, atmosféra je objekt velice komplikovaný, a proto ji musíme nahradit nějakým vhodným modelem. Asi jste se dozvěděli ve škole, že atmosféru dělíme do určitých vrstev. Ta nejnižší se nazývá troposféra. Právě v ní se nachází většina hmoty a možná také víte, že její tloušťka je 9–17 km. To podle toho, zda tloušťku měříme na pólu nebo na rovníku. Díky této poměrně malé tloušťce (vzhledem k poloměru Země) můžeme při výpočtu považovat gravitační zrychlení za konstantní. Zemi nahradíme koulí a nebudeme uvažovat, že se otáčí — tím odpadne odstředivá síla a tedy i rozdílné tloušťky jednotlivých vrstev na rovníku a na pólech.

Nejjednodušší výpočet hmotnosti atmosféry M_A vypadá takto: Porovnáme tlakovou a tíhovou sílu působící na povrch zemský. Povrch Země je $S = 4\pi R_Z^2$ a p je atmosférický tlak u povrchu.

$$F_{tl} = pS = M_A g = F_G$$

a odtud dostaneme

$$M_A = \frac{pS}{g} = \frac{4\pi R_Z^2 p}{g}.$$

Pozorný řešitel FKS jistě ví, že i pro vzduch platí cosi jako hydrostatický paradox — tlak na povrchu Země závisí jen na výšce atmosféry nad povrchem a ne na její „šířce“ v různých výškách. Koule s větším poloměrem má i větší povrch. Dále také ve větší vzdálenosti od povrchu Země je menší gravitační zrychlení. Z těchto důvodů jsme spočetli dolní odhad hmotnosti, ale protože atmosféra je poměrně tenká, bude i odhad poměrně přesný.

Mnozí jste řešili příklad trochu jinak. Spočteme proto hmotnost atmosféry ještě jednou a to pro izotermní atmosféru — to znamená, že ve všech výškách je teplota stejná. Využijeme vztahu

$$\rho(H) = \rho_0 e^{-\frac{M_m g H}{R_m T}}$$

pro výpočet hustoty vzduchu v závislosti na výšce H nad zemským povrchem při dané teplotě vzduchu T , který platí pro izotermní atmosféru a můžete ho nalézt v tabulkách. ($\frac{R_m}{M_m}$ je měrná plynová konstanta — pro vzduch $287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Objem tenoučké kulové slupky je $dV = 4\pi r^2 dr$. Hmotnost malého elementu objemu $dm = \rho dV$. Dohromady tedy dostáváme

$$dm = 4\pi \rho_0 r^2 e^{-\frac{M_m g}{R_m T}(r-R_Z)} dr$$

Zintegrováním rovnice v mezích od poloměru Země do nekonečna dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} M_A &= 4\pi \rho_0 \int_{R_Z}^{\infty} r^2 e^{-\frac{M_m g}{R_m T}(r-R_Z)} dr = \\ &= 4\pi \rho_0 \frac{1}{K} \left(R_Z^2 + \frac{2R_Z}{K} + \frac{2}{K^2} \right), \text{ kde } K = \frac{M_m g}{R_m T} \end{aligned}$$

Všimněme si ještě, že při zanedbání všech členů kromě R_Z^2 dostaneme náš první výsledek. (Neboť stavová rovnice ideálního plynu pro jeden kg je $\frac{p}{T} = \frac{R_m}{M_m}$.)

První způsob výpočtu nám dává hmotnost atmosféry $5,3 \cdot 10^{18}$ kg a druhý $5,6 \cdot 10^{18}$ kg. Oba jsou opravdu pěknými odhady hmotnosti atmosféry — Malý průvodce meteorologií (MF Praha 1983) uvádí hodnotu $5,1 \cdot 10^{18}$ kg.

Úloha III.4 ... *drtivý dopad*

Z „nekonečné“ vzdálenosti se k Zemi blíží meteorit počáteční rychlostí v_0 . Vzdálenost meteoritu od přímky, která je rovnoběžná s vektorem rychlosti v_0 a prochází středem Země, je na začátku rovna a . Určete, jaký vztah musí platit mezi v_0 a a , aby meteorit nezasáhl Zemi.

Úlohu řešme v soustavě spojené se Zemí (v této soustavě byla úloha rovněž zadána). Neuvažujeme-li působení Měsíce, Slunce a dalších těles sluneční soustavy, potom na meteorit působí pouze gravitační síla Země. Silové působení meteoritu na Zemi lze zanedbat, neboť jeho hmotnost je vzhledem k hmotnosti Země nepatrná.

Gravitační pole Země je polem centrálním. Pohyb meteoritu bude tedy pohybem rovinným a plošná rychlost meteoritu bude během pohybu konstantní (2. Keplerův zákon). Předchozí tvrzení jsou důsledkem zákona zachování momentu hybnosti, který platí v každém centrálním poli (centrální síla má vůči centru pole nulový moment). Gravitační pole je konzervativní, pro jeho popis lze tedy užít potenciální energii, která je dána vztahem $-\frac{\kappa m M}{r}$. Z konstantnosti plošné rychlosti a ze zákona zachování mechanické energie je již možné určit, na jakou minimální vzdálenost se meteorit přiblíží k Zemi.

Označme M hmotnost Země, m hmotnost meteoritu a r vzdálenost meteoritu od středu Země. Rychlost meteoritu je výhodné rozložit do dvou směrů: do směru radiálního a do směru k němu kolmému. Velikost radiální složky označme v_r a velikost složky k ní kolmé v_φ (pokud bychom použili polární souřadnice, pak by platilo: $v_r = \frac{dr}{dt}$ a $v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}$). Pro velikost rychlosti meteoritu v potom platí vztah $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$. Plošnou rychlost w meteoritu můžeme vyjádřit jako $\frac{1}{2} r v_\varphi$. Ze zadaných údajů vyplývá, že $w = \frac{1}{2} a v_0$. Platí tedy:

$$a v_0 = r v_\varphi \Rightarrow v_\varphi^2 = v_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne následující rovnost:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left[v_r^2 + v_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] - \frac{\kappa m M}{r}$$

Vyjádříme-li z této rovnice v_r^2 , dostaneme vztah:

$$v_r^2 = v_0^2 \left[1 + \frac{2\kappa M a}{a v_0^2 r} - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]$$

V minimální vzdálenosti r_m meteoritu od středu Země platí, že $v_r = 0$ ($\frac{dr}{dt} = 0$). Minimální vzdálenost r_m tedy splňuje následující rovnici:

$$\frac{a}{r_m} = \frac{\kappa M}{av_0^2} + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2 M^2}{a^2 v_0^4}}$$

Vzdálenost r_m je skutečně minimální, neboť pro $\frac{a}{r} > \frac{a}{r_m}$ vychází $v_r^2 < 0$. Aby meteorit nezasáhl Zemi, musí platit, že $r_m > R$, kde R je minimální možná vzdálenost meteoritu, při které ještě nedojde k zasažení Země. Dosazením za r_m a úpravami předcházející nerovnosti získáme výslednou nerovnost mezi a a v_0 :

$$a > R \sqrt{1 + \frac{2\kappa M}{v_0^2 R}}$$

Jelikož již ve výšce 200 km nad povrchem Země obíhají družice, lze za hodnotu R zvolit poloměr Země, tedy $R = 6400$ km.

Použitelnost výsledku závisí na tom, v jaké vzdálenosti od Země jsou udány počáteční hodnoty v_0 a a . Pokud se jedná o vzdálenosti, které lze ve srovnání s R považovat za „nekonečné“ a ve kterých je gravitační síla Slunce kompenzována setrvačnou silou (soustava spojená se Zemí je neinerciální), potom za předpokladu, že se meteorit výrazně nepřiblíží k Měsíci, lze uvedenou nerovnost považovat za reálný výsledek. Gravitační síla Slunce je kompenzována setrvačnou silou zhruba do vzdáleností ≈ 1000000 km od Země.

Podobně lze určit minimální popř. maximální vzdálenost tělesa od centra pole i v jiných případech, kdy potenciální energie působících sil a plošná rychlost (moment hybnosti) tělesa jsou funkcemi pouze vzdálenosti r . Výhodou tohoto postupu je, že není třeba znát trajektorii pohybujícího se tělesa.

Úloha III.P ... západ Slunce

Máme 1 m dlouhou tyč zapíchnutou kolmo do země. Jak dlouhý stín bude mít tyč 2 h před západem Slunce? Určete, jak se bude lišit výsledek pro různé zeměpisné šířky a různá roční období.

K řešení této úlohy se dalo přistoupit několika způsoby. V nejjednodušším případě jste úlohu řešili pouze ve speciálních případech slunovratů a rovnodenností. V tom většinou nebyl větší problém a takovéto řešení bylo ohodnoceno jedním či dvěma body. Obecnější případ pak mohl být rozebrán buďto s pomocí tradičního a v literatuře popsaného zavedení obzorníkových a rovníkových souřadnic, a nebo s využitím vlastní nápaditosti. Ta byla po zásluze odměněna, nicméně je třeba říci, že řešení bylo často velmi těžce srozumitelné. Nyní postupujeme cestou přepočtu obzorníkových a rovníkových souřadnic.

Nejprve je třeba zamyslet se nad otázkou, co potřebujeme znát, abychom mohli spočítat délku stínu tyče. Je zřejmé, že znalost výšky Slunce nad horizontem v místě tyče právě dvě hodiny před západem je postačující. Označíme-li ji α , pak je hledaná délka stínu $d = l/\operatorname{tg}\alpha$, kde l je délka tyče (v našem případě $l = 1$ m). Ke snadnému výpočtu α je ale potřeba zavést rozumné souřadnice.

Polohu objektu na nebeské sféře můžeme přirozeně udat uvedením buďto tzv. obzorníkových souřadnic, nebo souřadnic rovníkových, přičemž v obou případech se jedná o dvě hodnoty (když pozorujeme vzdálené objekty, tak nevnímáme jejich vzdálenost, ale pouze směr, ve kterém je vidíme, a proto pro určení jejich polohy stačí udat pouze dvě úhlové souřadnice).

Obzorníkové souřadnice (h, A) nám říkají, že objekt je v místě pozorovatele vidět ve výšce h nad obzorem ($h = 0$ pro objekty na horizontu, $h = \pi/2$ pro objekty v zenitu) a azimut průmětu objektu na horizont je A . Azimut se zavádí jako úhel od směru na jih, narůstá pak ve směru hodinových ručiček (např. Polárka má v těchto souřadnicích v naší zeměpisné šířce $h \approx 50^\circ$, $A \approx 180^\circ$, u ostatních hvězd se ovšem obě tyto souřadnice s časem mění, v souladu s otáčením oblohy).

Rovníkové souřadnice si jako základ berou světový rovník, průmět zemského rovníku na nebeskou sféru. Světový rovník je tedy kružnice a my, jako pozorovatelé, se nacházíme v jejím středu. U objektu se pak určí výška nad rovinou rovníku (podobně jako se určovala h u obzorníkových

souřadnic) nazvaná deklinace δ a hodinový úhel t (obdoba azimutu u obzorníkových souřadnic), což je úhel měřený v rovině rovníku mezi směrem k průsečíku místního poledníku s rovníkem a směrem k průmětu objektu do roviny rovníku (kladný směr opět ve směru hodinových ručiček). (Bylo by velice zdravé si nakreslit příslušný obrázek, či si ho někde najít v literatuře.)

Je vidět, že naše α je právě h Slunce dvě hodiny před západem. Poloha Slunce se ovšem snadněji dá popsat v rovníkových souřadnicích. Zatímco se obě obzorníkové souřadnice Slunce v průběhu dne zřetelně mění (v čase navíc nerovnoměrně), u rovníkových souřadnic zůstává deklinace během dne takřka neměnná (její změna je způsobována až oběhem Země kolem Slunce, nikoli vlastní rotací Země; jarní rovnodennost: $\delta = 0^\circ$, letní slunovrat: $\delta = 23,5^\circ$ atd.) a hodinový úhel narůstá rovnoměrně v čase.

Na základě sférické geometrie lze odvodit přepočítání mezi rovníkovými a obzorníkovými souřadnicemi. Spočteme-li tedy rovníkové souřadnice Slunce ony dvě hodiny před západem a převedeme na obzorníkové, již snadno určíme délku stínu. Z geometrie vyplyne (viz např. Přehled astronomie, O. Hlad, J. Pavloušek), že platí přepočítání mezi souřadnicemi

$$\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos t ,$$

kde ϕ je zeměpisná šířka místa tyče. Z této rovnice lze vyjádřit hodinový úhel Slunce při západu, řekneme-li si, že Slunce zapadá při $h = 0$ (zřejmě $t_{zap} \in (0, \pi)$):

$$t_{zap} = \arccos \frac{-\sin \delta \sin \phi}{\cos \delta \cos \phi} .$$

Dvě hodiny před západem bude hodinový úhel $t_{zap} - \pi/6$ a tedy Slunce bude vysoko

$$h = \arcsin \left[\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \left(\arccos(-\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \phi) - \frac{\pi}{6} \right) \right] .$$

Toto je již vztah udávající výšku Slunce nad obzorem dvě hodiny před západem v závislosti na zeměpisné šířce a deklinaci Slunce. Deklinaci bychom mohli počítat ze znalosti pohybu Země kolem Slunce (např. aproximací skutečné dráhy kruhovou), ale spokojme se s myšlenkou, že si ji můžeme vyhledat ve hvězdářské ročence.

Je dobré povšimnout si, že t_{zap} existuje jen pokud je splněna podmínka $-(\frac{\pi}{2} - \phi) \leq \delta \leq (\frac{\pi}{2} - \phi)$. Pokud totiž splněna není, znamená to, že Slunce v daném místě nezapadá/nevychází.

Dále se též může stát, že h vyjde záporně. To je pak třeba interpretovat tak, že v daném místě je den kratší než dvě hodiny. Dvě hodiny před západem pak Slunce ještě nevyšlo a je pod obzorem.

Analýza výsledného vztahu, stejně jako výpočet délky stínu pro zajímavé úhly, je přenechána čitateli.

V řešení jsme se oprostili od dodatečných problémů způsobených refrakcí světla procházejícího atmosférou (tj., že Slunce vidíme skoro vždy o něco výše, než skutečně je). Tento nedostatek by ale mohl být snadno odstraněn (hlavním problémem úlohy byly operace se souřadnicemi, přičemž přesnost byla druhořadá). Někteří z vás i tuto opravu odůvodněně včlenili do svých řešení.

Úloha IV. 1 ... hokejista

Hokejista jede po ledě jen po jedné brusli. Led, který má hustotu $0,9 \text{ gcm}^{-3}$ pod bruslí taje do hloubky $h = 0,03 \text{ mm}$. Nůž brusle je široký $d = 2 \text{ mm}$. Skupenské teplo tání ledu je $\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$. Spočtete velikost třecí síly mezi bruslí a ledem. Tepelnou vodivost ledu zanedbejte.

Předpokládejme, že teplota tání ledu je stejná jako teplota okolního prostředí. Dále budeme předpokládat, že hokejista se po ledě pohybuje rovnoměrně a zanedbáme ohřev brusle.

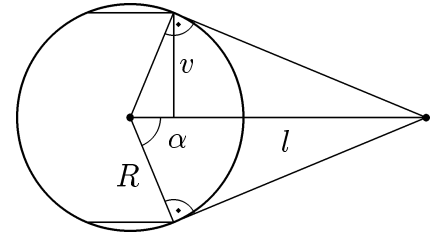
Pokud ujede dráhu s , pak třecí síla F_t vykoná práci $W = F_t s$. Tato práce bude rovna energii potřebné ke skupenské přeměně ledu o hmotnosti m , kde $m = d h s \rho$. Získáme tedy vztah $E = m \lambda = d h s \rho \lambda = F_t s = W$ a tedy $F_t = d h \rho \lambda$. Po dosazení získáme výsledek $F_t = 17,82 \text{ N} \doteq 18 \text{ N}$.

Úloha IV.2 ... družice

Špionážní družice létá okolo nepřátelské planety po kruhové dráze v rovníkové rovině. Doba jednoho oběhu je T , planeta má hustotu ρ . Na jak velké části povrchu planety může družice provádět špionáž?

Plocha, kterou vidí družice je kulový pás (koule bez dvou vrchlíků ležících proti sobě). Povrch kulového pásu se počítá $S_v = 2\pi r h$, kde h je výška pásu. V našem případě $h = 2v$ (viz obr. 20). Vyjádříme si jakou část povrchu vidíme:

$$p = \frac{4\pi r v}{4\pi r^2} \cdot 100\% = \frac{v}{r} \cdot 100\% = \sin \alpha \cdot 100\%$$



Obr. 21

Z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku vidíme, že :

$$\cos \alpha = \frac{r}{l},$$

r/l určíme z rovnosti sil pro kruhovou dráhu. Odstředivá síla F_o se rovná síle gravitační F_g :

$$m\omega^2 l = \kappa \frac{mV\rho}{l^2},$$

kde V je objem planety a ρ její hustota. Objem si můžeme vyjádřit pomocí poloměru planety r jako $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Úhlovou rychlost ω určíme z doby oběhu $\omega = (2\pi)/T$. Po dosazení a vykrácení m :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi \kappa \rho \left(\frac{r}{l}\right)^3$$

odtud vyjádříme $\cos \alpha = r/l$:

$$\cos \alpha = \frac{r}{l} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\kappa \rho T^2}}$$

Víme, že $p = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$:

$$p = \sqrt{1 - \left(\frac{3\pi}{\kappa \rho T^2}\right)^{2/3}} \cdot 100\%$$

Kdyby $\kappa \rho T^2 < 3\pi$, potom $l < r$, kde r je poloměr nepřátelské planety. Víme však, že na družici může působit koule o poloměru max. l (družice nemůže létat pod povrchem planety).

Tohle řešení platí pouze pro družici, která má úhlovou rychlost oběhu jinou, než je úhlová rychlost rotace planety. Je-li však družice stacionární, potom nevidí kulový pás, ale jenom kulový vrchlík. Jeho povrch se počítá $S_v = 2\pi r h$, kde h je výška vrchlíku. V našem případě je výška vrchlíku $h = r(1 - \cos \alpha)$. Pro poměr potom dostaneme:

$$p = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} \cdot 100\% = \frac{h}{2r} \cdot 100\% = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \cdot 100\%$$

Po dosazení už známého $\cos \alpha$ dostaneme výsledek pro tento případ:

$$p = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\kappa \rho T^2}}\right) \cdot 100\%$$

Úloha IV.3 ... tyč ve vodě

Tyč o hustotě ϱ_1 a délce l je za jeden konec pohyblivě připevněna k vodorovné hrazdě (tak, že se okolo ní může tyč volně otáčet), druhý konec volně visí. Pokud budeme pomalu spouštět hrazdu dolů, bude se tyč přibližovat k hladině vody ($\varrho > \varrho_1$) a začne se do ní ponořovat. Zjistěte závislost úhlu, který svírá tyč se svislým směrem, na výšce hrazdy nad hladinou.

Řešme problém pro situaci, když se nám tyč dotkne vody a noří se, dokud se hrazda nedotkne vody. Předtím je samozřejmě úhel vychýlení nulový a chování tyče pod vodou už zadání nevyžaduje, i když iniciativě se meze nekladou, ale body jsme za to nedávali.

Koumák by mohl říci, že tyč se nevychýlí během celého ponořování, protože vztlaková síla je kompenzována reakční silou hrazdy. To však není zajímavé, a proto správný fykosák přemýšlí jinak: zanořením tyče vzroste vztlaková síla natolik, že poloha tyče se stane labilní (při malém vychýlení se už tyč nevrátí zpátky). V reálném životě neexistují ideální podmínky, proto úhel vychýlení nebude nulový.

První a nejdůležitější věc je přijít na to, že když se tyč otáčí kolem pevné osy, je třeba použít momentové věty. Mnozí z vás na to nepřišli. Když ponořujeme tyč pomalu, tak si zidealizujeme úlohu předpokladem, že v každém okamžiku je tyč v rovnováze, což znamená, že celkový moment sil je nulový. Na tyč působí moment M_{F_t} tíhové síly a moment M_{F_v} vztlakové síly, který je opačného směru. Označme si délku neponořené části tyče l' , výšku hrazdy nad hladinou h , S plochu půdorysu tyče a úhel vychýlení od svislého směru α . Dle nulového momentu sil platí:

$$\begin{aligned} 0 &= M_{F_t} - M_{F_v} \\ M_{F_t} &= F_g \frac{l}{2} \sin \alpha \\ M_{F_v} &= F_v \frac{l+l'}{2} \sin \alpha \\ F_v &= S \varrho (l-l') g \\ F_g &= S \varrho_1 \frac{l}{2} g \\ \cos \alpha &= \frac{h}{l'} \end{aligned}$$

Dosazením, vykrácením a upravením dostaneme požadovanou závislost

$$\alpha = \arccos \left(\frac{h}{l} \sqrt{\frac{1}{1 - \varrho_1/\varrho}} \right) \quad (9)$$

Výraz pod odmocninou je dle zadání vždy kladný, přesto tento vztah neplatí pro libovolné h . Na začátku, když je h velké, je moment síly gravitační větší než moment síly vztlakové, proto je poloha $\alpha = 0$ stabilní pro $h \in \langle l\sqrt{1 - \varrho_1/\varrho}; l \rangle$, a pro $h \in \langle 0; l\sqrt{1 - \varrho_1/\varrho} \rangle$ platí vztah (9).

Úloha IV.4 ... zima a léto

Spočtete, o kolik procent se bude lišit teplota na Zemi v periheliu, kdy je Země od Slunce vzdálena r , od teploty v aféliu, kdy je vzdálenost Země–Slunce $r(1 + \varepsilon)$ nepatrně větší. Předpokládejte, že Země je dokonale černé těleso a v každém okamžiku je v rovnováze s okolím. Celkový vyzářený výkon je úměrný σT^4 .

Řešení byla převážně správná, což vypovídá buď o jednoduchosti úlohy, nebo o zdatnosti řešitelů. Ať je to jakkoliv, dovoluje nám to uvést vzorové řešení poměrně stručně.

Ze zadání budeme předpokládat, že Země je absolutně černé těleso v rovnováze s okolím. Tedy vyzařuje stejné množství energie, jako přijímá. Vyjdeme ze Stefan-Bolzmannova zákona $M_e = \sigma T^4$, který charakterizuje intenzitu tepelného záření černého tělesa (σ je Stefan-Bolzmannova konstanta a T je termodynamická teplota černého tělesa).

Země svým povrchem vyzáří za jednotku času výkon $M_e S$, kde povrch Země $S = 4\pi R_z^2$. Zároveň přijme za jednotku času od Slunce tepelný výkon $P \cdot (\pi R_z^2)/(4\pi r^2)$, kde P je zářivý výkon

Slunce, R_z je poloměr Země a r je vzdálenost Země od Slunce. Tento vztah tedy udává jaká část tepelného výkonu Slunce připadne na Zemi.

Z rovnosti výše uvedených tepelných výkonů za jednotku času si vyjádříme M_e a dosadíme jej do Stefan-Bolzmannova zákona, odkud dostaneme vztah pro T :

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{16\pi\sigma r^2}} \quad (10)$$

Dále si přepíšeme vzdálenosti Země od Slunce pomocí délky hlavní poloosy oběžné dráhy Země a a numerické excentricity e (kterou můžeme nalézt (narozdíl od ε) v tabulkách) jako

$$r = r_p = a(1 - e) \quad \text{a} \quad r(1 + \varepsilon) = r_a = a(1 + e).$$

Označíme-li T_p (T_a) teplotu na povrchu Země v periheliu (aféliu) a dosadíme za r do (10), dostaneme již požadovanou teplotní odchylku ΔT , kterou si ještě upravíme tak, aby nám vyšla v procentech:

$$\Delta T = \left(1 - \frac{T_a}{T_p}\right) \cdot 100 \% = \left(1 - \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\right) \cdot 100 \% \doteq e \cdot 100 \%$$

Pro tabulkovou hodnotu $e = 0,01671$ dostaneme hodnotu $\Delta T = 1,6\%$; vyjádříme-li ΔT pomocí ε , vyjde $\varepsilon/2 \cdot 100 \%$.

Úloha IV . P ... v baloně

Vzduch v horkovzdušném balonu je zahříván konstantním příkonem, aby se vyrovnaly tepelné ztráty a balon letěl stále ve stejné výšce. Průměrná teplota vzduchu v balonu je $t = 57^\circ\text{C}$, teplota okolního vzduchu je $t_0 = 17^\circ\text{C}$. Tlak vzduchu v balonu je roven okolnímu tlaku. Pokud zvýšíme příkon hořáku tak, aby teplota v balonu vzrostla o $\Delta t = 0,1^\circ\text{C}$, o kolik se změní výška letu balonu?

Označme m_z celkovou hmotnost balonu (bez vzduchu), V celkový objem balonu, ϱ hustotu okolního vzduchu a ϱ_b hustotu horkého vzduchu v balonu. Objem horkého vzduchu v balonu je prakticky roven V . Pro výslednou sílu F , která působí na balon, potom platí (považujeme-li směr vzhůru za kladný):

$$F = (\varrho - \varrho_b) V g - m_z g \quad (11)$$

Teplota T' okolního vzduchu v troposféře závisí lineárně na výšce h : $T' = T_0 + ah$, kde $a = -6,5 \text{ mK m}^{-1}$. Teplotu horkého vzduchu v balonu označme T . Tlak p okolního vzduchu je stejný jako tlak horkého vzduchu. Hustoty ϱ a ϱ_b vyjádříme pomocí stavové rovnice ideálního plynu následovně:

$$\varrho = \frac{pM_m}{R_m T'} \quad \varrho_b = \frac{pM_m}{R_m T} \quad (12)$$

Protože hmotnost m_z je během letu prakticky stálá, je pro rovnovážné polohy balonu rozdíl $\varrho - \varrho_b$ konstantní. Změní-li se tedy teplota T o Δt , potom se výška h změní o Δh a platí:

$$\frac{pM_m}{R_m T'} - \frac{pM_m}{R_m T} = \frac{(p + \Delta p) M_m}{R_m (T' + a\Delta h)} - \frac{(p + \Delta p) M_m}{R_m (T + \Delta t)} \quad (13)$$

Pro malé změny výšky h lze změnu tlaku Δp vyjádřit jako $-\varrho g \Delta h = -\frac{pM_m}{R_m T'} g \Delta h$. Dosadíme-li toto vyjádření změny tlaku do rovnice (13), pak získáme vztah:

$$\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} = \left(1 - \frac{M_m g \Delta h}{R_m T'}\right) \left(\frac{1}{T' + a\Delta h} - \frac{1}{T + \Delta t}\right)$$

Úpravami tohoto vztahu a zanedbáním členů obsahujících součin dvou diferencí (Δt a Δh jsou malé) dostaneme:

$$\Delta h = \frac{T'^2 \Delta t}{\frac{M_m g}{R_m} T (T - T') + a T^2} \quad (14)$$

Po dosazení konkrétních hodnot do vztahu (14) dostaneme, že $\Delta h = -33$ m, což je poněkud divné. Vztah (14) není zcela správný. Uvedený vzorec totiž popisuje, jak se mění výška rovnovážné polohy balonu se změnou teploty vzduchu, který je v něm obsažen. Podíváme-li se však na vztah (11), potom zjistíme, že při ohřátí vzduchu v balonu se balon začne vždy pohybovat směrem nahoru. V našem případě je to však směrem od rovnovážné polohy - to znamená, že balon je v labilní poloze. Kde se tedy balon zastaví a za jakých podmínek lze užít vztah (14)?

Má-li být původní poloha stabilní, potom výraz $\varrho - \varrho_b$ musí s rostoucí výškou klesat. Hustoty ϱ a ϱ_b jsou závislé na tlaku p , který závisí na výšce h . Pro závislost tlaku p okolního vzduchu na výšce h lze odvodit vzorec:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{ah}{T_0} \right)^{-\frac{M_m g}{R_m a}}$$

Dosadíme-li předcházející výraz za tlak p do vztahů (12), potom derivací zjistíme, že podmínka poklesu $\varrho - \varrho_b$ s růstem h je ekvivalentní s nerovností:

$$\frac{T'}{T} < 1 + \frac{R_m a}{M_m g} \quad (15)$$

V případě stabilní polohy lze pro výpočet změny výšky použít vztah (14). V tomto případě se balon chová tak, jak bychom očekávali ($\frac{\Delta h}{\Delta t} > 0$).

Co se však stane s balonem, jehož parametry odpovídají zadání úlohy? Budeme-li stále udržovat konstantní teplotu T , potom od jisté výšky h začne vztah (15) platit. To znamená, že od této výšky začne být rozdíl $\varrho - \varrho_b$ klesající. Nejspíše tedy bude existovat nějaká stabilní rovnovážná poloha balonu nad touto výškou. Pro hodnoty $T_0 = 293$ K $p_0 = 0,1$ MPa vychází, že se balon ustálí ve výšce $h = 8280$ m. Takto to však dopadne pouze v ideálním případě. Skutečná závislost T' na h není obecně lineární a mohou tedy existovat oblasti, kde T' klesá pomaleji s rostoucí výškou popř. i roste. Mohlo by se tedy stát, že by se balon ustálil v nějaké takové oblasti. Balón také může začít nezadržitelně padat k zemi, neboť je v labilní poloze. K tomu stačí pouze malý pokles teploty T horkého vzduchu.

Úloha V.1 ... jehla na vodě

Určete maximální průměr ocelové jehly, která se ještě udrží na vodní hladině. Jehla je pokryta tenkým olejovým filmem, aby ji voda nesmáčela. Znáte hustotu oceli, vody a povrchové napětí vody. Pokud řešení problému závisí na délce jehly, pokládejte ji za známou a diskutujte její vliv.

Jehlu považujeme za válec o výšce l a poloměru r , přičemž platí $l \gg r$. Hustotu oceli, z které je jehla vyrobena, označme ϱ_o a hustotu vody ϱ . Povrchová napětí značme: rozhraní voda-vzduch $\sigma_1 = \sigma$, voda-jehla σ_2 a vzduch-jehla σ_3 .

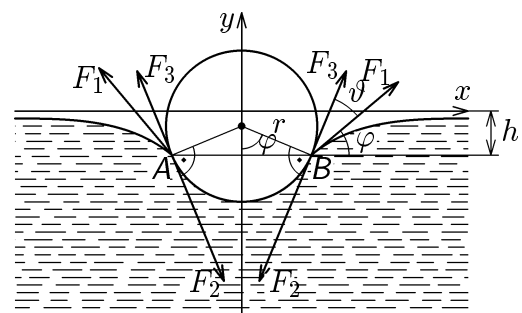
Situace, kdy se jehla drží na vodní hladině, je nakreslena na obr. 22 — řez rovinou kolmou na osu jehly. Tíha jehly G je kompenzována výslednicí sil F , kterými na jehlu působí voda a vzduch. Jsou to jednak tlakové síly působící na povrch jehly a jednak povrchové síly působící v bodech A a B. Tlakové síly jsou způsobeny hydrostatickým tlakem a zakřivením rozhraní voda-jehla a vzduch-jehla.

My ukážeme, že výsledek ovlivní podstatně pouze rozhraní voda-vzduch. Z podmínek rovnováhy v bodech A a B lze pro úhel ϑ odvodit:

$$F_1 \cos \vartheta + F_3 = F_2 \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1}$$

Příspěvek F_p povrchových sil k celkové výslednici F tedy činí:

$$F_p = -2F_1 \sin \vartheta \cos \varphi = -2l\sigma_1 \sin \vartheta \cos \varphi$$



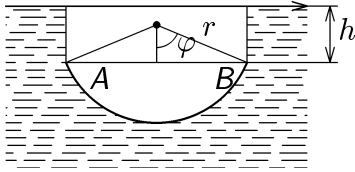
Obr. 22

Výslednice F_{k1} tlakových sil způsobených zakřivením rozhraní voda-jehla je dána vztahem:

$$F_{k1} = 2l\sigma_2 \sin \varphi$$

Podobně lze spočítat i výslednici F_{k2} tlakových sil způsobených zakřivením rozhraní vzduch-jehla:

$$F_{k2} = -2l\sigma_3 \sin \varphi$$



Obr. 23

Výslednici hydrostatických tlakových sil působících na jehlu mezi body A a B označme F_h . Tuto sílu je možné spočítat následujícím „trikem“: Uvažme těleso, jehož řez rovinou rovnoběžnou s podstavami je zobrazen na obr. 23. Výsledná vztlačová síla působící na toto těleso je rovna výslednici tlakových sil působících na plochu mezi body A a B. Tato výslednice je však rovna F_h . Pro F_h tedy platí:

$$F_h = \left[2hr \sin \varphi + \left(\frac{2\varphi}{2\pi} \pi r^2 - \frac{1}{2} 2r \sin \varphi r \cos \varphi \right) \right] l \rho g$$

Pro výslednou sílu F tak dostáváme vztah:

$$F = F_h + F_{k1} + F_{k2} + F_p = 2l [(\sigma_2 - \sigma_3) \sin \varphi - \sigma_1 \sin \vartheta \cos \varphi] + \left[2hr \sin \varphi + r^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] l \rho g$$

Využijeme-li vztahu pro $\cos \vartheta$, lze předchozí rovnici upravit na následující tvar:

$$F = 2l\sigma \sin(\varphi - \vartheta) + \left[2hr \sin \varphi + r^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] l \rho g$$

Z toho vidíme, že rozhraní voda-jehla a vzduch-jehla rovnováhu ovlivňují prostřednictvím úhlu ϑ , v případě, že voda jehlu dokonale nesmáčí ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\vartheta = 0$), rovnováhu neovlivňují vůbec. Síla F je v případě rovnovážné polohy jehly rovna tíze jehly G , která je dána vztahem:

$$G = \pi l r^2 \rho_0 g$$

Zbývá ještě určit hodnotu h . Je-li R poloměr křivosti vodní hladiny, potom zakřivení hladiny způsobí v tomto místě tlak, který je roven $\frac{\sigma}{R}$. Tento tlak je kompenzován hydrostatickým tlakem. Funkce $y(x)$, která popisuje tvar vodní hladiny, tedy splňuje tuto diferenciální rovnici:

$$\frac{\sigma y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = y \rho g$$

Tato rovnice nezávisí explicitně na x . Položme tedy $z = y(x)$ a $y' = p(z) = p(y(x))$. Funkce $p(z)$ musí řešit rovnici:

$$\frac{p'p}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho g}{\sigma} z$$

Separací proměnných získáme rovnost:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = C - \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} z^2$$

Konstantu C určíme z okrajových podmínek. Pro $y \rightarrow 0$ je i $y' \rightarrow 0$. To znamená: $z \rightarrow 0 \Rightarrow p(z) \rightarrow 0$ a tedy $C = 1$. V bodě B platí: $y' = p(-h) = \operatorname{tg}(\varphi - \vartheta)$. Dostáváme tak následující vyjádření pro h :

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g} [1 - \cos(\varphi - \vartheta)]}$$

Z vyjádření h a F plyne, že maximální hodnota síly F nastává pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\vartheta = 0$ (voda jehlu dokonale nesmáčí). Pro maximální poloměr r_m jehly, při kterém se jehla ještě udrží na hladině, platí:

$$\pi r_m^2 \rho_o g = 2\sigma + 2r_m \sqrt{2\sigma \rho_o g} + \frac{\pi}{2} r_m^2 \rho_o g$$

Vyřešením této rovnice získáme výsledný vztah pro maximální průměr jehly:

$$d_m = \frac{4\sqrt{\sigma/g}}{\pi(2\rho_o - \rho)} \left[\sqrt{2\rho} + \sqrt{2\pi\rho_o - (\pi - 2)\rho} \right]$$

Číselně vychází $d_m = 2,0$ mm. Pokud bychom neuvažovali hydrostatický tlak, pak by výsledný vzorec vypadal následovně (do předchozího vzorce stačí dosadit $\rho = 0$):

$$d_m = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi\rho_o g}}$$

Číselně potom vychází $d_m = 1,6$ mm.

Ve skutečnosti však bude d_m o něco menší, neboť při $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je jehla v nestabilní poloze (pokud se úhel φ zvětší, potom se jehla definitivně potopí). Pokládáme-li jehlu na vodní hladinu, potom maximální průměr jehly musí být také menší, neboť při úhlech φ blízkých $\frac{\pi}{2}$ snadno dojde k porušení povrchové vrstvy vody.

Uvedené výsledky platí za předpokladu $l \gg r$. Předměty nazývané jehla tento předpoklad obvykle splňují. Pokud by jevy vznikající na koncích jehly nešlo zanedbat, potom bychom tento problém nemohli převést do roviny a řešení by bylo podstatně komplikovanější.

Závěrem ještě několik slov k došlým řešením. Častou chybou bylo opomenutí faktu, že povrchové síly působí po obou stranách jehly (ve vzorcích chyběly dvojky). Některá řešení (hlavně obrázky) nerespektovala, že povrchové síly mají vždy směr tečný k povrchové bláně. Hodnotu h spočítali pouze dva řešitelé, přičemž jeden z nich chybným postupem dostal kupodivu správný výsledek. Ostatní řešitelé pro vztlakovou sílu (pokud ji uvažovali) většinou používali vyjádření $\frac{1}{2}\pi r^2 l \rho_o g$ nebo $\pi r^2 l \rho_o g$. Druhý vztah je však obecně chybný. Neumíme-li určit h , potom můžeme pouze říci, že v případě $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je vztlaková síla větší než $\frac{1}{2}\pi r^2 l \rho_o g$ ($h > 0$). Z toho lze potom určit minimální hodnotu d_m .

Úloha V.2 ... dvě láhve

Dvě láhve, jednu plnou vody a jednu prázdnou, necháme kutálet po nakloněné rovině. Která se skutálí rychleji? Pokud ty samé láhve vyšleme se stejnou počáteční rychlostí po nakloněné rovině nahoru, která se dokutálí výše?

K vyřešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Označme m_0 hmotnost láhve, m hmotnost vody v plné láhvi, J moment setrvačnosti prázdné láhve vůči těžišti a r její poloměr. Kinetická energie prázdné láhve je rovna součtu kinetické energie translačního a rotačního pohybu. Tedy:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2}m_0 v_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \left(m_0 + \frac{J}{r^2} \right) v_1^2$$

Kinetická energie plné láhve je rovna kinetické energii prázdné láhve a energii translačního pohybu vody v ní — voda nebude rotovat, pokud vodu považujeme za ideální kapalinu a tedy tření mezi ní a stěnami láhve za nulové. Reálná kapalina sice tyto vlastnosti nemá, ale úhlová rychlost rotace vody bude řádově menší než úhlová rychlost rotace láhve. Tedy:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2}(m_0 + m)v_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \left(m_0 + m + \frac{J}{r^2} \right) v_2^2$$

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu - označme výšku nakloněné roviny h , její délku l . Čas potřebný k tomu, aby láhev dosáhla paty nakloněné roviny, lze vypočítat ze vztahu pro rovnoměrně

zrychlený pohyb $vt/2 = l$, kde v je konečná rychlost láhve. Tedy t je nepřímo úměrné konečné rychlosti v . Užitím vzorce pro potenciální energii ($E_{p,1} = m_0hg$, $E_{p,2} = (m_0 + m)hg$) získáme:

$$v_1^2 = \frac{2m_0r^2}{m_0r^2 + J}hg$$

$$v_2^2 = \frac{2(m_0 + m)r^2}{(m_0 + m)r^2 + J}hg$$

Zřejmě $v_2 > v_1$ a tedy k patě nakloněné roviny dříve dorazí plná láhev.

Nyní vypočteme, která láhev vystoupí výše. Užitím vztahu pro kinetickou energii a potenciální energii získáme:

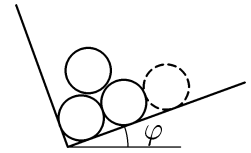
$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \frac{J}{m_0r^2} \right)$$

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \frac{J}{(m_0 + m)r^2} \right)$$

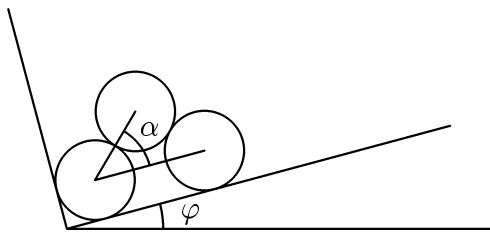
Zřejmě $h_1 > h_2$ a tedy prázdná láhev vystoupí výše.

Úloha V.3 ... nákladní auto

Nákladní auto bylo naloženo stejnými hladkými kládami. Před jejich vykládkou zastavilo tak, že pravými koly stojí o poznaní výše než levými (příslušná přední a zadní kola jsou ovšem ve stejné výšce). Řekněme, že rovina nákladního prostoru svírá s horizontální rovinou úhel φ (viz obrázek 24). Po vykládce zbyly na autě tři klády tak, jak je na obrázku nakresleno plnou čarou. Na jakou hodnotu by se musel snížit úhel φ , aby se klády přeuspořádaly tak, že by ležely vedle sebe? Jakékoli tření zanedbejte.



Obr. 24



Obr. 25

Úloha se dala v podstatě řešit buďto analýzou a rozkladem sil (čehož využila naprostá většina z vás), nebo pomocí úvah o energii. Využijme zde druhého přístupu:

Nulovou výšku přiřadíme středu klády v rohu. Průměr klády nechtě je d , hmotnost m . Potenciální energie prostřední klády je $mgd \sin(\alpha + \varphi)$, potenciální energie klády vpravo $2mgd \cos \alpha \sin \varphi$. Aby se klády přeuspořádaly, musí být celková potenciální energie pro $\forall \alpha \in (0; \pi/3)$ menší než pro $\alpha = \pi/3$.

K tomu musí nutně být v $\alpha = \pi/3$ E_p klesající s klesajícím α . Spočteme tedy derivaci $\partial E_p / \partial \alpha$ a položíme podmínku $\partial E_p / \partial \alpha > 0$.

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = mgd[\cos(\alpha + \varphi) - 2 \sin \alpha \sin \varphi] > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \cotg \varphi > 3 \operatorname{tg} \alpha$$

Tuto podmínku musíme splnit pro $\alpha = \pi/3$, tím ji ale splníme i pro ostatní α . Úhel sklonu tedy musí klesnout na $10^\circ 54'$.

Úloha V.4 ... kulička a nakloněná rovina

Dokonale pružnou ocelovou kuličku spustíme z výšky h (měřeno od místa dopadu) na nakloněnou rovinu, svírající s vodorovnou rovinou úhel α . Ve vzdálenosti d od místa dopadu kuličky (ve směru klesání roviny) je svislá stěna. Určete, jak vysoko (nad místem dopadu) v ní musíme udělat otvor, aby jím kulička proletěla. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $h = 50$ cm, $d = 15$ cm, $\alpha = 15^\circ$. Diskutujte pohyb kuličky v případě, že nakloněná rovina je nekonečná a kulička nic v cestě nestojí.

Nejdříve bychom se chtěli omluvit za menší nejasnost v zadání. Písmenem d byla označena horizontální vzdálenost místa dopadu a svislé stěny, tj. vzdálenost měřená na kolmici k této stěně. Některí řešitelé pochopili zadání jinak a pod symbolem d si představovali vzdálenost místa dopadu k nejbližšímu průsečíku svislé stěny a nakloněné roviny. Za toto špatné pochopení jsme samozřejmě body nestrhávali.

Teď se podívejme, jak měla být úloha správně vyřešena, pokud pod písmenem d rozumíme první z výše uvedených možných významů. Kulička dopadne na nakloněnou rovinu svisle, úhel dopadu bude α . Pod stejným úhlem se i odrazí, takže nyní bude směr rychlosti kuličky svírat s vodorovnou rovinou úhel $90^\circ - 2\alpha$. Teď už stačí použít známé vzorce pro šikmý vrh:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t \cos(90^\circ - 2\alpha) \\y &= v_0 t \sin(90^\circ - 2\alpha) - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Počátek souřadnic jsme umístili do místa dopadu kuličky. Zde uvedenou rychlost odrazu v_0 snadno vypočteme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh, v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Ještě než provedeme další výpočty, můžeme si život ulehčit použitím známých vztahů pro goniometrické funkce:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - 2\alpha) &= \sin(2\alpha) \\ \sin(90^\circ - 2\alpha) &= \cos(2\alpha).\end{aligned}$$

Nyní již můžeme vypočítat přímo neznámou výšku l , jedná se totiž o souřadnici y v čase t_l , kdy se x rovná d .

$$\begin{aligned}t_l &= \frac{d}{v_0 \sin(2\alpha)} \\ l &= \frac{dv_0 \cos(2\alpha)}{v_0 \sin(2\alpha)} - \frac{gd^2}{2v_0^2 \sin^2(2\alpha)} \\ l &= d \cotg(2\alpha) - \frac{d^2}{4h \sin^2(2\alpha)}.\end{aligned}$$

Numericky pak vychází $l = 21,5$ cm.

Teď uvažujme případ, kdy je nakloněná rovina nekonečná a kulička nic nestojí v cestě. Práci si velice zjednodušíme, pokud si zavedeme novou soustavu souřadnic. Počátek umístíme opět do místa prvního dopadu kuličky, osa X bude ležet na nakloněné rovině ve směru jejího největšího spádu a osa Y bude na ni kolmá, přičemž místo, odkud byla kulička původně vypuštěna, bude ležet v rovině XY . Toto místo pak bude mít zápornou souřadnici X , zatímco jeho souřadnice Y bude kladná. Nyní si rozložíme pohyb do směru X a Y . Tíhové zrychlení pak bude mít dvě složky

$$\begin{aligned}g_X &= g \sin \alpha \\ g_Y &= -g \cos \alpha.\end{aligned}$$

Pohyb ve směru X bude po celou dobu rovnoměrně zrychlený

$$X = v_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

Ve směru Y bude situace o něco složitější. Pokaždé, když kulička dopadne na nakloněnou rovinu, změní svou rychlost ve směru Y na opačnou, takže bude skákat s periodou $T = 2v_0/g = 2\sqrt{2h/g}$. Vzorcem to můžeme vyjádřit takto:

$$Y = v_0(t \bmod T) \cos \alpha - \frac{1}{2}g(t \bmod T)^2 \cos \alpha.$$

Hodnotu funkce $t \bmod T$ vypočítáte, pokud budete od t neustále odečítat T , a teprve když dostanete číslo menší než T , tak s odečítáním skončíte. Z diskuze je zřejmé, že vzdálenost kuličky od nakloněné roviny se bude neustále periodicky měnit od nuly do $h \cos \alpha$ a zpět.

Úloha V. P ... nabitá koule

Mějme rovnoměrně nabitou kovovou kulovou slupku s poloměrem R a s celkovým nábojem Q . Rozřízneme ji na dvě části rovinou, která je od středu koule vzdálena $d < R$. Úkolem je spočítat sílu, jakou se obě části budou odpuzovat, dokud jsou velmi blízko sebe.

Když jsou obě části velmi blízko sebe, bude náboj na slupce rozložen rovnoměrně, plošná hustota náboje bude

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Ze symetrie je zřejmé, že síla bude mít směr kolmý k rovině řezu. Určeme nyní sílu F_0 , která působí na velmi malou část slupky o ploše S_0 . Tato síla je jistě kolmá na tuto část slupky a má velikost

$$F_0 = S_0 \sigma E_0,$$

kde E_0 je velikost intenzity pole vytvářeného zbytkem slupky.

Vidíme, že se jedná o analogii s tlakovým působením (síla je kolmá na plošku a její velikost je přímo úměrná velikosti plošky) o tlaku $p = \sigma E_0$. Celková síla je tedy úměrná velikosti plochy řezu. Celková odpudivá síla má velikost

$$F_{celk} = S_{řezu} \sigma E_0,$$

kde $S_{řezu}$ určíme pomocí Pythagorovy věty

$$S_{řezu} = \pi(R^2 - d^2).$$

Nyní zbývá pouze určit velikost elektrické intenzity, kterou vyvolává zbytek slupky v místě plošky S_0 . Intenzita elektrického pole těsně nad povrchem slupky je

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

a uvnitř slupky je nulová. To znamená, že velikost intenzity vyvolané ploškou S_0 a zbytkem slupky je stejná (uvnitř slupky mají opačné znaménko). Intenzita vyvolaná zbytkem slupky je tedy polovina celkové intenzity

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Velikost celkové odpudivé síly je

$$F_{celk} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \pi(R^2 - d^2) = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon R^2} \frac{(R^2 - d^2)}{R^2}.$$

Úloha VI. 1 ... plyn v láhvi

Uzavřená nádoba obsahující ideální plyn se pohybuje rychlostí v . Náhle se nádoba zastaví a veškerá kinetická energie plynu se změní v teplo. Zanedbejte teplo předané stěnám a spočítejte, o kolik se zvětší druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul plynu, je-li plyn

- a) jednoatomový
- b) dvouatomový.

Zdůvodněte rozdílné výsledky v případech a) a b).

Střední kvadratická rychlost je definována jako odmocnina ze střední hodnoty kvadrátu rychlosti, lze pro ni odvodit následující vztah:

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (16)$$

kde k je Boltzmannova konstanta ($k \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$), m_0 hmotnost molekuly a T termodynamická teplota.

Jedna molekula plynu má při teplotě T střední kvadratickou energii

$$U = \frac{i}{2}kT, \quad (17)$$

kde i je počet stupňů volnosti. Pro jednoatomové molekuly (He , Ne , ...) je $i = 3$ (k popisu hmotného bodu jsou třeba tři nezávislé souřadnice), pro dvouatomové molekuly (H_2 , N_2 , O_2 , ...) je $i = 5$ (3 + dvě osy rotace, třetí osa se "nepočítá" — energie rotace kolem osy symetrie je zanedbatelná). Z (17) dostáváme pro $k\Delta T$ vztah

$$k\Delta T = \frac{2\Delta U}{i}$$

a podobně z (16) dostaneme

$$k\Delta T = \frac{m_0}{3}\Delta(v_k^2).$$

Srovnáním těchto dvou vztahů získáme pro $\Delta(v_k^2) = v_{k2}^2 - v_{k1}^2$ výsledek

$$\Delta(v_k^2) = \frac{6\Delta U}{im_0}.$$

Změna vnitřní energie ΔU (přepočtená na jednu molekulu) je rovna $\frac{1}{2}m_0v^2$ a tedy

$$\Delta(v_k^2) = \frac{3}{i}v^2.$$

Správná odpověď je, že střední kvadratická rychlost se změní v případě a) o v^2 , v případě b) o $\frac{3}{5}v^2$. Rozdílnost výsledku je způsobena tím, že v případě b) se dodaná energie spotřebovává nejen na změnu translační energie molekuly, ale i na změnu rotační energie.

Několik poznámek k došlým řešením:

- Častou chybou byl zápis zákona zachování energie ve tvaru:

$$\frac{1}{2}m_0v_{k1}^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v_{k2}^2,$$

či podobném. Tento vztah je pro více atomů v molekule CHYBNÝ, protože v_k charakterizuje pouze pohyb posuvný (translaci) a případnou rotaci molekuly nebere v úvahu. Z tohoto vztahu vychází $\Delta(v_k^2) = v^2$ pro libovolně složitou molekulu.

• Pár vztahů které vám příště mohou usnadnit upravování vzorečků: Boltzmannova, molární plynová a Avogadrova konstanta jsou svázány vztahem

$$kN_A = R.$$

Budeme-li uvažovat veličinu C_v (C_p), což je molární tepelná kapacita při stálém objemu (tlaku), $[C_v] = [C_p] = \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$, která je svázána s měrnou tepelnou kapacitou c_v (c_p), $[c_v] = [c_p] = \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, vztahem $c_vM_m = C_v$ ($c_pM_m = C_p$), pak pro ideální plyn platí:

$$C_v = \frac{i}{2}R$$

$$C_p = R + C_v.$$

Úloha VI.2 ... dipól v magnetickém poli

Mějme elektrický dipól (představte si ho jako dvě částice se stejnými hmotnostmi m a náboji $+q$ a $-q$ upevněné na koncích nehmotné tyčky délky l). Otáčí se v horizontální rovině okolo vertikální osy procházející středem dipólu. Popište pohyb dipólu poté, co zapneme konstantní vertikální magnetické pole B .

Na úvod je třeba říci, že analytické řešení je velmi složité a velmi pomohou znalosti teoretické mechaniky. Asi nejlepší je podívat se na chování dipólu vhodným numerickým modelem a provést počítačovou simulaci. Z této simulace můžeme získat představu o pohybu dipólu a posléze fyzikálními úvahami získat konkrétní čísla. My se budeme zabývat pouze speciálním případem, který je snadno řešitelný.

Nejprve se ale zamysleme nad tím, které veličiny se v magnetickém poli zachovávají. Bez pole by to byla energie, hybnost a moment hybnosti.

Tvrzení první: V magnetickém poli se zachovává kinetická energie. Pro důkaz tohoto tvrzení si rozložme pohyb dipólu na translační a rotační (vztaženo k hmotnému středu). Každý náboj na konci tyče se při uvážení pouze rotačního pohybu pohybuje kolmo na směr osy tyče. Magnetické pole ale vyvolá sílu kolmo na pohyb náboje — tedy ve směru osy tyče. Protože náboje jsou opačné a jejich rychlosti jsou opačné, budou se síly sčítat a výsledné zrychlení od interakce rotačního pohybu s magnetickým polem přispívá pouze ke zrychlení translačního pohybu. Naopak translační pohyb má za následek změnu úhlové rychlosti rotace dipólu. Takže je jasné, že kinetická energie se může přelévat pouze mezi translačním a rotačním pohybem — musí se zachovávat (magnetické pole je konzervativní a potenciální energie je konstantní).

Tvrzení druhé: Zachovává se celková hybnost. Protože se zachovává kinetická energie, $E_k = p^2/2m$, je zřejmé, že se zachovává i velikost hybnosti. Zachování momentu hybnosti není splněno, protože jak uvidíme, dipól se obecně nemusí pohybovat po omezené dráze (prostorově).

Jak bylo popsáno výše, může se energie přelévat mezi rotačním a translačním pohybem. To je pro nás nevýhodné, protože se mění úhlová rychlost rotačního pohybu dipólu. Předpokládejme ale, že existuje taková trajektorie dipólu, kdy bude úhlová rychlost rotace kolem hmotného středu konstantní v čase. To by ale znamenalo, díky faktu, že rotační pohyb působí na translační a naopak, že působení rotace nevede ke změně velikosti hybnosti (neplatí o směru) a podobně naopak. Toho lze dosáhnout právě tehdy, když směr pohybu dipólu je kolmý na jeho osu (tím pádem se, stejně jako při pohybu jedné nabitě částice v magnetickém poli, mění pouze směr a ne velikost rychlosti translačního pohybu). Zároveň síla pocházející od translačního pohybu působí ve směru osy dipólu a nemůže způsobit změnu velikosti úhlové rychlosti rotace. Takže dipól by se teoreticky mohl pohybovat po kružnici, ovšem musíme splnit ještě podmínku, že úhlová rychlost vlastní rotace dipólu je stejná jako úhlová rychlost obíhání po kružnici, aby vektor rychlosti translace byl stále kolmý na osu dipólu. Pokusme se určit, jak velká musí být úhlová rychlost rotace dipólu, aby se v daném magnetickém poli B pohyboval po kružnici o daném poloměru R . Z analogie s pohybem hmotného bodu po kružnici získáme vztah pro dostředivou sílu (hmotnost dipólu je $2m$):

$$F = 2mr\omega^2 ,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace dipólu kolem hmotného středu i po kružnici. Pro velikost téže síly platí (Lorentzova síla v magnetickém poli):

$$F = 2q\omega \frac{d}{2} B = q\omega d B ,$$

kde q je absolutní hodnota velikosti náboje jedné kuličky a d je délka dipólu. Snadnou úpravou získáme

$$\omega = \frac{qdB}{2mr} .$$

Je ale vidět, že počáteční translační rychlost dipólu $v_0 = r\omega$ je nenulová. To neodpovídá zadání — výchozí situace je dipól stojící na místě a poté skokově zapneme magnetické pole. Právě vyšetřený případ by odpovídal tzv. adiabatickému zapínání pole, tzn. zapínání pole tak

pomalu, že v každém časovém okamžiku je systém v rovnováze, dipól se tedy stále pohybuje po kružnici, která postupně zvětšuje svůj poloměr. Ještě zbývá určit, jak rychle a po jaké kružnici se dipól bude pohybovat, pokud jeho počáteční úhlová rychlost bude ω_0 a adiabaticky zapneme pole o velikosti B . Oba vztahy získáme triviálně dosazením do zákona zachování velikosti hybnosti

$$p_0 = p$$

$$md\omega_0 = 2mr\omega + md\omega$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{qB}{m}$$

$$r = \frac{1}{2} \frac{qBd}{m\omega_0 - qB}.$$

Zde je nutno povšimnout si významných situací. Zapínejme pomalu magnetické pole. Poloměr orbity pohybu dipólu bude stále růst, až (pro konečnou velikost pole! $B = m\omega_0/q$) se dipól bude pohybovat po přímce s konečnou hybností $md\omega_0$. Při dalším zvětšování magnetického pole se již nebude nic měnit - uvedený vztah má platnost pouze pro pole menší než $B = m\omega_0/q$.

Problém skokové změny magnetického pole je analyticky řešitelný, ovšem nejjednodušší je podívat se na celou situaci s pomocí počítačového modelu. Analyticky totiž dostaneme systém diferenciálních rovnic, jejichž řešení je stejně vhodné provést numericky. V závislosti na počátečních parametrech dostáváme dráhy, které vykazují jakýsi drift v jednom směru a ve směru kolmém oscilují v omezeném intervalu. Na vás je, abyste se znalostí vzniku a působení sil a momentů sil fyzikálně rozmysleli, jak takové dráhy mohou vypadat.

Kdybychom mohli magnetické pole zapínat libovolně v čase menším než t_0 a poté bychom nechali magnetické pole konstantní, mohli bychom (pro $t > t_0$) dostat trajektorie zajímavých tvarů. Např. byla popsána kružnice, ale obecně by se dipól mohl pohybovat po elipse, v úvalu připadají cykloidy, prodloužené i zkrácené, atd.

Úloha VI.3 ... rezonanční obvody

Rezonanční obvod se skládá z neideální cívky s indukčností $L = 1$ H a vnitřním odporem $R = 1 \Omega$ a neideálního kondenzátoru s kapacitou $C = 1 \mu\text{F}$ o neznámém svodovém odporu R_x . Jaká je velikost R_x , pokud víme, že se $1/3$ původní energie rezonančního obvodu ztrácí v podobě tepla na odporu cívky?

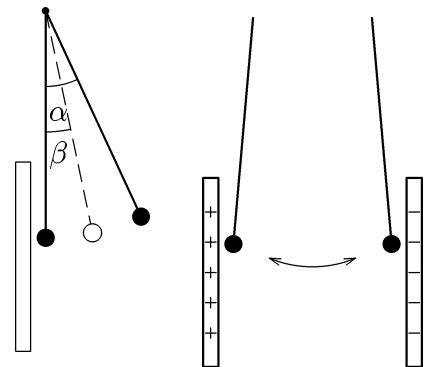
Představme si nejprve obvod bez svodového odporu kondenzátoru. Za jednu periodu oscilací se pak ztratí energie $\Delta W = I_0^2 RT/2$, kde I_0 je amplituda proudu v cívce a $T = 2\pi\sqrt{LC}$ perioda oscilací. Celková energie obvodu je $W = LI_0^2/2$. Pak $\Delta W/W = 2\pi R\sqrt{C/L}$, v našem případě $\Delta W/W \approx 10^{-3} \ll 1$. Energetická ztráta za jednu periodu je tedy v porovnání s celkovou energií obvodu velmi malá a oscilace můžeme považovat za harmonické. Přidáním svodového odporu se na tomto závěru řádově nic nezmění, neboť ztráty na tomto odporu jsou podle zadání jen dvakrát větší než na cívce.

Pro ztráty v neideální cívce, resp. kondenzátoru, za jednu periodu tedy platí: $\Delta W_L = I_0^2 RT/2$, $\Delta W_C = U_0^2 T/2R_x$, kde U_0 je amplituda napětí na kondenzátoru. Uvědomíme-li si, že $\Delta W_C = 2\Delta W_L$ a $LI_0^2/2 = CU_0^2/2$, dostaneme $R_x = L/2CR = 5 \cdot 10^5 \Omega$.

Úloha VI.4 ... míček v kondenzátoru

Malá kovová kulička o hmotnosti $m = 3,0$ g je zavěšena na tenkém hedvábném vlákne délky $l = 30$ cm tak, aby se dotýkala svislé kovové desky. Kuličku vychýlíme o úhel α a uvolníme. Po prvním odrazu od desky se kulička vychýlí o úhel $\beta < \alpha$ (obr. 26).

Při druhém pokusu umístíme do vzdálenosti $d = 5,0$ cm od první desky druhou, stejně velkou. Závěs kuličky prodloužíme,



Obr. 26

Obr. 27

aby byl mnohem delší než vzdálenost desek. Připojíme-li desky ke zdroji vysokého napětí $U = 2,00 \cdot 10^4 \text{ V}$ a závěs vychýlíme, kulička se rozkmitá a naráží střídavě na levou a pravou desku (obr. 27). Perioda nárazů se brzy ustálí na hodnotě $T = 0,45 \text{ s}$. Jak se mění při druhém pokusu rychlost kuličky mezi dvěma nárazy na desky? Jaký náboj nese kulička během letu mezi deskami?

Nejprve určíme tzv. koeficient restituice, to je poměr rychlosti odrazu a dopadu $K = v_{\text{odr}}/v_{\text{dop}}$. K tomu využijeme zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos \alpha).$$

Tuto rovnici napíšeme jak pro v_{dop} , α , tak pro v_{odr} , β , vydělíme je a dostaneme

$$K = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}}.$$

V kondenzátoru bude homogenní elektrické pole, nabitá kulička se mezi deskami bude pohybovat rovnoměrně zrychleně se zrychlením a , počáteční rychlostí v_p a koncovou rychlostí v_k . Průměrná rychlost je dána jako průměr počáteční a koncové rychlosti

$$\frac{v_k + v_p}{2} = \frac{d}{T}.$$

Při odrazu se změní náboj na kuličce na opačný a rychlosti budou opět v poměru

$$\frac{v_p}{v_k} = K.$$

Řešením posledních dvou rovnic dostaneme

$$v_k = \frac{2d}{T(1+K)}, v_p = \frac{2dK}{T(1+K)}, a = \frac{v_k - v_p}{T} = \frac{2d(1-K)}{T^2(1+K)}.$$

Zrychlení kuličky je

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{QU}{md}.$$

Dosadíme za zrychlení a vyjádříme absolutní hodnotu náboje

$$Q = \frac{2md^2(1-K)}{UT^2(1+K)}.$$

Omylem nebyly zadány úhly α a β . Bylo možné je odečíst z obrázku třeba jako $\alpha = 25^\circ$ $\beta = 12^\circ$. Po dosazení těchto a zadaných hodnot dostaneme $v_p = 0,072 \text{ m/s}$, $v_k = 0,150 \text{ m/s}$, $a = 0,172 \text{ m/s}^2$ a $q = 1,29 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Úloha VI. P ... gravitace

Už od pradávna se lidé zabývali pozorováním oblohy a později pohybem planet okolo Slunce. Jak se to historicky odehrálo, asi všichni znáte. Tycho de Brahe sledoval mnoho let pohyby planet a zhotovil rozsáhlé tabulky. Z nich vyšel Kepler a objevil své zákony. Těch využil Newton, lépe pochopil jejich podstatu a dospěl ke krásnému vztahu:

$$F_G = \kappa \frac{mM}{r^2}.$$

Takto popisujeme pouze pohyb planet okolo Slunce. Můžeme říci, co vyvolává tuto sílu? Tímto se zabýval i Newton a nakonec se uspokojil poznáním toho, co se odehrává, bez znalosti mechanismu. Dodnes jej nikdo neobjevil. Bylo navrženo více mechanismů gravitace. Jeden ze zajímavých je tento:

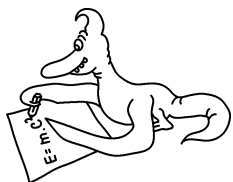
Představte si, že v prostoru je velké množství částic, které se pohybují velkou rychlostí ve všech směrech a jsou málo absorbované při průchodu hmotou. Když jsou pohlcené Zemí, předávají jí hybnost. Je-li těch, které jdou jedním směrem, stejně jako těch z opačného směru, jsou hybnosti vyvážené. Když se k Zemi přiblíží Slunce, jsou částice přicházející na Zemi přes Slunce částečně absorbovány a ve směru od Slunce jich přichází méně než z opačné strany. Země proto získá hybnost směřující ke Slunci.

Na vás je, abyste ověřili, jestli je taková gravitační síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti (uvažujte dvě koule, kde jedna je mnohem menší než ta druhá — stačí přibližně). Jak asi tušíte, tento mechanismus gravitace není správný. Zkuste přijít na to, kde selhává. Návod: najděte chybné důsledky.

Nejprve spočteme, jak tato síla závisí na vzdálenosti r . Uvažujme dvě koule, kde první je mnohem menší než ta druhá a vzdálenost obou koulí je mnohem větší než poloměr druhé koule. Jaká síla působí na menší kouli? Do menší koule narážejí částice ze všech stran, kromě prostorového úhlu vyřazeného druhou, větší koulí. Odtamtud sice také přilétávají částice, ale je jich podstatně méně než z jiných směrů, protože větší koule jich hodně absorbuje. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro všechny paprsky v prostorovém úhlu pohltní koule stejné množství částic. Ve skutečnosti pohltní více částic u paprsku procházejícího středem koule, než u paprsku jdoucího dál od středu (větší tloušťka materiálu). Síla je tedy přibližně přímo úměrná prostorovému úhlu Ω a ten je roven S_2/r^2 . (S_2 je průřez druhé koule). Tímto jsme ukázali, že naše nová gravitační síla je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Někdo by mohl namítat, že tato síla nezávisí na hmotnosti. Tak to ale není, protože tělesa s větší hustotou budou pohlcovat více částic.

Nyní se podívejme na některé chybné důsledky této teorie. Co se bude dít s tělesem, které se pohybuje? Do takového tělesa bude narážet víc částic zepředu než zezadu. Je to stejné, jako když běžíte v dešti. Proto by se pohybující tělesa zpomalovala, až by nakonec zastavila. Takto by se musely zpomalovat i planety obíhající okolo Slunce, ale to nepozorujeme. Proto je tato teorie neplatná.

Další chybný důsledek je například tento: Mějme nějakou obdélníkovou desku, kterou umístíme do homogenního pole kolmo na siločáry. Za homogenní můžeme považovat třeba pole u povrchu velké koule. Zvolme tloušťku desky tak, aby absorbovala polovinu částic, které na ni dopadají. Přes desku tedy projde také polovina částic. Co se stane, přehneme-li desku na polovinu? Celková hmota se nezmění. Ale do desky narazí už jen polovina z předchozího množství částic a z nich polovina projde přes první část dvojité desky a z té poloviny zase jen polovina prolétne ven za desku. Celkem tedy projde jedna polovina plus jedna osmina z původního množství částic. Tedy aniž bychom měnili množství hmoty, změnila se gravitační síla. To je spor.



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. Exp ... var vody

Změřte měrné skupenské teplo vypařování u vody. Předpokládejte, že znáte měrnou tepelnou kapacitu vody a z rychlosti ohřívání spočtete užitečný příkon vařiče. Nespalte se!

První experimentálka byla docela jednoduchá a v mnoha ohledech byla určena na procvičení zpracování chyb měření a úvah na co nejlepší uspořádání pokusu, přičemž poskytovala poměrně volnou cestu. Řešení by se dala rozdělit podle vybavení, které jste použili. Nejčastěji se jednalo o plynový, el. vařič, kahan, ponorný vařič a méně často i mikrovlnku. Dále se práce v základě lišily započítáváním či zanedbáváním tepelné kapacity nádoby (pomineme-li ty z vás, kteří se o ní ani nezmínili). Různily se též způsoby odečítání hmotnosti vody, buď na základě měření objemu (kde je však třeba uvážit objemovou roztažnost!) nebo hmotnosti přímo (mnozí aparaturu přímo umístili na váhu). Jednotlivé postupy, většinou variace na schéma $P = Q/t$ a $\Delta t = l_v \Delta m$, se pak lišily stupněm eliminace ztrátových jevů. Cílem autorského řešení není ukázat bombastické řešení vedoucí k tabulkové hodnotě, nýbrž poukázat na mnohé zajímavé myšlenky, netradiční návrhy a statistické zpracování chyb

1. Měření efektivního výkonu

Při kalibraci zdroje tepla potřebujeme co nejvíce eliminovat ztráty způsobené vypařováním (pára nám odnáší teplo a také se podílí na změně hmotnosti). O významnosti tohoto jevu se můžeme snadno přesvědčit, necháme-li chladnout horkou vodu v šálku s volnou hladinou a ve stejném uspořádání s hladinou pokrytou tenkou vrstvou oleje. Konkrétně jsme naměřili rozdíl $4,5^\circ\text{C}$ za (v obou případech stejnou) dobu 15 minut.

Vliv výparu můžeme například ovlivnit velikostí povrchu kapaliny, použijeme tedy nádobu s úzkým hrdlem. Je dobré kalibrovat na teplotním okolí bodu varu — ztrátové jevy se zde uplatňují jinou mírou než při 20°C . Nyní jde o popsání ohřevu nádoby. Pokud jej chceme zanedbávat, musíme k tomu mít dobrý důvod (nízká hmotnost, malá tep. kapacita — např. tenkostěnná kádinka), objekt typu hrnec se ovšem ohřívá velice významně. Mnozí použili tabulkových hodnot pro hliník. Problémem zůstává tepelné záření a možnost izolovatelnosti soustavy (nabízí se kalorimetr). Ke stanovení samotného výkonu většina z vás odečítala teplotu na určité časové škále a postupným dělením a výpočtem průměru se dopracovala ke střední hodnotě P . Podotkneme, že měrnou tepelnou kapacitu vody můžeme vzhledem k ostatním chybám považovat za konstantní (ale je dobré si uvědomit její obecnou proměnnost!). Pro názorné zpracování výsledků jsme se rozhodli použít data naměřená J. Myslivečkem, který pracoval s ponorným vařičem (výrobce uváděný příkon — 300 W), přičemž kapacitu kalorimetru zanedbával.

i	t	Δt	P	ΔP
	$^\circ\text{C}$	$^\circ\text{C}$	W	W
1	23,1	7,6	318	14
2	30,1	7,2	301	-3
3	38,1	8,0	334	30
4	45,7	7,6	318	14
5	52,8	7,1	297	-7
6	59,6	6,8	284	-20
7	66,8	7,2	301	-3
8	73,7	6,9	288	-16
9	80,7	7,0	293	-11
10	87,9	7,2	301	-3

Významně ovšem zamezil ztrátám zářením. Teplotu měřil vždy po $t = 30$ s a výkon počítal dle vztahu

$$P = \frac{mc_v \Delta T}{\Delta t} .$$

Nejprve spočítáme aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Zde konkrétně $\bar{P} = 304$ W.

Pro každou naměřenou hodnotu stanovíme zdánlivou chybu $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$ a vypočteme standardní odchylku:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2} .$$

Tedy $s = 15,4$ W. Vyloučíme hrubé chyby použitím tzv. $3s$ -kritéria, tedy vyloučíme ty naměřené hodnoty, které se od aritmetického průměru odchyľují o více než $3s$. Výše uvedený postup opakujeme.

Dále určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru — statistickou chybu

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}$$

Pro naše hodnoty $s = 4,9$ W. Je dále dobré stanovit systematickou chybu — u přístrojů bereme například polovinu nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, není-li možné ji vypočíst, je dobré alespoň odhadnout.

Určíme celkovou chybu podle vzorce

$$s_{\text{celk}} = \sqrt{3s_{\text{stat}}^2 + s_{\text{sys}}^2}$$

nebo pro malý počet měření

$$s_{\text{celk}} = 3s_{\text{stat}} + s_{\text{sys}} .$$

Vypočtená hodnota celkové chyby se uvádí na jednu platnou cifru a výsledná hodnota ve tvaru:

$$x = (\bar{x} \pm s_{\text{celk}}) j .$$

Chyba metody při měření teploty je $0,1^\circ\text{C}$, čemuž přibližně odpovídá systematická chyba $4,2$ W.

Chyby měření času zanedbáváme, jsou s přesnými stopkami mnohem menší. V našem případě je celková chyba 16 W a tedy výkon je roven $P = (300 \pm 20)$ W.

2. Měření samotného l_v

Zde je nutné přivést vodu co nejrychleji k varu, abychom co nejvíce zredukovali vypařování v průběhu ohřevu. Objevil se například nápad použít pro tuto fázi pokličku. Lepší možností je s hmotnostními ztrátami počítat a změřit je. Provedeme-li při zahřívání paralelně druhý pokus za stejných podmínek, přičemž nádobu odstavíme při dosažení varu, můžeme změřit hmotnostní úbytek, čímž získáme skutečnou hmotnost vody jdoucí do varu.

Je třeba rozvážit, zda je vhodné odpařit všechnu vodu, jak mnoho z vás učinilo. Čas neodhadneme přesně a navíc se výrazně změní charakteristiky soustavy. V následujícím měření se sledoval hmotnostní úbytek vody po 300 s varu. Užitím $l_v = P\Delta t / \Delta m$ snadno určíme měrné skupenské teplo varu.

i	m	Δm	l_v	Δl_v
	g	g	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
1	386,6	39,7	2297	-58
2	348,7	37,9	2406	51
3	310,5	38,2	2387	32
4	271,0	39,5	2309	-46
5	232,6	38,4	2375	20

$$\begin{aligned}\bar{l}_v &= 2355 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \\ s &= 48,7 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \\ s_{\text{stat}} &= 21,8 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\end{aligned}$$

Chyba v určení hmotnosti: $\pm 0,1$ g, tedy chyba v určení l_v je přibližně $5 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Chyba daná chybou určení hodnoty výkonu způsobí odchylku přibližně $120 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Chyby v určení času a hmotnosti můžeme vůči neurčitosti výkonu zanedbat.

Celková chyba \bar{l}_v pak činí $137 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ a naměřenou hodnotu můžeme zapsat ve tvaru $l_v = (2400 \pm 200) \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Pokud měříme hmotnost pomocí objemu, je nutné uvážit hustotu vody jako funkci teploty.

Diskuze: srovnáme možná uspořádání pokusu podle způsobu ohřevu vody:

1. Ohřev na sporáku (plynovém, elektrickém) — snad nejčastější případ, jeho nevýhodou je například silné zahřívání plotny a velké úniky tepla do okolí vůbec.

2. Ponorný vaříč — máme zaručen konstantní příkon zdroje, zahříváme přímo vodu a v malé nádobě dosáhneme dobrého rozložení teploty ve vodě. Snadnější je i manipulace s aparaturou.

3. Snad nejnevýhodnější způsob ohřevu se nám zdálo použití mikrovlnné trouby, protože nemáme jistou, že její tepelný příkon je opravdu konstantní v čase. A se vzorkem vody se nepracuje právě snadno. Kladem této metody je, že se zahřívá opravdu jenom vzorek vody a nádoba pouze minimálně.

Jako jiný příklad zpracování výsledků měření můžeme ještě uvést metodu lineární regrese, která spočívá v hledání koeficientů lineární funkce (např. metodou nejmenších čtverců) tak, aby křivka co nejlépe popisovala naše data (u kterých ovšem předpokládáme lineární závislost). O tom, nakolik přesně proložená přímka aproximuje naměřené hodnoty, nás pak informuje koeficient korelace r (ten vždy leží v intervalu $(0, 1)$ a pro hodnoty mezi $0,8$ a 1 můžeme závislost vskutku považovat za lineární). Pro podrobnější seznámení doporučujeme starší ročenky semináře či jinou literaturu.

Měření výkonu jsme prováděli na kolejním sporáku po dobu 360 s, přičemž teplotu jsme odečítali každých 20 s. Hmotnost vody $M = 0,5$ kg, hmotnost hliníkové nádoby $m = 0,2076$ kg (měrná kapacita $c = 896 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$). Ze sady měření jsme vyňali sekvenci sedmi dvojic hodnot, uvedenou v tabulce.

Použitím lineární regrese s předpokládanou závislostí $T = at + b$ jsme získali

i	t [s]	T [°C]
1	160	61,5
2	180	64,5
3	200	67,0
4	220	70,5
5	240	73,0
6	260	76,0
7	280	79,0

$$a = 0,1455 \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$b = 38,20 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{vskutku, v } t = 0 \text{ byla teplota } 40 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$r = 0,9996 \quad (\text{koeficient korelace})$$

Platí:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = a \quad P = \frac{\Delta T}{\Delta t} (c_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}} + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}}) \doteq 333,9 \text{ W}$$

Vcelku jste se všichni snažili experimentovat, což je dobře. Někdy ovšem neškodí uvést pomůcky a přesně charakterizovat způsob měření (mnozí např. uvedli, že odečetli hmotnost, ale způsob, kterým to provedli, už ne!). Je dobré začít také trochou teorie, tabulka na úvod nepůsobí nejlépe. Důležité však je nepokoušet se modifikovat výsledky tak, aby nám vyšla tabulková hodnota — o to zde skutečně nejde. Mnoho vztahů hezky vypadajících v teorii může narážet na mnohé překážky v praxi. Jednou z nejdůležitějších částí řešení je diskuze (není-li prováděna průběžně), která slouží právě k tomu, abyste se nad problémem správně zamysleli. Děkujeme vám také za některé slohové

hříčky („do hrnku jsem nalil vodu, postavil na vařič a zapálil jsem ho“, „vodu dáme na kamna...“). Někteří pravděpodobně razili zásadu „napíšeme krátké řešení a opravovatelé budou mít radost“ — to ovšem pravdou není, naopak! Víťame každý nápad, nebojte se skutečně experimentovat i s myšlenkami, být hraví a kreativní — to je smysl experimentální úlohy.

Nakonec podotkněme, že v mnohých bodech diskuze a závěru jsme se opírali o názory Petera Čenduly, Karla Kouřila a Petra Nečesala.

Úloha II. Exp ... koulení

Sežěňte si několik (cca 6) předmětů kulového tvaru. Může jít například o míček na pingpong, tenis, fotbalový míč, ocelovou kuličku, hliněnou kuličku... Změřte jejich momenty setrvačnosti. Navrhněte a proveďte další měření, s jejichž pomocí budete moci určit, zda se jedná o dutou nebo plnou kouli.

Měřit moment setrvačnosti bylo možno několika způsoby. Například, jak už napovídá název úlohy, koulením z nakloněné roviny a změřením rychlosti rovnoměrného pohybu po projetí nakloněnou částí, či přímo měřením doby projetí po nakloněné části. Též se objevila metoda měření kmitů kyvadla vzniklého zavěšením koule těsně u povrchu. Nutno poznamenat, že tato metoda byla u větších koulí nejpřesnější. Našli se však i tací, kteří pouze změřili poloměr a hmotnost a moment setrvačnosti vypočítali podle známého vzorce

$$J = \frac{2}{5}mr^2.$$

Někteří však zapomněli, že tento vzorec platí pouze pro koule homogenní, touto metodou nelze určit, zda je koule dutá. Nejlepší metoda, jak zjistit dutost koule byla vyjádřit si její moment setrvačnosti jako

$$J = kmr^2 \quad (18)$$

a spočítat z naměřených hodnot k . Potom $k = \frac{2}{5}$ je pro kouli plnou a $k = \frac{2}{3}$ je pro ideální kulovou slupku, o něco méně tedy pro reálnou dutou kouli s tenkou stěnou.

1. měření koulením

Máme tedy nakloněnou rovinu délky s a výšky h a kouli o hmotnosti m a poloměru r . Ze zákona zachování energie na konci nakloněné roviny můžeme psát:

$$\begin{aligned} E_p &= E_k + E_{rot} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \end{aligned}$$

Pokud za J dosadíme z (18) a za v ze zrychleného pohybu $v = 2s/t$, můžeme pro k psát

$$k = \frac{ght^2}{2s^2} - 1$$

Nutno poznamenat, že se zde projeví vliv třecích sil. Valivé tření o podložku lze zmenšit vhodnou volbou podložky, nejlépe co nejtvrdší (dřevo, kov), odpor vzduchu se zase méně projeví u menších koulí. Nevýhodou této metody je, že krom tření se zde projevuje též chyba vzniklá měřením krátkých časů.

2. měření kýváním

Osu kývání musíme umístit co nejbližší ke středu koule, aby měření bylo co nejpřesnější. Vztah pro periodu kmitů pak můžeme psát jako

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J + md^2}{mgd}}$$

kde d je vzdálenost mezi osou a středem koule. Lze se snadno přesvědčit, že pro $md^2 \gg J$ se tento vztah redukuje na známý vztah pro matematické kyvadlo.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$$

Opět můžeme dosadit za J z (18) a pro k psát

$$k = \frac{\frac{T^2}{4\pi^2}gd - d^2}{r^2}$$

Osa kývání musí být co nejblíže kouli, proto je třeba závěs udělat co nejlepší. Zůstává problém určení d . Zda určit délku závěsu a přičíst poloměr nebo změřit vzdálenost osy a spodního vrcholu koule a poloměr odečíst. Záleží na aparatuře a pomůckách, která metoda je lepší. Výhodou této metody je, že se zde tolik neuplatňuje tření a můžeme měřit delší časy, proto je tato metoda přesnější pro větší koule, kde můžeme dobře uchytit závěs.

Nyní uvedu příklady měření

1. metoda koulení

dráha: $s = (200,0 \pm 0,1)$ cm

výška: $h = (36,8 \pm 0,1)$ cm

doba koulení: t_i

2. metoda kývání

délka závěsu: plná — $d = 78$ mm,

dutá — $d = 128$ mm

doba 50 kmitů: t_i

veličina	t [s]	
koule	plná	dutá
	1,7	1,9
	1,8	2,0
	1,8	2,0
	1,7	2,0
	1,7	1,9
průměr	1,74	1,96
chyba	0,02	0,02
k	0,36	0,73
chyba	0,03	0,04

veličina	t [s]		$2\pi r$ [cm]	
koule	plná	dutá	plná	dutá
	30,0	44,6	20,0	75,7
	29,7	44,7	20,2	75,5
	29,9	44,6	20,0	75,5
	30,0	44,3	20,0	75,8
	29,8	44,7	20,1	75,6
průměr	29,88	44,58	20,06	75,62
chyba	0,06	0,07	0,04	0,06
k	0,38	0,658		
chyba	0,03	0,008		

Je vidět, že pro plnou kouli se k blíží k $\frac{2}{3}$ a pro kouli dutou k $\frac{2}{3}$, přičemž přesnější je měření metodou kývání.

V tabulkách byly použity některé hodnoty, jejichž autorem je Jan Houštek.

Nakonec bych jen dodal pro některé snaživé řešitele, že opravdu není třeba uvádět výsledky měření a výpočtů na 8 platných číslic, když chyba měření je kolem 10%.

Úloha III. Exp ... tloušťka vlasu

Změřte tloušťku lidského vlasu více metodami, výsledky a chyby jednotlivých metod porovnejte. Vzorek vlasu byl přiložen.

Třetí experimentálka se evidentně těšila velké oblibě, sešlo se nám na 23 různých řešení, z nichž jste mnohá přímo provedli, jiná jen z bláznivosti navrhli. Nejprve pár obecných poznámek. Tloušťku vlasu můžeme měřit přímo (mikrometrem), popř. určitým způsobem zjistit mocnost více vlasů. Můžeme však také využít jiných vlastností, např. ohybové jevy, lehkost a malý odpor při pádu atd., a také sáhnout k projekčním a optickým (zvětšovací) metodám. Zde je však nutné pozastavit se nad geometrií vlasu, který je většinou metod považován za kruhový v průřezu, hladký, rovný, nestlačitelný, homogenní, konstantního průměru, tvarovatelný..., což však vždy zajistit nemůžeme a je nutné to uvážit. Co se týče populační statistiky, uvádíme údaje P. Čenduly a J. Houfka:

„V podstate existujú podľa biológov ... dva typy vlasov: prvý typ ... reprezentujú ľudia s relatívne rovnými (nekučeravými) vlasmi; druhú kategóriu tvoria ľudia s kučeravými vlasmi ... prvá kategória má kvázi kruhový tvar, druhá ... má tvar v jednom smere pretiahnutý približne dvakrát toľko.“

„Tloušťka vlasů populace ČR se pohybuje mezi 15 až 138 μm . U žen je průměrná tloušťka 68,17 μm , u mužů 66,39 μm . Nejtlustší vlasy rostou v oblasti temene a týlu. Nejtenčí v oblasti spánkové a čelní. Světlovlasí lidé mají asi $150 \cdot 10^3$ vlasů, tmavovlasí asi $(80 - 100) \cdot 10^3$.“

Nyní stručně k nejčastějším metodám:

1. Mikrometr — prosté řešení, otázkou však zůstává deformace vlasu, rovnost čelistí a proměnnost průřezu. Můžeme tedy měřit na různých částech vlasu i ploch měřidla a vlas udržovat patřičně uvolněný. Též neškodí proměřit nulovou hodnotu mikrometru, diskutabilní je pokusit se odhadovat další dělení jdoucí za nejjemnější dílky měřidla. Průměr vámi naměřených hodnot: $53 \mu\text{m}$. Snad nejčastější metoda, bohužel někdy jediná, ale v zadání stálo více způsobů, tedy:

2. Závity — další rozšířený způsob. Vlas těsně navineme na drát (špejli, tuhu, jehlu...), ze známého počtu závitů a změřené délky příslušného úseku prostým dělením získáme průměr vlasu. Problémem je ukotvení vlasu na jednom konci, těsnost závitů atd. V této fázi též můžeme změřit průměr tyčinky s vlasem a porovnat s původní tloušťkou — získáme dvojnásobek hledané hodnoty. Do stejné skupiny patří nastříhání vlasu na kratší úseky, ty vedle sebe nalepit na izolepu, popř. je namočit... a opět měříme mocnost více vlasů. Fykosácký průměr: $65 \mu\text{m}$.

3. Projekční metody: Vlas upevníme do rámečku na diapozitivu a promítneme jej spolu s nějakým délkovým měřítkem (nebo si rysky můžeme sami vytvořit). Změříme velikost stínu vlasu, porovnáním skutečné a projektované délky pokusného dílku získáme zvětšení a tloušťku snadno dopočteme. Můžeme samozřejmě použít i meotar, musíme si však dávat pozor na zachování měřítka v potřebných směrech. Objevily se též návrhy promítnout pouze vlas, změřit vzdálenost stínítka a vlasu od zdroje světla a užít podobnosti trojúhelníků, první metoda je však přesnější (měřím dvě veličiny namísto tří), někdo též použil laser (a rušily jej ohybové proužky), jiní kombinovali čočky a počítali zvětšení... prostě spousta možností. Průměr u této metody: $56 \mu\text{m}$.

4. Mikroskop — může mít zabudovanu stupnici, podle které tloušťku odečteme, popř. ze známého zvětšení a odhadu relativní velikosti zvětšeného obrazu určíme průměr vlasu. Jedná se ale většinou o méně přesné metody.

5. „Pramínek vlasů...“ — změříme obvod těsného svazku vlasů o , známe-li jejich počet n , rozpočteme plochu (kruhového) průřezu S na jednotlivé vlasy, kdy mezery mezi nimi považujeme za zanedbatelné, pak

$$S = \frac{o^2}{4\pi} = n\pi \frac{d^2}{4}, \quad \text{odkud} \quad d = \frac{o}{\pi\sqrt{n}}.$$

Lenka Zdeborová si tak spočítala, že má přibližně 80 000 vlasů (v dobré shodě s fakty uvedenými výše). Jest také možno provést korekci na mezery mezi vlasy, spočítat, nakolik je plocha využita oproti periodickému pokrytí šestiúhelníky. Metoda bezesporu zajímavá, ale potřebuje více vlasů, a to dlouhých.

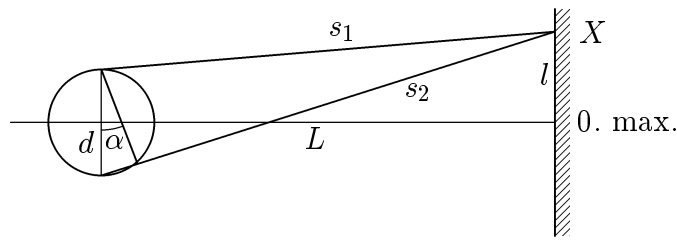
6. Pozorovací metody: Zjistíme si minimální zorný úhel vlastního oka tak, že si nakreslíme malý bod známého poloměru a změříme největší vzdálenost, z které je ještě pozorovatelný. Pak si odstříhneme menší kousek vlasu (samotný vlas je dosti dlouhý a pozorovatelný na větší vzdálenost) a maximální vzdálenost viditelnosti stanovíme i pro něj, výsledky porovnáme. Problémem je barva vlasu, lesk, volba délky úseku... Další možností je prosté přiložení vlasu k měřítku a odhad, kolikrát se "vejde" do 1 mm, na pomoc si můžeme vzít i lupu. Dále máme-li k dispozici vlasy známých a různých tlouštěk, můžeme komparační metodou určit nejpravděpodobnější průměr. Jedná se však pouze o řádové výsledky.

7. Rolovací metoda (K. Maturová) — vlas umístíme mezi dvě sklíčka tak, aby jedním koncem přesahoval. Horní sklíčko smýkáme po druhém, vlas se odvaluje. Ze známého počtu otáček (určím dle konce) a vzdálenosti, o kterou jsme jej odvalili zjistíme jeho tloušťku, uvažujeme-li kruhový průřez. Problémem je však podkluzování, prohýbání vlasu, ale zajímavá metoda.

8. „Research improbable“: Sešlo se i množství těžko realizovatelných metod založených na Archimédově zákoně, sestavení kondenzátoru o vzdálenosti desek rovné tloušťce vlasu, měření volného pádu vlasu, el. odporu roztoku v kapiláře s různým efektivním průřezem kapiláry (v původní sestavě a s vlasem), momentu setrvačnosti vlasu za předpokladu jeho válcového tvaru... většinou jen návrhy.

V autorském řešení budeme dále prezentovat dvě další metody:

1. „HighTech“ — ohyb laserového paprsku na vlasu. Vlas má dostatečně malé rozměry, aby byl pozorovatelný ohybový jev, což nám často práci ztěžuje, ale zároveň tak získáme efektivní metodu měření.



Obr. 28

S užitím Huyghensova principu dopadají paprsky do bodu X s dráhovým rozdílem $s_2 - s_1$ (v součtu zanedbáváme d):

$$s_1^2 = \left(l - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2,$$

$$s_2^2 = \left(l + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2,$$

$$s_2 - s_1 = \frac{2dl}{s_2 + s_1} \doteq \frac{dl}{\sqrt{L^2 + l^2}}$$

pro $l \ll L$

$$s_2 - s_1 = \frac{dl}{L}.$$

Pro maximum pak z geometrického názoru plyne $s_2 - s_1 = k\lambda$, tedy např. $d = kL\lambda/l$. Pro dvě sousední maxima (minima) pak platí

$$d = \frac{L\lambda}{x}. \quad (19)$$

Při odvození též můžeme vyjít z úhlů a dojdeme k témuž. Nyní k samotnému měření:

Pomůcky: školní He-Ne laser Uniphase 1508-2 ($\lambda = 632,8$ nm, rozsah výrobce neudával, min. výkon 0,5 mW, průměr paprsku 0,48 mm), vlas, pravítko, pásmo, nit, izolepa, kruhová úchytky na čochku, papír.

Postup: Laser ve vodorovné poloze zaměříme pokud možno kolmo na stínítko (tabuli), blízko ústí paprsku přistavíme držák s vlasem. Provázkem změříme vzdálenost L vlasu od tabule. Na stínítko připevníme papír a po spuštění laseru zakreslujeme polohu maxim/minim. Pokud jsme nebyli oslněni jasným středem obrazu, dala se rozeznat maxima až 8. řádu. Změřením vzdáleností sousedních maxim a dosazením do (19) získáme tloušťku vlasu. Zde je však nutné podotknout, že vztah je pouhou aproximací obcházející jinak nutnou integraci. Závislost intenzity na vzdálenosti l lze vyjádřit funkcí $I = A[(\sin x)/x]^2$, kde x je relativní proměnná rovná $(\pi/\lambda)dl$. Z toho mimo jiné vyplývá, že maxima jsou nesouměrná, jejich relativní vzdálenosti od nultého maxima jsou po řadě $1,43\pi$, $2,45\pi$, $3,47\pi$, $4,48\pi$. Není tedy dobré měřit vzdálenosti maxim od středu, ale mezi sebou, v dobrém přiblížení je pak vzdálenost sousedních maxim stejná, a toho jsme právě využili při měření, přičemž se středem jsme nepočítali. Dodejme, že u minim k takovým problémům nedochází, následují po sobě zcela pravidelně. Otázkou je, co se nám lépe pozoruje. Nelze také proměřit vzdálenost k -tého maxima vlevo a vpravo od osy a délku x určit jako podíl $l/2k$, pro minima je to však vcelku dobrý postup. Zakreslování jsme provedli celkem třikrát a určili polohu po řadě pěti, sedmi a osmi maxim po obou stranách osy, určili šest průměrných hodnot x a pro každou spočítali d , výsledky jsme sestavili do tabulky. Vzdálenost L byla $2,066 \pm 0,005$ m.

Tabulka 1

\bar{x} [mm]	d [μm]	Δd [μm]
16,60	78,66	0,20
16,40	79,62	-0,76
16,43	79,40	-0,62
16,57	78,80	0,06
16,86	77,46	1,40
16,50	79,13	-0,27

$$\bar{d} = 78,86 \mu\text{m}$$

$s = 0,78 \mu\text{m}$ — k hrubé chybě nedošlo

$$s_{\text{stat}} = 0,32 \mu\text{m}$$

Chyba při určení L je přibližně $\delta_L = 0,24 \%$, x jsme měřili s přesností 0,5 mm, odkud $\delta_x = 3,0 \%$. Bohužel nemůžeme započítat neurčitost ve vlnové délce (dala by se odhadnout v jednotkách nanometrů). Celková chyba pak bude:

$$\delta = \sqrt{3\delta_{\text{stat}}^2 + \delta_L^2 + \delta_x^2} \doteq 3,5 \%$$

Závěr: $d = (79 \pm 3)\mu\text{m}$. Relativní chyba nám vyšla poměrně malá, otázkou je však znalost vlnové délky. Problémem byla i jemná struktura jednotlivých maxim (dána nerovnostmi na okrajích vlasu), proto se těžko odhadovala jejich přesná poloha. Nicméně je to metoda zajímavá, stává se dostupnější s rozšiřováním školních laserů. Průměr vámi naměřených hodnot: $75,8 \mu\text{m}$.

2. „LowTech“ — ale zato o moc hezčí, řekněme kapková, metoda.

Touto metodou měřili pouze tři z vás (M. Berta, H. Kadlecová, P. Nečesal), nicméně přišla nám velice zajímavá. Mějme kapku vody známého objemu. Naneseme ji na sklíčko, kolem ní stočíme do kroužku vlas. Přikryjeme dalším sklíčkem, přičemž kapka nám vytvoří skvrnu. Snažíme se, aby nedošlo ke kontaktu vlasu s kapalinou a naší prioritou je vytvoření skvrnky kruhového tvaru, změříme její průměr D . Pak voda přibližně zaujímá tvar velmi nízkého válce, jehož výška je však rovna tloušťce vlasu! Ze známého objemu kapky V (odkapu si typicky 100 kapek) určíme d . Použili jsme školní byretu, z jejíž stupnice jsme mohli poměrně přesně odečítat objem odkapané vody. Jako podložní sklíčko posloužilo rovné kapesní zrcátko, krycí pak sklo z rámečku na fotografii. Rozměry skel: $58 \times 88 \text{ mm}$, $149 \times 99 \times 2 \text{ mm}$.

Tabulka 2

	\bar{D} [mm]	d [μm]	V [10^{-2}ml]	Δd [μm]
1	30,6	63,9	4,7	2,5
2	28,7	72,6	4,7	-6,2
3	29,6	69,1	4,7	-2,7
4	30,3	66,4	4,8	0,0
5	31,9	60,1	4,8	6,3
6	29,3	71,3	4,8	-4,9
7	31,2	62,9	4,8	3,5
8	30,4	66,0	4,8	0,4
9	30,5	65,7	4,8	0,7

$$\bar{d} = 66,4 \mu\text{m}$$

$s = 3,9 \mu\text{m} \Rightarrow$ bez hrubé chyby

Chyba při měření D : 1 mm, čemuž odpovídá $\delta_d = 3,3 \%$

$s_{\text{stat}} = 1,3 \mu\text{m}$, tedy $\delta_{\text{stat}} = 2,0 \%$

$$\delta_{\text{celk}} = \sqrt{3\delta_{\text{stat}}^2 + s_D^2} \doteq 4,8 \%$$

$$s_{\text{celk}} = 3,2 \mu\text{m}$$

$$d = (66 \pm 3) \mu\text{m}$$

Je dobré si ověřit chování kapky mezi sklíčky bez přítomnosti vlasu: skutečně se rozšíří po celé ploše, jak to má být. Problémem je často velmi nepravidelný tvar kapek, roztřepené okraje skvrnky, vlas též může být stlačen vahou horního skla. Ale metoda je to velice jednoduchá, vtipná a nevyžaduje náročného vybavení, můžeme kapat i s pomocí tyčinky.

Nikdo jiný než vy, řešitelé, jste dokázali, jaké nepřeborné množství způsobů lze vymyslet při měření zdánlivě jednoduché úlohy. Naši snahou bylo také demonstrovat různost vztahů lišících se mírou aproximace, které můžete při zpracování experimentu použít. Mnoho nápadů bylo nereálných, ale alespoň pobavily a svědčí o vaší přemýšlivosti. Ohyb na vlákně pak také ukázal, že některé teoretické výsledky nemusí být vždy ve shodě s praxí a vysvitlo i mnohem hlubší pozadí úlohy. Nakonec je snad jasné, že nedostatek experimentálního vybavení vůbec nemusí být překážkou dobrého měření, jak říkáme: Nezáleží nám tolik na přesné hodnotě výsledku, jako na hezkém nápadu, a těch se sešlo opravdu dost!

Úloha IV . Exp ... pružnost a pevnost

Sežeňte si tenké gumičky a

- změřte závislost protažení gumičky na působící síle a sestrojte graf naměřené závislosti,
- změřte také sílu, při které gumička praskne,
- zatižte gumičku co nejvíce (ale tak, aby se nepřetrhla) a po sundání zátěže proveďte znovu měření a).

Teorie úlohy:

Nejprve si řekněme něco o deformačních vlastnostech gumy a jí podobných materiálů. Řadí se mezi tzv. nelineárně elastické látky, což znamená, že jejich deformační prodloužení nejsou

Tabulka 1.

m [g]	prodloužení [mm]	
	nezatížená	zatížená
10	0	0
20	3,6	10,4
30	18,3	
40	36,1	48,3
50	62,6	
60	85,6	105,6
70	108,6	
80	130,6	158
90	165,7	
100	189,6	204,2
110	210,1	
120	217,3	240,1
130	229,2	
140	239,2	252,5
150	248,1	
160	255,4	266,8
170	262,3	
180	268,2	279,3
190	273,7	
200	279,5	288,2
210	277	
220	290	296,1
230	293,3	
240	298	304,3
250	301,9	309,1

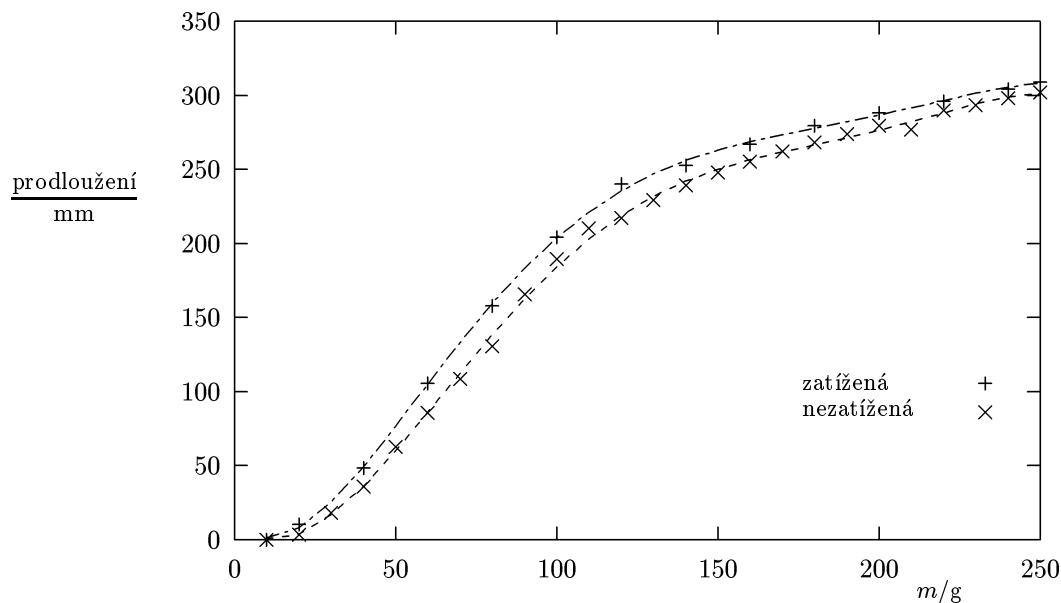
úměrná tahovému napětí a že po deformaci zaujímají tvar a velikost, jakou měly před ní. To ovšem neznamená, že se několikanásobnou deformací nezmění závislost deformace-tahová síla, jak jsme se mohli přesvědčit opakovaným měřením na jedné gumičce. Rozhodně nemůžeme očekávat lineární chování, které se objevuje především u kovů ve formě Hookova zákona, dalším rozdílem je například značná proměnnost průřezu gumičky, která při možném natažení až na sedminásobek původní délky příslušně zmenší průřez (neboť objem zůstává přibližně zachován). Jeden z hlavních problémů se týkal upevnění gumičky tak, aby se později nepřetrhla ve spoji, neproklouzla držákem a podobně. Většinou jste realizovali fixaci do svorek, pevný uzlík, v úvahu snad připadalo i lepidlo. Gumičku můžeme jako kruhovou smyčku zaklesnout například za hřebík a vynášenou sílu pak dělit dvěma. Pokud bylo nutné gumičku rozpojit, pak nejvhodnějším místem je zřejmě svár, neboť má jiné vlastnosti než zbytek gumičky. Neškodilo též uvést její parametry (tvar průřezu, délka).

Objevily se dva základní způsoby uspořádání: Na svisle upevněnou gumičku přidáváme závaží nebo ji napínáme siloměrem (třeba i ve vodorovné poloze). Většina z vás si pro představu provedla zkušební měření, aby zjistila obor zatížení gumičky. Výhodnější než používání závaží se ukázalo zatížení regulovat plynule, například doléváním vody. Mnohem přesněji tak určíme i okamžik přetržení.

V každém případě je nutné měnit hmotnost opatrně, aby nedošlo k rozkmitání soustavy. V blízkosti

kritického bodu by na gumičku působilo kromě tíhy i zrychlení síly pružnosti a gumička by se přetrhla dříve. Rozhodně nesmíme v průběhu měření gumičku na chvíli odtížit a pak pokračovat v měření závislosti. Mnohým pak vyšel na grafech docela hezký skok — parametry soustavy se změnila a přiblížily se druhé závislosti. K proměření charakteristiky již deformované gumičky neškodilo ji trochu „vytáhat“, mohli jsme se však spokojit i s působením předchozího měření.

Samotné prodloužení můžeme odečítat na paralelně umístěné stupnici sledováním značky na gumičce (tenký fix) nebo jazýčku umístěného na misce se závažím. Značka na gumičce má však tu nepříjemnou vlastnost, že se zvětšuje.



Obr. 29

V našem měření jsme gumičku pevně přivázali tak, aby uzel nepřispíval k celkovému prodloužení, které jsme měřili na katetometru, což je v podstatě dalekohled s libelou upevněný na svislé stupnici, v jehož zorném poli byl záměrný kříž, kterým jsme sledovali značku na gumičce. Jeho teoretická přesnost byla 0,1 mm, ovšem vzhledem k otřesům okolí ji odhadujeme na 1 mm. Samozřejmě nemá smysl měřit protažení volné gumičky, neboť je zprohýbaná. Narovnali jsme si ji malým závažím a tento stav jsme brali jako výchozí. Můžeme uvažovat o zanedbání chyb v určení hmotnosti závaží vzhledem k odečítání na stupnici. Závaží jsme přidávali po 10 g na rozsahu 10–250 g. Problémem bylo mimo jiné určení klidové polohy při měření již deformované gumičky, které bylo ztíženo jejím dopružováním. Výsledky prezentujeme formou grafu závislosti relativního prodloužení na napínací síle (viz obr. 29). V blízkosti nuly můžeme přibližně hovořit o lineárním chování, dále křivka některým připomínala odmocninu. Deformace se zde mění v čase bez přiloženého napětí.

Mezní tahové síly jsme změřili pro 3 stejné gumičky. Hrubou hodnotu jsme stanovili na 0,5 kg, přesněji pak 0,65 kg. Jednalo se však o gumičky již deformované, třetí nepoužitá vydržela až 0,9 kg! Poznámky ke grafické závislosti: Není vhodné spojovat body úsečkami (nezískáme tak žádnou další informaci), lepší je proložení křivky tak, aby body okolo ní byly rozmístěny rovnoměrně. Dobrý nápadem se též ukázalo změřit bod přetržení gumičky před a po deformaci, hodnota mezní síly se zmenší. Gumička se přetrhne v místě nějaké vady či v nejtenčím místě, kdyby byla kvalitní, přetrhla by se asi mnohem později. Někteří dokonce průběžně měřili průřez a pak mohli prodloužení vynášet v závislosti na tahovém napětí. Děkujeme (mimo jiné) Martinu Macáškově za zaslání gumičky, které jsme s radostí proměřili.

Závěr: Jak je vidět z vykresleného grafu, závislost deformace-tahová síla opravdu není lineární. Dále pozorujeme, že gumička už v minulosti deformovaná vykazuje menší tuhost než gumička deformovaná poprvé, lépe se natahuje.

Úloha V . Exp ... listopad

Když vezmeme list papíru a pustíme jej ve vodorovné poloze, začne pomalu padat. Pokud jej přehneme na polovinu, bude padat rychleji - toť známý fakt. Vaším úkolem je pomocí tohoto jevu zjistit, podle jakého vztahu se mění odporová síla vzduchu působící na papír (závisí na rychlosti lineárně či kvadraticky?). Pokuste se určit potřebné konstanty.

Pustíme-li list papíru tak, aby padal přímo (tj. neotáčel se, nevlnil, ...), zrychluje tak dlouho, než odporová síla vyrovná sílu tíhovou, poté již padá rovnoměrně a můžeme se zabývat měřením jeho rychlosti. Odporová síla závisí na proudění vzduchu kolem padajícího listu.

Pro malé rychlosti, kdy lze toto proudění považovat za laminární, je závislost odporové síly na rychlosti lineární. Pro těleso kulového tvaru o poloměru r ji popisuje Stokesův vzorec

$$F = 6\pi\eta r v ,$$

kde η je dynamická viskozita vzduchu.

Při větších rychlostech papíru vzniká turbulentní proudění. Těleso v tekutině tvoří víry, které zvyšují odporovou sílu. Ta pak závisí na druhé mocnině rychlosti podle Newtonova vztahu (který platí pro rychlosti menší, než je rychlost zvuku)

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2 ,$$

kde S je obsah průřezu papíru v rovině kolmé na vektor rychlosti, ρ je hustota vzduchu a C je konstanta, která charakterizuje tvar tělesa. V našem případě $C = 1,12$. Pro rychlosti blízké rychlosti zvuku závisí odporová síla na vyšších mocninách rychlosti (vytváří se rázová vlna), po překročení rychlosti zvuku se mocnina rychlosti snižuje.

Druh závislosti F na v zjistíme nejlépe tak, že ze vztahů

$$mg = kSv \quad \text{a} \quad mg = kSv^2$$

(k je konstanta zahrnující ostatní parametry) si vyjádříme rychlosti a budeme měnit některý z parametrů m , S , nebo g . Můžeme také předpokládat obecnou mocninu v^x a postupovat stejně.

A nyní k vlastnímu měření. Předpokládejme, že hledaná síla je úměrná ploše a neznámé mocnině rychlosti, tedy $F_{od} = kSv^x$. Pokud vezmeme dva stejné papíry a jeden z nich přehneme, tak po ustálení rychlosti bude platit $kS_1v_1^x = kS_2v_2^x = mg$. Využijeme-li toho, že $S_2 = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}S$, tak lze psát $kSv_1^x = \frac{1}{2}kSv_2^x$, po vykrácení kS a zlogaritmování dostaneme $\ln v_1^x = \ln \frac{1}{2}v_2^x$, z čehož při využití vztahů pro logaritmy ($\ln a^b = b \ln a$, $\ln ab = \ln a + \ln b$) plyne

$$x = \frac{\ln 2}{\ln v_2 - \ln v_1} .$$

V obecném případě pro poměr obsahů n ($n > 1$) dostaneme

$$x = \frac{\ln n}{\ln v_2 - \ln v_1} , \tag{20}$$

kde v_2 je ustálená rychlost menšího papíru.

Měřili jsme dobu pádu papírů A4, A4 jednou a dvakrát přehnutý, A3, A3 jednou, dvakrát a třikrát přehnutý. Protože se jednalo o měření krátkých časových úseků zatížených značnou systematickou chybou a náhodnými vlivy prostředí, tak byla měření pro papíry vzniklé přehnutím A4 provedena desetkrát (z A3 25×). Výsledné průměrné hodnoty a jim odpovídající rychlosti a mocniny jsou v tab. 1, kde h je výška z níž byly papíry puštěny, t doba jejich pádu ($\delta_t = \sqrt{(3\delta_{stat})^2 + \delta_{syst}^2}$, $\delta_{syst} = 0,2$ s – zapříčiněna reakční dobou pozorovatele – udává se 0,1–0,3 s), v je rychlost (relativní odchylka je stejná jako u času).

Tab 1.

plocha	A4	A4 /2	A4 /4	A3	A3 /2	A3 /4	A3 /8
$t[s]$	$1,36 \pm 0,20$	$1,10 \pm 0,20$	$1,11 \pm 0,25$	$1,47 \pm 0,21$	$1,31 \pm 0,20$	$1,20 \pm 0,20$	$0,39 \pm 0,20$
$v[m/s]$	$0,59 \pm 0,09$	$0,91 \pm 0,17$	$1,27 \pm 0,28$	$0,54 \pm 0,08$	$0,92 \pm 0,14$	$1,29 \pm 0,22$	$1,57 \pm 0,32$

Hodnoty t a v jsou psány na dvě platné cifry, protože vztah (20) je při bližších hodnotách v_1 a v_2 citlivý na jejich sebemenší změny. Hodnoty x získané po dosazení do vzorce jsou v tabulce 2.

Pro derivování znalé uvedeme, jak určit chybu x : Pokud je y funkcí veličin x_1, \dots, x_n a Δx_i jsou chyby měření jednotlivých veličin, pak výsledná chyba veličiny y je

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2},$$

kde $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ chápeme jako normální derivaci dle x_i , přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty. V našem případě dostaneme

$$\Delta x = \frac{\ln n}{(\ln v_2 - \ln v_1)^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta v_1}{v_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v_2}{v_2} \right)^2}.$$

Tab 2.

formát plochy	A4	A4	A4	A3	A3	A3	A3	A3	A3
	$1, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$1, \frac{1}{4}$	$1, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$	$1, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$	$1, \frac{1}{8}$
x	$1,6 \pm 0,9$	$2,1 \pm 1,8$	$1,8 \pm 0,6$	$1,3 \pm 0,5$	$2,1 \pm 1,4$	$3,5 \pm 4,8$	$1,6 \pm 0,4$	$2,6 \pm 1,2$	$2,0 \pm 0,5$

Z tabulky je zřejmé, že hodnoty se v rámci chyb hromadí u $x = 2$. Výjimkou jsou hodnoty $A3(1, \frac{1}{2})$ a $A3(1, \frac{1}{4})$, což lze připsat nestabilnímu pádu papíru velkých ploch (toto byl asi největší problém celého měření, protože bylo možno použít asi $1/4$ všech pádů, těch "nejstabilnějších").

Vyjdeme-li z předpokladu, že odporová síla je vyrovnána silou tíhovou, můžeme určit konstantu C přímo pomocí Newtonova vztahu:

$$F_G = mg = \frac{1}{2} C S \rho v^2 = F_o$$

Odtud již snadno určíme

$$C = \frac{2mg}{S \rho v^2}$$

Výsledné hodnoty C jsou v tabulce 3.

Tab 3.

plocha	A4	A4 /2	A4 /4	A3	A3 /2	A3 /4	A3 /8
C	3,8	3,2	3,2	4,5	3,1	3,1	4,2

U hodnot C neuvádíme chybu (relativní chyba by byla dvakrát větší než u rychlosti – zanedbáme-li chyby ostatních veličin) a to z následujících důvodů: Jde nám hlavně o odhad této konstanty, protože její přesné určení "neumožňuje" ani zadání – máme pracovat s papírem, který nepřiliš dobře drží při pádu tvar a proto hodnota konstanty je proměnná.

Závěr: Předpokládaná kvadratická závislost byla v míře odpovídající způsobu měření potvrzena. Konstanta úměrnosti C nám vyšla (i přes její značnou chybu) větší než je hodnota očekávaná teorií. Toto je způsobeno předpokladem o vyrovnání síly odporové a tíhové již od začátku pádu, a proto nám odporová síla vychází větší.

Úloha VI. Exp ... atmosférický tlak

Změřte atmosférický tlak v místě vašeho bydliště a to touto metodou: Ponořte do nádoby s vodou prázdnou skleničku dnem vzhůru a z toho, jak vysoko se dostane voda ve skleničce spočítejte atmosférický tlak. Znáte hustotu vody ρ a tíhové zrychlení g . Nezapomeňte uvést místo a čas měření.

Teorie

V podstatě se vyskytly tři různé metody měření.

Izotermická:

Ponořování láhve jsme považovali za izotermický děj. Pro ten platí $p_A V_1 = p V_2$, kde V_1 je objem prázdné nádoby a V_2 objem ponořené nádoby. Pro ponořenou láhev můžeme spočítat p pomocí $p = p_A + h\rho g$, kde h je rozdíl hladin vně a uvnitř nádoby. Nakonec tedy dostaneme

$$p_A = \frac{h\rho g}{\frac{V_1}{V_2} - 1}.$$

Pokud vyjádříme $V_2 = V_1 - W$, kde W je objem vody, který se dostal do sklenice, dostaneme po úpravě vztah

$$p_A = \frac{h\rho g(V_1 - W)}{W}.$$

Hlavní problém této metody spočívá v zajištění izotermičnosti děje. Je třeba velmi pomalu ponořovat a čekat na vyrovnání teploty.

Další důležitou roli hrálo i zajištění co největších rozdílů mezi hladinami, čili co největší h a W , abychom dosáhli malých relativních chyb.

Adiabatická:

Pokud zajistíme adiabatičnost děje, můžeme počítat $(V_2/V_1)^\kappa = p_A/(p_A + h\rho g)$, odtud dostaneme

$$p_A = \frac{h\rho g}{\left(\left(\frac{V_1}{V_1 - W}\right)^\kappa - 1\right)}.$$

Zajistit adiabatičnost děje je ovšem ještě obtížnější než zajistit jeho izotermičnost.

Elektrolytická:

Tuto metodu nám poslal Karel Kouřil. Je založena na elektrolýze vody. Do odměrného válce byl jímán pouze vodík. Jeho látkové množství se dá spočítat dle $n = \frac{It}{2eA}$, kde I je proud měřený ampérmetrem, t je doba elektrolýzy, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C je elementární náboj a $A = 6 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ je Avogadrova konstanta.

Poté pomocí rovnice ideálního plynu určíme $p = nRT/V$ kde $R = 8,31$ Jmol⁻¹K⁻¹.

Navíc musíme počítat, že uvnitř válce jsou nasycené vodní páry o tlaku p_p . Pro atmosférický tlak tedy platí $p_A = p + p_p$.

Výsledky měření

Provedli jsme jednu sadu měření, kterou jsme se pokusili interpretovat pomocí izotermického a adiabatického modelu. Nakonec jsme výsledky, obou modelů porovnali.

Použité konstanty

hustota vody $\rho = 1000$ kgm⁻³

tíhové zrychlení $g = 9,81$ ms⁻²

objem láhve $V_1 = 765$ ml

$\kappa = 1,4$ pro vzduch

Pro izotermický model tedy dostaneme:

Měření	W [ml]	h [cm]	p_A [kPa]	$\Delta^2 p_A$ [kPa ²]
1	10,8	13,9	95,0	11,4
2	9,5	14,8	115,2	282,5
3	9,2	11,7	94,1	18,6
4	8,7	12	102,1	13,7
5	8,5	11,3	98,4	0,0
6	10,3	13,1	93,9	19,7
7	10,1	13	95,1	10,8
8	8,6	10,9	93,8	20,8
9	10	13,5	99,7	1,8
10	9,2	12	96,5	3,6

Průměrný atmosférický tlak $\overline{p_A} = 98$ kPa

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(p_A) = 7$ kPa, k hrubé chybě nedošlo

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\overline{p_A}) = 2$ kPa

Relativní systematická chyba je $\delta_{SYS} = 7\%$

Tedy $p_A = (98 \pm 9)$ kPa.

Pro adiabatický model dostaneme:

Měření	W [ml]	h [cm]	p_A [kPa]	$\Delta^2 p_A$ [kPa ²]
1	10,8	13,9	67,7	5,9
2	9,5	14,8	82,1	143,4
3	9,2	11,7	67,0	9,4
4	8,7	12	72,8	7,0
5	8,5	11,3	70,2	0,0
6	10,3	13,1	66,9	10,1
7	10,1	13	67,8	5,5
8	8,6	10,9	66,9	10,4
9	10	13,5	71,1	0,9
10	9,2	12	68,7	1,8

Průměrný atmosférický tlak $\overline{p_A} = 70$ kPa

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(p_A) = 5$ kPa, k hrubé chybě nedošlo

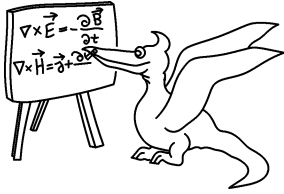
Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\overline{p_A}) = 1$ kPa

Relativní systematická chyba je $\delta_{SYS} = 7\%$

Tedy $p_A = (70 \pm 6)$ kPa.

Diskuze

Z výsledků vidíme, že našemu měření odpovídá izotermický model mnohem lépe než adiabatický. Teplota v láhvi se ustálila na teplotě okolí, neboť vyměňovala teplo, o adiabatickém ději tedy nemůže být ani řeč. Jelikož jsme zamezili nerovnoměrnému ohřívání láhve našima rukama a zajistili stejnou teplotu vody jako vzduchu, je měření relativně přesné.



Seriál o moderní optice

Letošní seriál na pokračování byl věnován moderní optice. Pokusili jsme se vás přesvědčit, že optika nejsou jen obyčejné čočky, ale v posledním století to jsou i lasery, holografie, optické komunikace, chlazení atomů hluboko k absolutní nule...

Ale k tomu všemu se teprve postupně dostaneme. Nejdříve se podíváme, co dokáže dnešní optika s prostředky objevenými v minulých stoletích. Náš první pohled bude směřovat především do astronomie. V dalších dílech seriálu se ještě vrátíme k některým dalším optickým aplikacím, které jsou založeny na principech paprskové optiky. Pak si povíme něco o tom, proč lidé vymysleli vlnovou optiku a k čemu je dobrá, podíváme se na to, jak funguje optické vlákno. Samozřejmě nezapomeneme na to, čím si do optického vlákna svítíme — na laser. To už sice spadá do tzv. kvantové optiky, ale nebojte se, i bez znalostí kvantové mechaniky se obejdeme a vše, jak doufám, snadno pochopíte. A když už budeme vědět, jak funguje laser, tak se ještě podíváme na to, jak zařídit, aby laser generoval krátké světelné impulsy, kterými můžeme „fotografovat“ velmi krátké procesy (až 10^{-15} s). Dost bylo řečí, přikročme k vlastnímu výkladu.

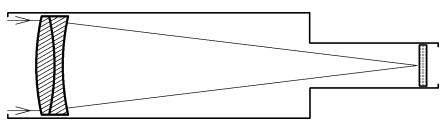
Klasické optické přístroje

Historie optických přístrojů začíná vynálezem *brýlí* na konci 13. století. Jako autoři jsou uváděni Roger Bacon a Salvino degli Armati. Asi nejjednodušším zařízením je *camera obscura* Leonarda da Vinciho. Je to prostá dírková komora. Funguje tak, že na určitý bod stínítka mohou dopadnout pouze paprsky přicházející z určitého směru, tj. z otvoru. Čím menší otvor se nám podaří vyrobit, tím slabší a ostřejší obraz vznikne na stínítku. S obskurní kamerou se můžete setkat i volně v přírodě. Například mezírky mezi listy košatého stromu způsobí, že se na zemi pod stromem objeví malá sluníčka. A kdyby zrovna bylo částečné zatmění Slunce, byly by vidět malé měsíčky. Na přelomu 16. a 17. století se objevují jednoduché mikroskopy. Holanďan Leeuwenhoek s tím svým objevil nálevníky a bakterie.

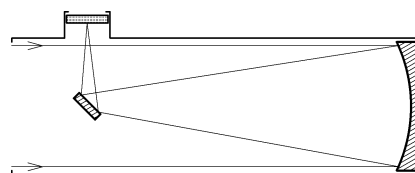
Astronomické dalekohledy. Hlavní částí dalekohledu je *objektiv*, který vytváří obraz předmětu v ohniskové rovině. Obraz sledujeme *okulárem* jako lupou. Objektivy mohou být tvořeny soustavou čoček — takovému dalekohledu pak říkáme *refraktor*, nebo zrcadel — tzv. *reflektor*. Základním parametrem dalekohledu je *průměr objektivu*, neboť tím je určeno, kolik světla je schopen dalekohled soustředit (pro porovnání — lidské oko může mít průměr vstupní pupily až 8 mm).

Dosud nikdo nevymyslel dalekohled, který by neměl žádnou vadu. Pro konkrétní pozorování se vybere ten nejvýhodnější systém, a proto se můžeme s většinou následujících typů setkat na světových observatořích, hvězdárnách i u astronomů amatérů.

1. **Refraktor.** První čočkový dalekohled sestrojil holanďan H. Lippershey r. 1608, ale na oblohu se poprvé podíval až o dva roky později Galileo Galilei. Jeho dalekohled měl objektiv tvořený spojkou a okulár rozptylkou. V r. 1610 Johan Kepler navrhnul dalekohled, jehož okulárem je spojka. Dnes se refraktory konstruují s vícečočkovými objektivy, aby se snížily jejich optické vady (viz níže) a také okuláry jsou podstatně složitější.
2. **Gregory.** Zrcadlový dalekohled přišel na svět až r. 1661. Gregoryho přístroj měl jako objektiv parabolické zrcadlo, uprostřed byl vyvrtaný otvor. Pomocné eliptické zrcátko bylo umístěno za ohniskem objektivu a odráželo paprsky zpět do otvoru v hlavním zrcadle.



refraktor

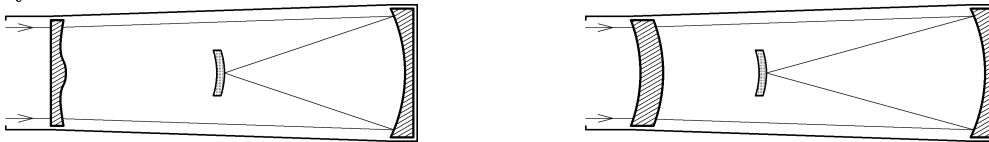


Newtonův dalekohled

3. **Newton.** Isaac Newton použil r. 1671 namísto eliptického zrcátka rovinné a světlo vyvedl na stranu tubusu. Tento dalekohled je dnes mezi astronomy amatéry velice populární, zvláště

v kombinaci s Dobsonovou montáží. Tubus je volně uložen v těžišti na destičkách vyrobených z teflonu, který má velký rozdíl mezi statickým a dynamickým třením.

4. **Cassegrain.** Dalšího zkrácení tubusu dalekohledu lze dosáhnout zařazením vypuklého hyperbolického zrcátka, které nejen odráží paprsky do otvoru v hlavním zrcadle, ale navíc prodlužuje ohniskovou vzdálenost.
5. **Coudé.** Svazek paprsků odrážejících se od hlavního zrcadla dopadá na pomocné vypuklé zrcadlo, od kterého se pomocnými rovinnými zrcadly vyvádí do polární osy montáže. Ohnisko tedy leží stále na stejném místě nezávisle na tom, kam míří dalekohled. To je výhodné zejména ve velkých spektrografech. Tento systém můžete najít například na našem největším dalekohledu — Ondřejovském dvoumetru.
6. **Ritchey–Chrétien.** Dalekohled je podobný typu Cassegrain, ale primární i sekundární zrcadlo je hyperbolické. Potlačíme tím sférickou aberaci a komu. Jedná se o moderní systém, který je použit i na Hubblově kosmickém dalekohledu.
7. **Schmidt.** Tento systém se používá jako fotografická komora. Objektívem je sférické zrcadlo, jehož optické vady jsou odstraněny korekční deskou. Tato čočka je uprostřed vybroušena jako spojka, na okrajích jako rozptylka a umisťuje se do dvojnásobné ohniskové vzdálenosti od zrcadla. Ohnisková rovina je sférická, fotografický film se tedy musí zdeformovat.
8. **Maksutov.** Sférickou aberaci kulového zrcadla lze odstranit též zařazením menisku, jak je tomu u systému Maksutov.

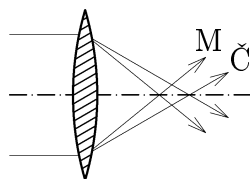


Schmidtova a Maksutovova komora

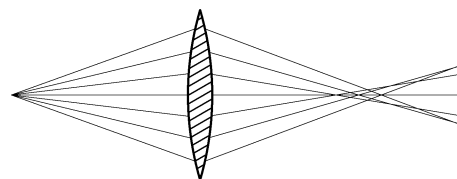
Pokud by Vás zajímalo, jak velké dalekohledy je člověk schopen postavit, vězte, že největší refraktor o průměru objektivu 102 cm mají na Yerkes Observatory, USA. Funguje už více než sto let. Mezi reflektory si primát zatím drží dvojice dalekohledů Keck I a Keck II na sopce Mauna Kea, na Havajských ostrovech. Zrcadla nejsou vyrobená z jednoho kusu, ale ze 36 šestiúhelníkových segmentů, celkový průměr činí 10 m. Velmi důležitou úlohu u nich hraje tzv. *aktivní optika*, což je systém citlivých detektorů a podpěr spojených přes počítač, který zajišťuje dokonalý tvar zrcadla.

Optické vady. Při každém průchodu světla optickým rozhraním je část světla pohlcena a část odražena. Abychom tyto ztráty světla minimalizovali, snažíme se konstruovat astronomický dalekohled s co nejmenším počtem optických členů. Je to trochu v protikladu s požadavkem na ideální obraz bez optických vad, obecně totiž platí, že ke korekci každé optické vady potřebujeme jedno optické rozhraní. Zde je stručný výčet optických vad, které jsou nápadné, zvláště když pozorujete hvězdné nebe.

1. **Chromatická aberace.** Příčinou chromatické aberace (česky: barevné vady) je závislost indexu lomu světla na vlnové délce (nepřímá úměra). Při zobrazování bodového zdroje bílého světla jednoduchým čočkovým objektivem dostaneme v ohniskové rovině neostrý, na okrajích zabarvený obraz. Řešením je buď použití zrcadlového objektivu anebo *achromátu*, který tvoří spojka z korunového skla a rozptylka z flintového skla, které má větší index lomu. Rozptylka musí mít větší ohniskovou vzdálenost než spojka, aby výsledná soustava byla spojná.



Barevná vada

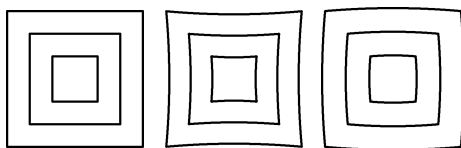


Otvorová vada

2. **Sférická aberace.** Též otvorová chyba — je způsobena kulovým tvarem čoček nebo zrcadel. Paprsky procházející spojnou čočkou dále od optické osy se lámou více než paprsky blízko optické osy (paraxiální). U rozptylky je tomu opačně, a proto můžeme sférickou a zároveň chromatickou aberaci korigovat vhodnou kombinací spojky a rozptylky. U zrcadel lze tuto

chybu napravit přechodem od sférické plochy k parabolické anebo použitím korekční čočky (Schmidtův dalekohled) a menisku (Maksutovův dalekohled).

3. **Koma.** Při komě se bodový zdroj mimo optické osy zobrazí ve tvaru komety s jasným jádrem a širokým vějířem směřujícím od středu zorného pole. Objektiv s potlačenou komou se nazývá *aplanát*.
4. **Astigmatismus.** Astigmatické svazky nevytvářejí nikde bodové ohnisko. Obrazem bodového zdroje je krátká úsečka (v rovinách zvaných fokály) nebo neostrý kroužek (mezi fokálami). Astigmatismus a koma se vyskytují i u parabolických zrcadel.
5. **Sklenutí.** Tato vada spočívá v tom, že rovina kolmá na optickou osu se zobrazí jako část křivé plochy (viz Schmidtova komora). Při pozorování obrazu okulárem tedy nelze zaostřit obraz v celém zorném poli.
6. **Distorze.** Při zkreslení zorného pole se správně zobrazují jednotlivé body, jejich konfigurace je však narušena. Na obrázku je vidět, že čtvercová síť se může zobrazit ve tvaru *podušky* nebo *soudku*.



Úloha S . I ... dalekohledy a čočky

a) Kolikrát slabší hvězdy bude schopen zaznamenat dalekohled VLT, který se staví na La Silla, Chile, než lidské oko? Je vybaven čtyřmi zrcadly, každé má průměr 8 m, expoziční doba pořizovaných snímků je 1000 s. Lidské oko shromažďuje světlo po dobu asi 0,2 s.

b) Vymyslete jednoduchou metodu, kterou rozlišíte spojky od rozptylek s velkými ohniskovými vzdálenostmi (> 20 m), tj. že spojky nefungují jako lupa. Jediné pomůcky, které máte, jsou vaše oči, ruce, mozek a okolní zdi. (Nápověda: sežeňte třeba brýlovou spojku a rozptylku a experimentujte.)

a) Množství světla, které dalekohled VLT (Very Large Telescope) nebo lidské oko shromáždí, je přímo úměrné sběrné ploše S a expoziční době t . VLT tedy shromáždí

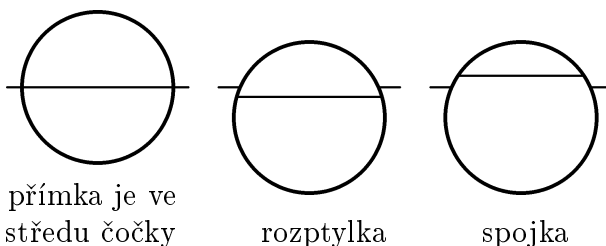
$$\frac{4S_{\text{VLT}}t_{\text{VLT}}}{S_{\text{oko}}t_{\text{oko}}} = \frac{4 \cdot 8^2 \cdot 1000}{0,008^2 \cdot 0,2} = 2 \cdot 10^{10}$$

krát více světla než jedno lidské oko. Čtyřka v čitateli zahrnuje 4 zrcadla, ze kterých se dalekohled skládá.

Někteří z vás trefně poznamenali, že jsme opomenuli uvést citlivosti detektorů světla (CCD kamery a oka) a nemůžeme se tedy ptát na to, kolikrát slabší objekty budou dalekohledem vidět.

Více informací o tomto dalekohledu můžete najít na internetu na <http://www.eso.org>.

b) Oceňujeme velké množství metod, jak rozlišit spojky od rozptylek, se kterými jste přišli. Nejvíce se nám líbilo řešení s rozlomením čočky a proměřením tloušťky na okraji a ve středu. Mnohem levnější je však tento úplně jednoduchý způsob: podržte si čočku v natažené ruce, podívejte se skrz ni a pohybujte s ní směrem dolů, pokud se vám zdá, že obraz ubíhá dolů, jedná se o rozptylku, ubíhá-li obraz nahoru, pak je to spojka.



Většina ostatních metod buď potřebuje nějaké dodatečné pomůcky, které v zadání nebyly zmíněné (např. dokonale hladká plocha, zdroj kolimovaného světla), anebo nefunguje pro velké ohniskové vzdálenosti. Skuste si spočítat, jaký je rozdíl mezi ideální rovinou a koulí u lámavé

plochy ploskovypuklé čočky s ohniskovou vzdáleností 20 metrů. Vyjde vám, že odchyłka je několik setin milimetru!

Spektrum

V tomto díle seriálu si povíme něco o pojmu spektrum a zmíníme astronomický přístroj zvaný spektrograf. Ten používají astronomové k pozorování spektra Slunce, ale principů použitých při jeho konstrukci se používá i jinde. Stejně tak i koutový odražeč, který zmíníme vzápětí, nalezne použití v astronomii, ve fyzice i běžném životě.

Spektrum. Spektrem nazývají fyzikové vztah intenzity záření v závislosti na frekvenci či vlnové délce. Lze nakreslit jednoduchý graf zobrazující spektrum libovolného záření. Na vodorovnou osu nanášíme frekvenci a na svislou intenzitu. Pokud jde o viditelné záření, jednotlivým vlnovým délkám odpovídá různá barva a intenzita je vlastně dána jasnem té které barvy. Podle toho, z čeho pochází zkoumané záření, můžeme obdržet spojité spektrum, diskrétní spektrum (jednotlivé čáry), případně kombinace obojího.

Světlo, které vidíme vlastníma očima je svou podstatou elektromagnetické záření. Je však jen zlomkem vlnových délek, které můžeme pozorovat jinými přístroji. Elektromagnetické vlny pozorujeme od velmi dlouhých vlnových délek ($\text{km} \div \text{m}$, pak mluvíme o radiovém záření), přes mikrovlnnou oblast, kde se účinky světla projevují jako tepelné záření, dále přes viditelnou oblast ($\lambda = 400 \div 750 \text{ nm}$), až po velmi krátké vlnové délky (rentgenové záření, záření γ a kosmické záření).

Když se díváme na Slunce nevyzbrojeným okem, vidíme spektrum, které přibližně odpovídá záření černého tělesa. To je teoretický model, který zavedl Max Planck a vysvětluje, proč všechna tělesa, která zahřejeme, začnou svítit. Ukazuje se, že tzv. tepelné záření, které vysílají všechna tělesa při zahřátí na vyšší teplotu, nezávisí na materiálu, ze kterého je předmět vyroben. Za předpokladu, že světlo je kvantováno, odvodil Max Planck pro intenzitou záření B_ν na určité frekvenci ν tento vztah:

$$B_\nu(T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1},$$

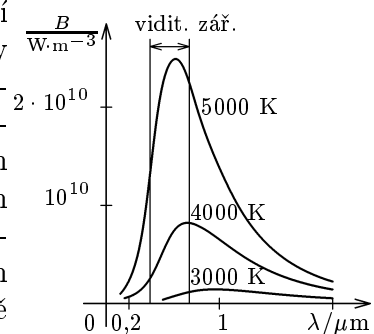
kde $h = 6,626075 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ je Planckova konstanta, $k = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ Boltzmannova konstanta, c rychlost světla ve vakuu a T absolutní teplota tělesa.

Při pokojové teplotě je maximum vyzáření energie v oblasti vlnových délek $10 \mu\text{m}$. Protože tato vlnová délka není ve viditelné oblasti, nepozorujeme, že by tělesa s pokojovou teplotou svítla. Pokud začneme těleso ohřívát, začne se maximum přesouvat ke kratším vlnovým délkám (do viditelné oblasti). Porovnáním tvaru spektra (např. z hvězdy) s teoreticky odvozeným tvarem spektra, můžeme určit povrchovou teplotu hvězdy. Teplota uvnitř hvězdy je mnohem vyšší.

Když se na sluneční spektrum podíváme podrobněji, např. pomocí spektrografu, uvidíme v něm tmavé části, tj. že některé vlnové délky ve spektru chybí. Těmto tmavým místům říkáme spektrální čáry, protože ve spektru rozmítnutém na stínítku se jeví jako tmavé čáry. Takovéto čáry vznikají při průletu světla například plynem. Elektron se v atomovém obalu nemůže vyskytovat v libovolném energetickém stavu, ale jen na určitých energetických hladinách. Mezi těmito hladinami může přeskakovat, jen když je mu dodáno správné kvantum energie. Foton při průletu takovýmto prostředím je tedy přednostně zachycen, je-li jeho energie rovna rozdílu některých dvou hladin. Tomuto procesu říkáme absorpce. Takovýto foton pak ve výsledném spektru chybí a my pozorujeme jednotlivé tmavé spektrální čáry. Tomuto typu spektra říkáme absorpční. Při opačném ději, kdy plynné prostředí naopak dodává fotony do světelného svazku a vznikají světlé spektrální čáry, vzniká emisní spektrum.

Např. atom vodíku pohltí foton o vlnové délce 656 nm (tj. energii $1,9 \text{ eV}$) a tím dojde k přeskoku elektronu v jeho atomovém obalu z druhé energetické hladiny na třetí.

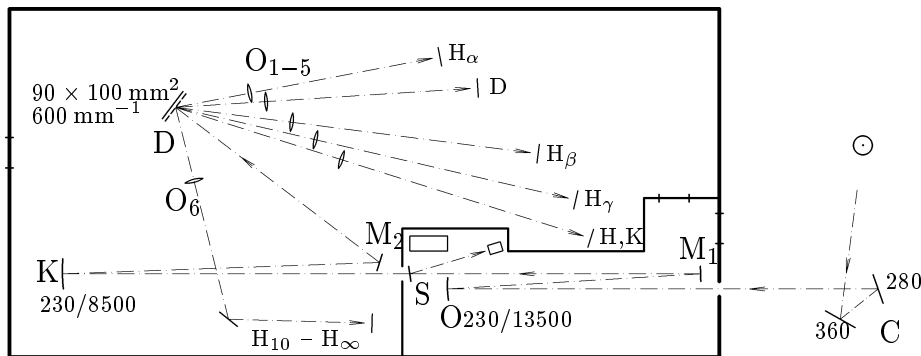
Množství spektrálních čar a jejich rozmístění je charakteristické pro každou konkrétní látku. Toho se využívá při určování neznámých látek. Čím je látka složitější, tj. má více molekul a více



Obr. 30

vazeb mezi atomy, resp. okolí atomu je složitá (např. v pevné látce), tím je množství čar větší. Pro velké organické molekuly je množství čar tak veliké, že je již nemůžeme rozlišit a splývají v celé pásy. Pak hovoříme o absorpčních pásech.

Spektrograf. V astronomické observatoři Akademie věd České republiky v Ondřejově*) pracuje zajímavý přístroj nazývaný spektrograf. Tento „spektrák“ slouží k pozorování slunečního povrchu, zvláště se pak zaměřuje na sledování slunečních erupcí s vysokým časovým rozlišením. Jedná se o jeden z největších spektrografů svého druhu ve střední Evropě. Jeho optické schéma vidíte na obrázku.



První částí spektrografu je nepohyblivý horizontální dalekohled, který vytváří obraz slunečního disku. Objektivem (O) je parabolické zrcadlo o průměru 230 mm a ohniskové vzdálenosti 13,5 m. Aby dalekohled nezabíral příliš velký prostor, je na protější stěně rovinné zrcadlo (M_1). Sluneční světlo se do dalekohledu dostává pomocí coelostatu (C), který sestává ze dvou zrcadel o průměru 360 mm a 280 mm. Na štěrbině spektrografu (S) se tedy objeví obraz Slunce; štěrbinu je řešena jako skleněná destička, která propustí část světla svislou průhlednou štěrbinou a zbytek odrazí do televizní kamery. Na obrazovce pak můžeme pohodlně sledovat a vybírat místo na Slunci, které chceme spektrografem pozorovat. Rozbíhavý svazek světla, který prošel štěrbinou, poté dopadne na kolimátor (K) (parabolické zrcadlo), který z něj vyrobí svazek kolimovaný (tzn. rovnoběžné paprsky). Před dopadem světla na disperzní optický člen se ještě paprsky odrazí od rovinného zrcadla (M_2). Disperzním členem (tj. tím, co světlo rozkládá na spektrum) je **difrakční mřížka** (D) na odraz, která má 600 vrypů na mm. Spektrum je snímáno paralelně několika kamerami, které jsou složeny z objektivů (O_{1-6}) a vlastních detektorů (fotografický film 24×36 mm s citlivostí 400 ASA anebo televizní kamera).

Spektrum není ve spektrografu zaznamenáno celé, ale jsou vybrány jen jeho zajímavé oblasti — okolí výrazných spektrálních čar, např. čáry Balmerovy série vodíku H_α , H_β , H_γ , sodíková čára D, vápníkové H a K, čáry železa a dalších chemických prvků (na optickém schématu je vyznačeno, která kamera snímá kterou spektrální čáru). Spektrální čáry jsou velkým zdrojem informací o fyzikálních podmínkách v místě svého vzniku. Je třeba si všimnout šířky spektrální čáry, jejího posunu, případného rozštěpení — z těchto údajů pak lze spočítat jaká je v atmosféře hvězdy teplota, tlak, hustota, magnetické pole, jakou radiální rychlostí se vzhledem k pozorovateli objekt pohybuje, atd.

Koutový odražeč. Další optickou pomůckou z výzbroje astronomů a kosmonautů je koutový odražeč. Jeho název vystihuje jeho konstrukci. Skládá se ze tří navzájem kolmých rovinných zrcadel, která tvoří vnitřní roh krychle. Toto uspořádání má zajímavou vlastnost — paprsek, který na odražeč dopadne z určitého směru, je odražen zpět do směru odkud přišel, a to pro libovolnou polohu odražeče a směr paprsku.

Koutový odražeč používají mimo jiné i zeměměřiči a geodetici. Když potřebuje experimentátor plynule prodloužovat optickou dráhu paprsku, upevní koutový odražeč na pojízdou dráhu. Šlo by použít i obyčejné zrcátko, ale to by vyžadovalo dokonalé nastavení a naprostou rovinnost dráhy.

Při své první návštěvě Měsíce umístili astronauti na povrchu Měsíce takovýto odražeč, který byl použit pro přesné určení vzdálenosti Země–Měsíc**). Z pozemské laboratoře byl vyslán k Měsíci

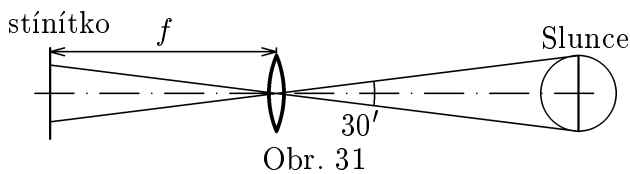
*) 40 km JV od Prahy, od května do září se tam pořádají prohlídky pro veřejnost

**) od té doby tam leží a každý si může změřit, jak je daleko k Měsíci

laserový paprsek, který se odrazil od koutového odražeče. Jistou dobu mu trvalo, než urazil dvojnásobnou vzdálenost Z–M a vrátil se na Zemi. Ze známé rychlosti světla $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$ a této doby vypočteme hledanou vzdálenost. S obyčejným zrcátkem by toto měření nešlo uskutečnit, protože paprsek zrcátkem odražený by mířil mimo Zemi a tudíž bychom jej nemohli detekovat.

Úloha S . II ... spektra, spektrografy a koutové odražeče

- Jak velký obraz Slunce se vytváří na štěrbině Ondřejovského spektrografu?
- Pokuste se přijít na důvod, proč se pro napájení spektrografu používají dvě zrcadla (coelostat), a nikoli jen jedno zrcadlo (heliostat).
- Jak dlouho čekali pozorovatelé na Zemi, než se jim vrátil signál vyslaný k Měsíci, který se na Měsíci odrazil od koutového odražeče?
- Dokažte, že tři na sebe navzájem kolmá zrcadla, použitá v koutovém odražeči, mají tu výhodnou vlastnost, že paprsek od nich odražený se šíří v **přesně** opačném směru, než přišel.
- Při noční jízdě automobilem pozorujeme na krajnici oranžové zářící předměty. Kde se bere energie na jejich „svícení“? Proč řidič nevidí ve zpětném zrcátku stejné svítící předměty?



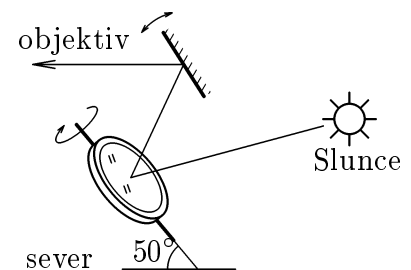
a) Úhlový rozměr Slunce, jak jej vidíme ze Země, je přibližně $30'$.*) Podívejme se tedy, jak objektiv s ohniskovou vzdáleností $f = 13,5\text{ m}$ zobrazí paprsky přicházející z okrajů slunečního kotouče. Na obrázku jsme si kvůli přehlednosti dovolili místo

zrcadlového objektivu nakreslit čočkový, aby se nám nemíchal předmětový a obrazový poloprostor. Víme, že ostrý obraz vznikne v ohniskové rovině, neb Slunce je v porovnání s ohniskovou vzdáleností velmi daleko. Dále využijeme skutečnosti, že paprsky procházející středem čočky nejsou nijak ovlivněny. Z obrázku je patrné, že na stínítku vznikne obraz slunečního kotouče o průměru $d = 2 \operatorname{tg} \frac{30'}{2} f = 11,8\text{ cm}$. (Pro malé úhly α platí: α v radiánech = $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$.)

b) Důvod je docela jednoduchý — při pozorování Slunce je třeba, aby se jeho obraz na štěrbině spektrografu neotáčel s časem. S jedním zrcadlem však tuto podmínku nesplníme. (Celý spektrograf je velmi složité a velké zařízení (zabírá celou budovu) a proto potřebuje, aby do něj vstupoval obraz Slunce pořád ze stejného směru.)

Coelostat na obrázku 32 funguje následovně: první zrcadlo se během dne otáčí okolo osy, která je rovnoběžná se zemskou, opačným směrem než rotuje zeměkoule a poloviční úhlovou rychlostí. Vůči vodorovné rovině je tedy osa skloněná o úhel rovnající se zeměpisné šířce. Poloha druhého zrcadla se musí měnit během roku, neboť se mění tzv. deklinace Slunce. Prostě v létě cestuje Slunce po obloze vysoko a v zimě naopak nízko. Abychom světlo dostali do horizontálního dalekohledu musíme druhé zrcadlo vhodně natočit okolo vodorovné osy.

Proč při používání heliostatu dochází ke stáčení obrazu si osvětlíme na dvou příkladech. Představme si nejprve, že je rovnodennost a poledne. Slunce v tu dobu svítí nad jižním obzorem ve výšce 40° . A ještě předpokládejme, že na slunečním kotouči je nakreslena svislá úsečka, která nám bude indikovat otočení kotouče. Jediné zrcadlo heliostatu stačí natočit k jižnímu obzoru, sklonit o 20° vůči vodorovné rovině a poslat světlo do horizontálního dalekohledu jehož objektiv je otočen k severu. Ale o šest hodin později, když Slunce zapadá, bude situace jiná. Úsečka na kotouči **nebude** kolmá k obzoru, zrcadlo musí být postaveno svisle, protože Slunce je na obzoru a my vlastníme horizontální dalekohled. Je zřejmé, že na stínítku nemůžeme získat stejnou svislou úsečku jako v poledne.



Coelostat nám však pomůže: po odrazu na prvním zrcadle bude úsečka ve stejné rovině jako jsou středy zrcadel a objektivu (proč tomu tak je nám pomůže pochopit představa roviny určené

*) Toto je číslo dobré k zapamatování. Mimochodem, úhlový průměr Měsíce se mění od $29'$ do $33'$ a díky tomu můžeme vidět úplná nebo prstencová sluneční zatmění.

středů zrcadel a středem slunečního kotouče). Tu nepříjemnost, že paprsky po odrazu směřují vysoko do nebes a nikoli do dalekohledu, snadno napravíme druhým zrcadlem.

Doufáme, že jsme vás nezklamali tím, že jsme neuvedli žádné „matematické“ řešení, ale spíše návod, abyste přesvědčili sami sebe, že je to správné řešení. Pro jiné denní a roční doby je situace ještě trochu náročnější na prostorovou představivost, ale myslíme, že to přesto můžeme nechat na vás.

c) Označme vzdálenost mezi pozorovatelem na Zemi a místem, kde je umístěný koutový odražeč jako d . Pak musel světelný signál procestovat dráhu $2d$ a při rychlosti jakou cestoval mu to trvalo $\frac{2d}{c} \doteq 2,6$ s, pokud vezmeme, že vzdálenost povrchů Z–M je 380 000 km (v tabulkách udávaná vzdálenost Z–M je vzdálenost středů). Provedeme-li měření opravdu přesně, lze určit vzdálenost mezi pozorovatelem a místem, kde je koutový odražeč umístěn, s přesností lepší než 1 cm.

d) Mějme paprsek, který se šíří v prostoru směrem, který můžeme charakterizovat jednotkovým vektorem (x, y, z) . Nechť dopadne na zrcadlo, které je umístěno v rovině xy , tj. kolmé k ose z . Co se stane se směrovým vektorem paprsku? Změní se jeho složka ve směru osy z , směr šíření v rovině xy se nezmění a velikosti složek vektoru zůstanou zachovány. Dostaneme paprsek se směrovým vektorem $(x, y, -z)$. Ve směrovém vektoru změní znaménko ta složka, která je kolmá k rovině zrcadla.

Zaveďme si v prostoru kartézský souřadný systém tak, že jednotlivá zrcátka v koutovém odražeči budou splývat s rovinami xy , yz a xz . Pokud se paprsek odrazí od všech třech zrcátek, změní se postupně všechny tři složky jeho směrového vektoru. Z původního vektoru (x, y, z) dostáváme vektor $(-x, -y, -z) = -(x, y, z)$, což je vektor přesně opačného směru než vektor, který do odražeče přišel.

e) To, co vidíme v noci na okraji cest jsou odrazky na patnicích kolem silnic. Vlevo jsou bílé a vpravo oranžové, aby řidič hned poznal, jestli má patník objet zprava (příkopem) nebo zleva (po silnici) v případě oranžové odrazky.

Odrazka je další aplikací koutového odražeče. Že je její barva jiná, než barva dopadajícího světla, je způsobeno tím, že před vlastní odraznou plochou je příslušně zbarvený průhledný materiál.

U okrajů vozovky tedy vidíme světlo, které pochází z našich vlastních reflektorů a odráží se v koutovém odražeči (=odrazka). Za automobilem nic vidět není, protože vzadu není dostatečně silný zdroj světla, které by se mohlo odrážet zpět (koncová světla nejsou směrová a mají menší výkon než čelní reflektory).

Některé „svítící“ dopravní značky a reklamy nejsou z koutových odražečů, ale z drobných skleněných kuliček. Posvítíme-li na kuličku, ne všechny paprsky se odrazí přesně zpět. Existují však některé paprsky, které se odrazí zpět, a ty pak vytváří dojem, že značka svítí.

Světlo jako vlna

Chování světla popisujeme někdy jeho vlnovými vlastnostmi, někdy jeho korpuskulárními (částicovými) vlastnostmi. Tomuto „rozpolcení“ se říká dualita vlna-částice. V případě, že se světlo chová jako částice, mluvíme o fotonu, nejmenším množství světla. Vlnové vlastnosti světla můžeme pozorovat například při interferenci světla na tenké olejové vrstvičce na kaluži, kdy vidíme duhové proužky. Když zachytíme světlo na fotografickou emulzi a podíváme se na ni podrobně mikroskopem, uvidíme jednotlivé malé tečky. V místech, která na fotografii vidíme tmavší je teček více, ve světlejších méně a v bílých místech nejsou téměř žádné tečky. Tečky jsou místa, kde foton interagoval s emulzí. Na místě tečky byl původně krystalek bromidu stříbrného, který se díky energii fotonu rozpadl a po vyvolání se vyloučil oxid stříbra, který se jeví černě. Když mluvíme o energii fotonu, řekněme si jaká vlastně je. Energie, kterou nese foton je závislá na jeho barvě, tj. na vlnové délce či frekvenci. Platí jednoduchý vztah pro energii fotonu o vlnové délce λ , resp. frekvenci ν

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

kde $h = 6,626\,075 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta a $c = 2,998 \cdot 10^8$ ms⁻¹ je rychlost světla. Kromě energie nese každý foton i hybnost. Velikost hybnosti fotonu je

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Využití hybnosti fotonu se zrodilo v hlavách autorů sci-fi literatury, ale již o něm seriózně uvažují i kosmické agentury. Jmenuje se „sluneční plachetnice“. Takové plachetnice by sloužily k levné dopravě materiálu směrem od Slunce, tj. ze Země k Marsu a dalším planetám sluneční soustavy. Každá plachetnice by byla vybavena velkou „plachtou“ nasměrovanou ke Slunci. Sluneční světlo by předávalo svoji hybnost plachtám a tedy i plachetnici, která by takto získávala rychlost bez použití motorů a drahého paliva. Získané zrychlení je sice malé, zato lze zrychlovat téměř neomezeně dlouho.

V případě sluneční plachetnice je tlak záření mizivý, ale ve hvězdách může nabýt vysokých hodnot. U velmi hmotných a teplých hvězd se tlak záření podílí významně na konečné fázi života hvězdy, totiž na jejím výbuchu v supernovu, kdy rozmetává do okolí celou obálku hvězdy.

Nyní se budeme věnovat vlnovým vlastnostem světla. Světlo je elektromagnetické vlnění a každé elektromagnetické vlnění je příčné. To si můžeme představit jako by v prostoru byly umístěny vektory, které periodicky mění svou velikost podle funkce $\cos \omega t$, tzn. periodicky mění velikost i orientaci. Tyto vektory jsou vektory elektrické intenzity \mathbf{E} a magnetické indukce \mathbf{B} . Oba dva vektory kmitají v rovině kolmé ke směru šíření a také \mathbf{E} je kolmý na \mathbf{B} . Směr, ve kterém kmitá \mathbf{E} , určuje polarizaci světla.

Ve většině úloh vystačíme s tzv. skalární aproximací, která nebere v úvahu vektorový charakter světla, ale vystačí jen s velikostí elektrické intenzity. Magnetickou indukci nemusíme explicitně uvažovat, protože lze ukázat, že velikost magnetické indukce v prostředí bez elektrických proudů a volných nábojů jednoznačně závisí na elektrickém poli. Ve skalární aproximaci pak popisujeme monochromatické světlo jako harmonickou vlnu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi), \quad (21)$$

kde ω je kruhová frekvence světla ($\omega = 2\pi\nu$), φ je fáze vlny a \mathbf{k} je vlnový vektor. Vlnový vektor má směr shodný se směrem šíření vlny, jeho velikost je $k = 2\pi/\lambda$. Skalární součin $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ je konstantní pro každou rovinu kolmou k vlnovému vektoru \mathbf{k} . Těmto rovinám říkáme roviny konstantní fáze, to znamená, že v konkrétním časovém okamžiku nabývá argument funkce kosinus v celé rovině stejné hodnoty. Pokud uvažujeme jednorozměrný případ, můžeme skalární součin nahradit prostým součinem velikostí vlnového vektoru a souřadnice. Probíhá-li vše v ose x , pak nahrazujeme skalární součin vztahem kx .

Takto definovaná rovinná vlna má harmonický průběh v čase i prostoru (ve směru šíření). V každém pevně zvoleném bodě v prostoru se bude elektrické pole $\mathbf{E}(t)$ harmonicky měnit s časem.

Na tomto místě stojí za to si položit otázku. Mluvíme tu o jakési periodické funkci, ale když se díváme na světelný paprsek, tak žádné periodické změny nepozorujeme. Tento zdánlivý paradox je způsoben tím, jak světlo vnímáme. Naše oko neumí detekovat tak rychlé změny (frekvence viditelného světla je asi $10^{14} - 10^{15}$ Hz a víme, že televize oklame naše oko již s frekvencí kolem 25 Hz tak, že vnímáme pohyblivý obrázek a ne jednotlivé změny obrazu). Místo toho oko detekuje střední hodnotu energie, která dopadá na plochu, tedy tzv. intenzitu I . Nevnímáme tedy vlastní kmitání elektrického pole, ale jen amplitudu těchto kmitů. Intenzita záření souvisí s elektrickou intenzitou vztahem

$$I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_0^2,$$

kde n je index lomu prostředí, ε_0 permitivita a μ_0 permeabilita vakua.

To, že světlo fyzikálně popisujeme vektorem elektrické intenzity, ale detekujeme intenzitu I , má za důsledek celou skupinu jevů, které nazýváme interferenční a ohybové. Představme si dvě rovinné vlny, které se šíří stejným směrem, každá o intenzitě I_0 , tedy amplituda elektrické intenzity $E_0 \sim \sqrt{I_0}$ (faktory úměrnosti mezi I a E nemají vliv na podstatu problému a proto je již dále

nebudeme vypisovat). Pokud se obě vlny překryjí v prostoru, sečtou se jejich elektrické intenzity. V případě shodné fáze obou vln dostáváme součet

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi) + E_0 \cos(\omega t + \varphi) = 2E_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

V argumentu kosinu neuvádíme člen závislý na poloze, jelikož je konstantní pro obě vlny (vše pozorujeme v jednom bodě) a jeho hodnotu zahrnujeme do hodnoty fáze φ . Intenzita světla v tomto bodě prostoru je $I \sim E^2 = (2E_0)^2 \sim 4I_0$. Takovéto interferenci říkáme konstruktivní interference. Pokud ale obě vlny mají fázový rozdíl π (např. každá urazila jinou vzdálenost), výrazy pro obě vlny nejsou shodné, ale argumenty se liší o π . UVědomíme-li si, že $\cos(\psi + \pi) = -\cos(\psi)$, opět můžeme sečíst obě vlny a dostáváme

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi) + E_0 \cos(\omega t + \varphi + \pi) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) - E_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

V tomto případě je intenzita pozorovaného pole nulová a mluvíme o destruktivní interferenci.

Vypadá to, že bychom kolem sebe měli vidět jen samé interferenční jevy, všude samé interferenční proužky. Bohužel, interference může vznikat jen pokud je interferující záření dostatečně koherentní, tj. fáze jednotlivých vln jsou dostatečně provázané. Toho lze dosáhnout jen pokud obě vlny pocházejí ze stejného zdroje. Pokud jsou zdroje různé, jsou fáze dopadajících vln náhodné a výsledná intenzita je daná součtem intenzit dopadajících vln.

Komplexní čísla

Člověk znal nejdříve přirozená čísla, později k nim přidal nulu, ještě později celá čísla až došel k reálným číslům. Každé rozšíření souviselo s tím, že některá operace neměla výsledek v dosavadním číselném oboru. Pokud známe jen přirozená čísla, nemůžeme odečítat každé číslo od každého. Operace $3 - 5$ nedá výsledek patřící do přirozených čísel (\mathbb{N}) a proto se zavedla čísla celá (\mathbb{Z}). Podobně komplexní čísla \mathbb{C} vznikla z potřeby odmocňovat reálná čísla. Odmocnit kladné reálné číslo umíme, tzn. umíme vyřešit rovnici $x^2 = 1$. Ale rovnice $x^2 = -1$ nemá v reálných číslech řešení. Proto zavedeme symbol i definovaný jako $i = \sqrt{-1}$. Hlavní vlastnost čísla i je, že $i^2 = -1$.

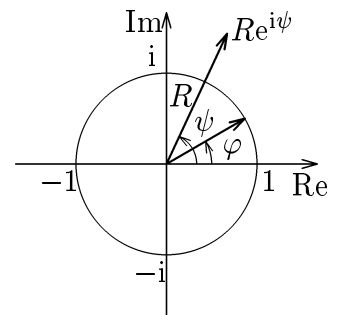
Reálná čísla zobrazujeme na reálnou osu, vystačíme s přímkou. Komplexní čísla ale potřebují ke svému zobrazení dva rozměry, zobrazují se do tzv. Gaussovy roviny. Dvěma osám v rovině říkáme reálná a imaginární. Každé komplexní číslo se zobrazí jako jeden bod roviny. (Reálná čísla jsou podmnožinou čísel komplexních, stejně jako jsou přirozená čísla podmnožinou čísel celých.) Komplexní číslo můžeme zapsat několika způsoby. Můžeme jej zapsat jako uspořádanou dvojici dvou reálných čísel. Jednomu říkáme reálná část a druhému imaginární část a jsou to vlastně kartézské souřadnice bodů v rovině. Když si číslo představíme jako vektor s počátkem v počátku a koncem v bodě Gaussovy roviny, můžeme jej charakterizovat jeho vzdáleností od počátku R (modul, absolutní hodnota) a úhlem φ (fáze), který svírá jeho směr s kladným směrem reálné osy. Číslo pak napíšeme ve tvaru $Re^{i\varphi}$ (obr. 33). Absolutní hodnota R i úhel φ jsou reálná čísla. Platí velmi důležitá Moivreova věta, která říká, že

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (22)$$

Číslu $e^{i\varphi}$ říkáme komplexní jednička, protože jeho absolutní hodnota, tj. délka vektoru, je rovna jedné (viz obr. 33). Všechny komplexní jedničky leží v Gaussově rovině na kružnici se středem v počátku a poloměrem jedna.

Komplexní čísla ve fyzice

Dost matematické teorie, podívejme se, jak se uplatní komplexní čísla ve fyzice. Co to vlastně znamená, když napíšeme $e^{i\omega t}$? Toto číslo se vyvíjí v čase tak, že jeho velikost zůstává konstantní a rovna jedné, ale úhel mezi ním a reálnou osou lineárně roste. Vektor charakterizovaný tímto číslem se otáčí jako hodinová ručička na ciferníku, díky tomu, jak jsme zvolili kladný směr odečítání úhlu, tak zrovna na druhou stranu než u normálních hodin. Reálná část osciluje jako kosinus a imaginární část jako sinus.



Obr. 33

Když ωt nabyde hodnoty $-\pi$ potká se vektor znázorňující komplexní číslo se zápornou částí reálné osy, hodnota $e^{i\pi} = -1$. Hodnota argumentu exponenciály $i\pi/2$ dává hodnotu i a $e^{-i(3/4)\pi} = -i$.

Obvykle se takovýmto způsobem vyjadřuje i rovinná vlna. Jistě se ptáte, jak může souviset reálný objekt jako je světlo či vlna s komplexním číslem? S reálnou veličinou, kterou skutečně můžeme měřit, souvisí reálná část takového komplexního čísla. Imaginární část komplexního čísla si do výpočtu přidáme. Pak počítáme s komplexním číslem a nakonec, když dostaneme výsledek, vezmeme z výsledku zase jen reálnou část komplexního výsledku, protože víme, že imaginární část nemá fyzikální význam. Komplexní čísla se hojně používají tam, kde jsou fyzikální veličiny vyjádřeny pomocí sinů a kosinů. To je především v teorii střídavých elektrických obvodů s cívkami a kondenzátory, ve vlnové teorii světla a také v kvantové mechanice. Celé „zesložštění“ se provádí jen proto, že se s komplexními čísly pracuje mnohem snáze než s kosiny a siny samotnými.

Rovinnou vlnu jsme zapsali jako

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) ,$$

pokud přidáme ještě imaginární složku s funkcí sinus, můžeme rovinnou vlnu podle Moivroy věty (22) napsat jako

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} .$$

Pak sčítáme jednoduše exponenciály a nemusíme používat složité součtové vzorce pro siny a kosiny.

Příště si ukážeme, jak nám použití komplexní symboliky zjednoduší výpočet vlastností Fabry-Perotova rezonátoru. Pokud ještě neovládáte komplexní čísla, pokuste se přečíst si něco o nich.

Úloha S . III ... plachetnice a světlo

- a) Jaké zrychlení bude mít sluneční plachetnice o hmotnosti $m = 10 \text{ t}$ a velikosti plachet $S = 1000 \text{ m}^2$ nedaleko Země, kde je světelný výkon Slunce (solární konstanta) $k = 1330 \text{ Wm}^{-2}$? Za jak dlouho by taková plachetnice dorazila od dráhy Země k dráze Marsu, pokud bychom ji vypustili s nulovou rychlostí? Předpokládejte, že velikost solární konstanty je v prostoru mezi Zemí a Marsem konstantní, zanedbejte gravitační vlivy všech těles. Poloměr dráhy Země je 1 AU , poloměr dráhy Marsu je $1,523 \text{ AU}$. AU je astronomická jednotka a její velikost je $1 \text{ AU} = 1,49597870 \cdot 10^{11} \text{ m} \sim 150 \text{ mil. km}$. Velikost solární konstanty samozřejmě závisí na vzdálenosti od Slunce. Jaká je její velikost na Marsu?
- b) Vysvětlete, proč je výhodnější vyrábět plachty sluneční plachetnice z materiálu, který má blízko k zrcadlovému lesku, než z matného materiálu.
- c) Jaká je intenzita elektrického pole (ve Vm^{-1}) v laserovém svazku s intenzitou 150 kWcm^{-2} ? Jak velká by musela být intenzita svazku, aby docházelo k ionizaci vzduchu?
- d) Jak by se musel upravit argument funkce kosinus, aby vztah $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)$, nepředstavoval rovinnou, ale kulovou vlnu. Kulová vlna je vlna, šířící se z bodového zdroje, asi jako když hodíte kámen do rybníka. Roviny konstantní fáze u kulové vlny jsou soustředné koule se středem ve zdroji.

a) Světlo, které dopadá na plachty sluneční plachetnice, má hybnost $p = \frac{E}{c}$ (lze odvodit ze vztahů uvedených v seriálu). Předpokládejme, že plachty jsou neodrážející, pak se fotony absorbují a předají veškerou svou hybnost lodí. Celkovou hybnost, která dopadne za čas Δt na plachty, spočítáme jako $p = \frac{kS\Delta t}{c}$. Použitím 2. Newtonova zákona $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma$ získáme pro velikost zrychlení $a = \frac{kS}{cm} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$. Dobu letu zjistíme z $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 5,94 \cdot 10^8 \text{ s} = 18,8 \text{ let}$. V případě zrcadlové plachty, kdy je předaná hybnost dvojnásobná, by bylo zrychlení $a_{zrc} = 8,9 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$ a let by trval 13,3 let.

Solární konstanta vyjadřuje výkon dopadající na jednotku plochy. Aby se zachovávala energie, musí hodnota klesat opačným způsobem, než roste plocha, která obepíná svítící zdroj. Protože plocha roste jako r^2 , klesá sluneční konstanta jako r^{-2} . Sluneční konstanta na Marsu je tedy $k_{\text{Mars}} = k_{\text{Země}}(r_{\text{Země}}/r_{\text{Mars}})^2 = 573 \text{ Wm}^{-2}$ a vlastně to ani není konstanta.

b) Pro zrychlování plachetnice je důležitá hybnost, kterou jeden foton předá plachetnici. Čím je tato předaná hybnost větší, tím většího zrychlení plachetnice dosáhne. Vzhledem k velké hmotnosti kosmické lodi je předaná hybnost rovna změně hybnosti fotonu (musí platit zákon zachování hybnosti). Při matném povrchu plachty je změna hybnosti z hybnosti \mathbf{p} na 0, tedy předaná hybnost má velikost p . Pokud je však foton odražen zrcadlovou plochou, je změna jeho hybnosti z hybnosti \mathbf{p} na $-\mathbf{p}$, tedy v tomto případě se velikost hybnosti fotonu i lodi změní o $2p$. Loď se zrcadlovými plachtami bude na rozdíl od lodi s matnými plachtami dosahovat dvojnásobného zrychlení.

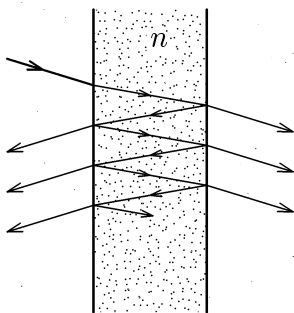
c) Samotný výpočet je velmi jednoduchý, použijeme vztahu uvedeného v seriálu a vyjádříme intenzitu elektrického pole v závislosti na intenzitě svazku jako $E = \sqrt{\frac{2I}{n}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 1,063 \text{ MV/m}$. Abychom dosáhli ionizace vzduchu, musela by být elektrická intenzita ve svazku alespoň stejná, jako je průrazné napětí pro vzduch, tj. alespoň 30 kV/cm, tj. světelná elektrická intenzita ve svazku by musela být třikrát větší a intenzita laserového světla by musela být asi devětkrát větší.

d) Rovinná vlna má plochy konstantní fáze jako roviny. Tomu odpovídá, že v argumentu exponenciály se vyskytuje člen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, který nabývá konstantní hodnoty na rovinách kolmých k vektoru \mathbf{k} . U rovinné vlny požadujeme, aby se plochy konstantní fáze nacházely na soustředných koulích, a proto potřebujeme něco, co by bylo konstantní na kouli. Snadno zjistíme, že této podmínce vyhovuje nejlépe $|\mathbf{k}||\mathbf{r}|$, kde absolutní hodnota kolem vektorů znamená jejich velikost. Všimněte si, že jsme součin neoznačili tečkou, jako značíme skalární součin, protože násobíme dvě reálná čísla. Kromě tohoto předpokladu musí ještě vlna zachovávat energii, takže musí ubývat i její amplituda. Výsledný vztah pro kulovou vlnu je

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{|\mathbf{r}|} \cos(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}| + \varphi).$$

Fabry-Perotův rezonátor

Fabry-Perotův rezonátor se skládá ze dvou rovnoběžných rovinných rozhraní, která jsou charakterizována svými odrazivostmi neboli koeficienty reflektivity r_1 a r_2 , které udávají poměr mezi velikostí odražené a dopadající amplitudy intenzity elektrického pole ve vlně. Každé rozhraní je dále charakterizováno transmisí t_1 a t_2 , tj. poměrem velikostí prošlé a dopadající amplitudy intenzity elektrického pole. Poměr odražené energie k dopadající popisuje reflexní koeficient \mathcal{R} rovný rr^* , v případě reálného r je $\mathcal{R} = r^2$. Podobně $\mathcal{T} = t^2$. Obě rozhraní jsou od sebe vzdálena d a mezi nimi je prostředí o indexu lomu n . Nejjednodušším příkladem takového uspořádání je obyčejné sklíčko. Jako rozhraní slouží rozhraní vzduch-sklo a sklo-vzduch. Dalším příkladem jsou dvě rovnoběžná zrcadla.



Obr. 34

Ještě než se pustíme do řešení samotného F-P rezonátoru, musíme se podívat, co se děje s fází vlny, pokud se volně šíří prostorem. Nechť máme vlnu šířící se v kladném směru osy x v počátku s fází ϕ_0 , můžeme ji napsat jako $e^{i(\omega t + \phi_0)}$. V místě x bude argument v exponenciále větší o ikx . Z původní vlny dostaneme vlnu posunutou do jiného bodu vynásobením jednoduchým výrazem e^{ikx} (při násobení exponenciál sčítáme jejich argumenty, tj. to, co je nahoře). Fáze vlny se změní o hodnotu $kx = 2\pi \frac{x}{\lambda}$, což odpovídá tomu, kolik vlnových délek se vejde mezi počátek a bod x . Hodnotu λ je potřeba brát pro prostředí, ve kterém probíhá šíření. Většinou se udává vlnová délka světla ve vakuu λ_0 a pak je potřeba použít $\lambda = \lambda_0/n$, kde n je index lomu daného prostředí. Vlnová délka v prostředí je vždy menší než

ve vakuu.

Obvykle je F-P rezonátor obklopen z obou stran prostředím o stejném indexu lomu. Označme tedy $r = r_1 = r_2$ a $t = t_1 = t_2$ a předpokládejme, že rezonátor má uvnitř opticky hustší prostředí než venku.

Nechť na F-P rezonátor dopadá kolmo rovinná elektromagnetická vlna s amplitudou E_0 . Její část, daná součinem $-r_1 E_0$ se odrazí*), zbytek vnikne dovnitř. Označme

$$\delta = 2\pi nd/\lambda_0$$

změnu fáze vlny při jednom průchodu vrstvou. Vlna prošla až na druhé rozhraní je $tE_0 e^{i\delta}$, tam se část odrazí zase zpět a na první rozhraní dorazí vlna $tE_0 e^{i\delta} r e^{i\delta}$, jejíž část projde zpět do původního prostředí. Komplexní amplituda této vlny je

$$tE_0 e^{i\delta} r e^{i\delta} t = t^2 r e^{2i\delta} E_0.$$

Zpět se ještě odrazí další vlny, z nichž každá prošla vždy několikrát tam a zpět celým rezonátorem. Každý další průchod rezonátorem změní fázi vlny o $r e^{i\delta} r e^{i\delta} = r r e^{2i\delta}$ (dvakrát se odrazí na rozhraní a dvakrát projde vzdálenost d). Sečteme-li všechny vlny, které se odráží od F-P rezonátoru, dostaneme následující součet:

$$\begin{aligned} E^{(r)} &= E_0(-r + t^2 r e^{2i\delta} + t^2 r e^{2i\delta} (r r e^{2i\delta}) + t^2 r e^{2i\delta} (r r e^{2i\delta})^2 + \dots) = \\ &= E_0(-r + t^2 r e^{2i\delta} [1 + r r e^{2i\delta} + (r r e^{2i\delta})^2 + \dots]). \end{aligned}$$

Všimněme si, že v hranaté závorce je nekonečná geometrická řada $(1 + q + q^2 + \dots)$ s kvocientem $q = r^2 e^{2i\delta}$, jejíž součet je $\frac{1}{1-q}$. S využitím tohoto vztahu získáme

$$E^{(r)} = E_0 \left(-r + \frac{t^2 r e^{2i\delta}}{1 - r^2 e^{2i\delta}} \right) = E_0 \frac{-r + (\mathcal{R} + \mathcal{T}) r e^{2i\delta}}{1 - \mathcal{R} e^{2i\delta}} = -\frac{1 - e^{2i\delta}}{1 - \mathcal{R} e^{2i\delta}} \sqrt{\mathcal{R}} E_0,$$

kde jsme využili toho, že energie dopadající na rozhraní se rozdělí na odraženou a prošlou část a tudíž $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ (zákon zachování energie). Zatím ale máme výraz pro odraženou amplitudu intenzity elektrického pole. Tu ale nemůžeme přímo měřit. Obvykle pozorujeme intenzitu světla, která je úměrná součinu EE^* , kde $*$ značí komplexní sdružení, tj. komplexní číslo se stejnou reálnou, ale opačnou imaginární částí. Intenzita dopadajícího světla I_0 je $E_0 E_0^*$. Po provedení sdružení a vynásobení dostaneme, že intenzita odraženého světla je rovna

$$I^{(r)} = \frac{2 - 2 \cos(2\delta) \mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R} \cos(2\delta)} I_0 = \frac{4\mathcal{R} \sin^2 \delta}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2 \delta} I_0 = \frac{\mathcal{F} \sin^2 \delta}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \delta} I_0,$$

kde jsme zavedli jemnost rezonátoru $\mathcal{F} = \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2}$.

Podobné úvahy jako v případě odrazu bychom mohli provést i v případě prošlého světla, dokonce bychom sčítali i stejnou geometrickou řadu, jen by okolo byly nějaké jiné koeficienty. Na závěr obdobných operací dostaneme intenzitu prošlého světla

$$I^{(t)} = \frac{\mathcal{T}^2}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R} \cos(2\delta)} I_0 = \frac{\mathcal{R}^2}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2 \delta} I_0 = \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \delta} I_0.$$

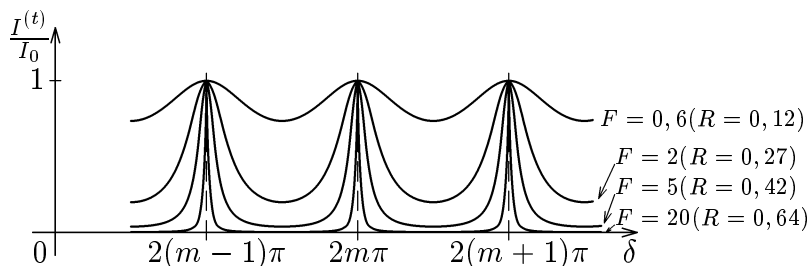
Jak vypadá propustnost Fabry-Perotova etalonu je naznačeno na obrázku 35. Je vidět, že propustnost je periodickou funkcí proměnné $\delta = 2\pi nd/\lambda_0$. Poloha maxim je tedy závislá na vlnové délce světla, indexu lomu a tloušťce rezonátoru. Maximum propustnosti nastává, pokud je argument sinu roven celistvému násobku π , pak je sinus roven nule a jmenovatel zlomku je nejmenší. Pro nás to znamená, že $\delta = k\pi$, kde k je celé číslo, z čehož vyplývá

$$d = k \frac{\lambda_0}{2n}, \quad (23)$$

*) při odrazu na rozhraní opticky řidšího a opt. hustšího prostředí dochází ke změně fáze o π , vlnu tedy musíme vynásobit ještě $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$

jinými slovy, že délka rezonátoru d musí být celistvým násobkem poloviny vlnové délky v materiálu, ze kterého je vyroben vnitřek F-P rezonátoru.

Stejný vztah pro polohu maxim propustnosti se odvozuje jen z představy úplné konstruktivní interference pro prošlý paprsek. My však víme, jaká bude propustnost i odrazivost F-P rezonátoru i tehdy, když interference není přesně konstruktivní nebo destruktivní. Na obrázku 35 můžeme



Obr. 35

vidět, že ostrost jednotlivých maxim závisí na odrazivosti jednoho rozhraní. Pokud bude odrazivost dostatečně velká, může se rezonátor chovat jako dokonalý barevný filtr a bude odrážet jen vlnové délky odpovídající maximům odrazivosti. Pro vlnové délky ležící mimo maxima se nebude odrážet téměř nic. Pokud dosáhneme toho, že v intervalu vlnových délek dopadajících na rezonátor bude jen jedno maximum, bude rezonátor filtrovat jen jednu vlnovou délku. Tomuto intervalu vlnových délek říkáme volný spektrální obor.

F-P rezonátor byl použit ke zkoumání jemné struktury spektrálních čar, kdy bylo objeveno, že některé čáry prvků v magnetickém poli mají jistou strukturu. Tomuto jevu se říká Zeemanův jev.

Laser

Nyní si konečně povíme něco o laseru [čti: lejzr]. Laser byl poprvé prakticky vyzkoušen v roce 1960 pány Ch. H. Townesem, N. G. Basovem a A. M. Prochorovem, kteří za něj dostali o čtyři roky později Nobelovu cenu za fyziku.

Je to jeden z objevů moderní kvantové optiky. Laser tedy není žádný záhadný pán, který kdysi laser vynalezl, ale zkratka z několika anglických slov: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, což volně přeloženo znamená zesilovač světla pracující na principu stimulované emise záření. Právě stimulovaná emise, kterou předpověděl již Albert Einstein na počátku století, je na celém procesu to nejdůležitější.

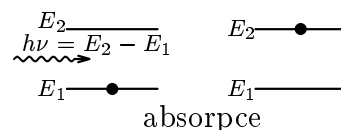
Stimulovaná emise je jeden ze tří možných způsobů interakce světla a hmoty. Dalšími jsou spontánní emise a absorpce. Jak vše funguje, si vysvětlíme na jednoduchém modelu atomu s dvěma energetickými hladinami. Později naznačíme, že na principu se nic nemění, i když laser nepracuje s jednoduchými atomy, ale i se složitými organickými molekulami, které nemají jednoduché energetické hladiny, ale celé pásy hladin.

Elektron se v atomu může nacházet ve stavech s různou energií, tj. v základním stavu (stav s nejnižší energií) nebo v různě vzbuzených stavech. Vzpomeňme atom vodíku a jeho různé energetické hladiny, jejichž energie je úměrná $-\frac{1}{n^2}$, kde n je hlavní kvantové číslo. Pro pochopení pojmu stimulovaná emise a absorpce nám bude stačit, když budeme zkoumat dvě takovéto hladiny.

Každá hladina má nějakou energii. Hodnoty jednotlivých energií nejsou pro nás příliš důležité, důležitý je jejich rozdíl $\Delta E = E_2 - E_1$. Jak vypadá náš atom? Je velmi jednoduchý, může se nacházet ve dvou stavech s dvěma různými hodnotami energie. S ním interaguje záření, které je složené z jednotlivých fotonů. Ty mají široké spektrum barev, tedy vlnových délek a energií*). Náš dvouhladinový atom může absorbovat nebo emitovat jen fotony s energií, rovnající se vzdálenosti hladin v atomu ΔE .

absorpce

Jestliže je dvouhladinový atom v základním stavu (elektron se nachází na nižší energetické hladině) vystaven působení fotonů, může dojít k tomu, že atom pohltí foton a sám se dostane do vzbuzeného stavu (obr. 36). Pravděpodobnost absorpce je přímo úměrná počtu



Obr. 36

*) Připomeňme, že energie fotonu E a jeho vlnová délka λ , resp. frekvence ν spolu souvisí vztahem $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, kde $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta a $c = 2,998 \cdot 10^8$ ms $^{-1}$ je rychlost světla

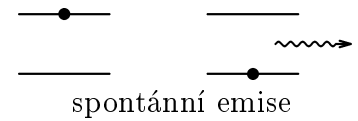
atomů N_1 , které jsou v základním stavu, a hustotě záření ρ (uvažujeme jen záření na frekvenci ν). Koeficientem úměrnosti je Einsteinův koeficient B_{12} :

$$p_{abs} = B_{12}N_1\rho. \quad (24)$$

spontánní emise

V případě, že je atom ve vzbuzeném stavu, může vyzářit foton a tím ztratit energii a dostat se do základního stavu. Tento proces je čistě náhodný, foton je vyzářen do libovolného směru s libovolnou polarizací. Jediné, co je určeno, je jeho energie, která je stejná jako rozdíl energetických hladin v atomu. Pravděpodobnost je úměrná počtu atomů N_2 ve vzbuzeném stavu a nezávisí na intenzitě světla. Konstantou úměrnosti je další Einsteinův koeficient A :

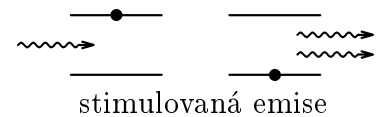
$$p_{spont} = A N_2. \quad (25)$$



Obr. 37

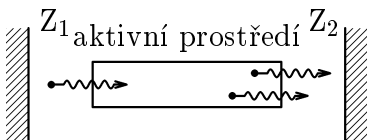
stimulovaná emise

Vzbuzený atom může ztratit svou energii ještě jiným způsobem — stimulovanou emisí. Stimulovaná se jí říká proto, že je způsobena jiným fotonem. Kolem vzbuzeného atomu letí foton, který vyvolá emisi dalšího fotonu. Atom je pak v základním stavu a oba fotony mají stejný směr, polarizaci i frekvenci (foton o jiné energii než je rozdíl energetických hladin v atomu stimulovanou emisí nevyvolá). Pravděpodobnost stimulované emise je úměrná počtu atomů N_2 ve vzbuzeném stavu, hustotě záření ρ a Einsteinově koeficientu B_{21} :



Obr. 38

$$p_{stim} = B_{21}N_2\rho. \quad (26)$$



Obr. 39

Právě stimulovaná emise je základem laseru. Laser se skládá z aktivního prostředí a rezonátoru (obr. 39). Aktivní prostředí je materiál, ve kterém dochází k zesilování světla stimulovanou emisí. Když na materiál dopadne jeden foton, při průchodu aktivním prostředím vyvolá stimulovanou emisí u některého atomu a z aktivního prostředí vystoupí dva fotony. Oba mají stejný směr, polarizaci, frekvenci i fázi. Zesílení na jeden průchod není veliké,

ale díky rezonátoru, což jsou vlastně dvě rovnoběžná zrcadla, je možné světlo prohnat aktivním prostředím mnohokrát a tím dosáhnout velkého zesílení. Funkce rezonátoru je zásadní. Vybírá ze všech možných směrů, ve kterých se šíří fotony, jen jeden, kolmý na zrcadla, a umožňuje fotonům s vybraným směrem vícenásobné zesílení v aktivním prostředí.

Shrňme tedy to, jak laser pracuje. Na začátku je tma a v aktivním prostředí jsou atomy ve vzbuzeném stavu. V některých atomech dojde ke spontánní emisí a vytvoří se několik fotonů. Tyto fotony se průchodem přes aktivní prostředí mohou díky stimulované emisí „rozмноžit“ a vytvořit shluky stejných fotonů. Pokud se první foton ve shluku vyzářil v nevhodném směru, vyběhne z rezonátoru nenávratně pryč i celý vygenerovaný shluk fotonů. Pokud se první foton ve shluku vyzářil do vhodného směru, je celý shluk odražen prvním zrcadlem zpět dovnitř, kde se opět zesílí v aktivním prostředí, dopadne na druhé zrcadlo, které jej odrazí přes aktivní prostředí zase zpět atd.

Tak se postupně zvyšuje počet obíhajících fotonů, až jich bude tolik, že nebude třeba mluvit o jednotlivých fotonech, ale o celém světelném svazku. Jedno ze zrcadel v rezonátoru je obvykle polopropustné, přes něj odchází část světla ven z laseru a laser svítí. Protože každý paprsek, který takto opustil laser, musel projít uvnitř mnohokrát tam a zpět, má světelný svazek opouštějící laser malou divergenci, tj. není příliš rozbíhavý.

Pro zesilující efekt, který převládá v průběhu činnosti laseru, je nejdůležitější stimulovaná emise. Ale i spontánní emise je důležitá. V okamžiku, kdy laser startuje, začíná laserovat, je

důležitá spontánní emise. Z ní pochází první foton, který se postupným zesilováním promění v laserové světlo.

Na první pohled je laser svou funkcí jednoduchý. Ale problém může být to, aby aktivní prostředí opravdu světlo při průchodu zesilovalo. Předpokládejme, že by bylo aktivní prostředí v termodynamické rovnováze se zářením o hustotě ρ . To, že je v rovnováze, znamená, že již nedochází k výměně energie mezi materiálem a zářením. Neznačí to však, že by nedocházelo k emisím a absorpcím – jen jsou v rovnováze. Každá emise znamená vznik jednoho fotonu a každá absorpce znamená zánik jednoho fotonu. Celkový příspěvek materiálu v rovnováze musí být nulový a tedy pravděpodobnost absorpce musí být stejná jako součet pravděpodobností obou emisí:

$$p_{abs} = p_{spont} + p_{stim}$$

$$B_{12}N_1\rho = A N_2 + B_{21}N_2\rho.$$

Provedme limitu tohoto výrazu pro velké hustoty záření a velké teploty. Pro velké hustoty záření můžeme člen od spontánní emise na pravé straně zanedbat, protože ostatní členy (obsahující ρ) mohou růst libovolně vysoko. Jedna z termodynamických pouček říká, že obsazení dvou energetických hladin, vzdálených od sebe o ΔE je

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (27)$$

což pro vysoké teploty znamená, že obsazení obou hladin je s velkou přesností stejné ($N_2/N_1 = e^{-\frac{\Delta E}{k\infty}} \doteq e^0 = 1$). To tedy znamená, že Einsteinův koeficient pro stimulovanou emisi B_{21} je stejný jako Einsteinův koeficient pro absorpci B_{12} .

Ještě jsme si neřekli, kde se v aktivním prostředí bere energie na to, aby mohlo zesilovat procházející záření. Pokud má laser pracovat kontinuálně, odchází z něj energie ve formě světla ven. Minimálně stejná energie se musí přivádět od aktivního prostředí. Tomuto přivádění energie se říká čerpání. Čerpáme totiž elektrony z nižší energetické hladiny na vyšší, podobně jako když ve vodní přečerpávací elektrárně akumulujeme energii v horní nádrži. Čerpání se provádí mnoha způsoby. Vždy se musí do aktivního prostředí dodat energie. To jde například elektrickým výbojem v plynu, průchodem elektrického proudu polovodičem, chemickou reakcí, jadernou reakcí a mnoha dalšími metodami. Nejpoužívanější metodou je optické čerpání, při kterém se svítí na aktivní prostředí z vnějšího zdroje světla. Může to být nějaká výbojka, zářivka, skupina svítivých diod a v některých speciálních případech lze čerpat laser jiným laserem.

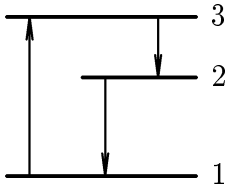
Při konstrukci dvouhladinového laseru*) se vyskytne jeden principiální problém. Když aktivním prostředím prochází svazek fotonů, je pravděpodobnost toho, že stimulovanou emisí vytvoří další fotony dána, rozdílem pravděpodobností stimulované emise a absorpce

$$p_{zesilení} = p_{stim} - p_{abs} = BN_2\rho - BN_1\rho = B\rho(N_2 - N_1).$$

Díky tomu, že Einsteinův koeficient je stejný jak pro absorpci, tak pro stimulovanou emisi, mohli jsme předcházející výraz snadno upravit a je vidět, že světlo se bude v aktivním prostředí zesilovat jen tehdy, pokud bude více atomů ve vzbuzeném stavu (N_2), než v základním (N_1). Pokud $N_2 > N_1$, mluvíme o inverzi populací, zkráceně jen o inverzi. A v inverzi je problém, protože z termodynamiky víme (27), že v rovnováze je obsazení vyšší hladiny vždy nižší než obsazení nižší hladiny. To, že nemůže dvouhladinový laser kontinuálně fungovat, jde pochopit i z jednoduchého názoru. Před započítáním čerpání je vždy více atomů v základním stavu než ve vzbuzeném. V průběhu čerpání se stále více atomů dostává do vzbuzeného stavu. Když začne být množství vzbuzených atomů nezanedbatelné, začne se projevovat kromě absorpce (která může za excitaci atomů) i stimulovaná emise, která má přesně opačný efekt než absorpce – snižuje počet vzbuzených atomů. Oba procesy, které běží proti sobě, se nakonec mohou vyrovnat a nastane rovnováha,

*) Název dvouhladinový laser je užíván pro laser, ve kterém se účastní procesu laserování jen dvě různé energetické hladiny. Další používané modely laserů jsou ještě o tři a čtyřhladinové.

při které bude skoro stejný počet atomů v základním i excitovaném stavu (díky spontánní emisi budou mírně převažovat atomy v základním stavu).



Obr. 40

Tuto malou komplikaci lze vyřešit, použijeme-li místo atomu s dvěma hladinami atom s alespoň třemi hladinami. Třetí energetická hladina je nad oběma původními hladinami. Čerpání probíhá mezi základní hladinou a třetí hladinou, ze které se atomy velmi rychle dostávají na nižší hladinu 2 a hladina je tedy neustále prázdná. Pak nemůže čerpací světelný svazek vyvolávat stimulovanou emisi a hladina 2 může mít větší obsazení než hladina 1. Vlastní laserování probíhá mezi hladinami 2 a 1.

Jeden čerpací foton se může v optimálním případě přeměnit v jeden foton na výstupu z laseru. Tyto dva fotony se ale liší svými energiemi — čerpací foton má vždy větší energii než laserovací foton. Již z tohoto důvodu nemůže mít laser 100% účinnost. Další faktory, které dále snižují účinnost přeměny dodávané energie v laserový paprsek, jsou ztráty spontánní emisí a tím, že čerpací energie se nemusí využít k excitaci na správných hladinách, ale může být využita jinde. Obvykle se velká část čerpacího výkonu přemění v teplo a výkonné lasery musí být chlazené.

Laditelné lasery

V předchozím jsme uvažovali, že energetické hladiny v atomu jsou diskrétní. To není ve většině materiálů pravda, protože každá energetická hladina je rozšířena, tj. elektron v atomu může nabývat energie z určitého intervalu hodnot a ne jen několik málo přesných hodnot. Rozšíření hladin je způsobeno mnoha důvody, například tím, že doba života hladiny je konečná, nebo že je atom vložen do krystalické mřížky, případně na něj působí tlakem okolní plyn.

V případě složitých organických molekul může být energetické spektrum tak složité a husté, že vznikají celé široké pásy energetických hladin. Laser může laserovat na všech frekvencích, při kterých elektron může přecházet z libovolného místa v jednom energetickém pásu do libovolného místa v druhém pásu. Tím může být vyzařované spektrum laseru velmi široké a pokud vhodně vybereme jen některé vlnové délky, můžeme laseru „vnutit“ vlnovou délku, na které má laserovat. Pokud výběr provádíme například mřížkou nebo hranolem, můžeme vybranou vlnovou délku měnit a tak vlastně ladíme barvu laseru.

Módy v laseru

Jestliže si ještě pamatujete to, co bylo na začátku tohoto dílu seriálu, jistě vám přijde povědomé, že rezonátor v laseru vypadá velmi podobně jako Fabry-Perotův rezonátor. A opravdu, je to tak. Jestliže má vlna obíhat neustále kolem dokola uvnitř rezonátoru, mělo by docházet ke konstruktivní interferenci, tj. vlna by na jeden oběh měla získat fázi rovnou celistvému násobku 2π , což přesně říká podmínka (23). Tato podmínka jde obvykle splnit s různými celočíselnými násobky k , vždy pro různé vlnové délky. Pokud je několik takových délek v oblasti, kde aktivní prostředí zesiluje, je v laseru zesilováno několik takových vyvolených délek. Říkáme, že v laseru jsou podélné módy.

Jednotlivé módy mají různé frekvence, ale přesto jsou všechny blízké jedné centrální frekvenci. O této centrální frekvenci říkáme, že na ní laser svítí.

Modová struktura může být někdy na překážku. Pro interferometrické měření vzdáleností je potřeba pracovat jen s jednou vlnovou délkou a tak se musí potlačit všechny módy v laseru, kromě jednoho hlavního.

Někdy se však modová struktura může vhodně využít. Využívá se jí například při tvorbě ultrakrátkých laserových pulsů. Ale o tom až v dalším díle seriálu.

Literatura: B. E. A. Saleh, M. C. Teich: *Základy fotoniky* 1, 2, 3, 4, Matfyzpress Praha, 1995

Úloha S.IV ... F-P rezonátor a lasery

a) Představte si Fabry-Perotův rezonátor se vzdáleností jednotlivých odrazných ploch $d = 3 \text{ mm}$, vyrobený ze skla o indexu lomu $n = 1,5$. Pro jakou nejbližší vlnovou délku $k 500 \text{ nm}$ dojde k maximální odrazivosti rezonátoru?

b) Uvažujte F-P rezonátor z příkladu a), na nějž dopadá světlo kolmo. Kam se bude posouvat maximum z předchozího příkladu, jestliže budeme rezonátor postupně naklánět vůči směru paprsku o malý úhel α ?

c) Jakou teoreticky maximální účinnost přeměny čerpané energie lze dosáhnout u titan-safírového laseru, který svítí na vlnové délce 800 nm, jestliže ho čerpáme argonovým laserem a použijeme čerpací vlnovou délku 515 nm?

d) Jak daleko (ve frekvenční oblasti) jsou od sebe jednotlivé módy v argonovém laseru s laserovým rezonátorem o délce 1,5 m, resp. v polovodičovém laseru s délkou rezonátoru 0,3 mm. Většina plynů má index lomu blízký jedné, polovodiče mají index lomu poměrně velký, obvykle kolem 3.

a) Zde vystačíme pouze s interferencí paprsků v rezonátoru. Při maximální odrazivosti rezonátoru dochází k destruktivní interferenci, pro kterou platí

$$\delta = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

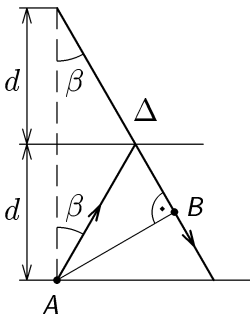
Ze seriálu víme, že pro fázi platí

$$\delta = \frac{2\pi nd}{\lambda_0}.$$

Výsledný vztah pro vlnovou délku je tedy $\lambda_0 = \frac{4nd}{2k+1}$. Nejbližší vlnové délky, při nichž dochází k maximální odrazivosti rezonátoru jsou pro $k_1 = 17999$ a $k_2 = 18000$. Vlnové délky tedy jsou $\lambda_1 = 500,014$ nm a $\lambda_2 = 499,986$ nm.

b) V případě šikmého dopadu je rozdíl fází paprsků vystupujících z rezonátoru (viz obr. 41)

$$\delta = \frac{2\pi nd \cos \beta}{\lambda_0}.$$



Obr. 42

To proto, že musíme vzít rozdíl fází mezi místy A a B, které se nacházejí na jedné vlnoploše. Z obrázku 42 je zřejmé, že rozdíl optické dráhy musí být

$$\Delta = 2h \cos \beta.$$

Ze Snellova zákona dosadíme za $\cos \beta$. Výsledný vztah pro maximum odrazivosti

$$\lambda_0 = \frac{4nd \cos \beta}{2k + 1} = \frac{4d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{2k + 1}.$$

c) Z jednoho čerpacího fotonu může vzniknout maximálně jeden foton výstupní. Účinnost tedy vypočítáme jako poměr energií obou fotonů

$$\eta = \frac{E_{\text{výstupní}}}{E_{\text{čerpací}}} = \frac{\frac{hc}{\lambda_{\text{výstupní}}}}{\frac{hc}{\lambda_{\text{čerpací}}}} = \frac{\lambda_{\text{čerpací}}}{\lambda_{\text{výstupní}}} \doteq 0,64.$$

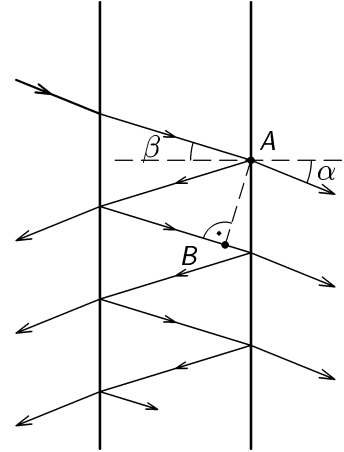
Maximální teoretická účinnost čerpání laseru je 64%. Tak vysoká účinnost se však nikde nedosahuje, protože v laseru probíhá mnoho procesů, které brání tomu, aby se všechny čerpací fotony proměnily ve fotony využitelné na výstupu laseru.

d) Ze vztahu (6) z předminulého dílu seriálu známe podmínky pro maximum. Pro dvě nejbližší maxima platí

$$\lambda_1 = \frac{2nd}{k}, \quad \lambda_2 = \frac{2nd}{k+1}.$$

Stačí jen dosadit do vztahu mezi frekvencí a vlnovou délkou $f = \frac{c}{\lambda}$ a dostáváme

$$\Delta f = f_1 - f_2 = c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{c}{2nd}.$$



Obr. 41

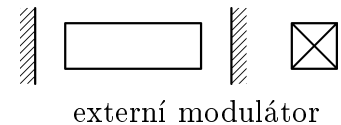
Pro argonový laser je $\Delta f = 100$ MHz a pro polovodičový laser je rozdíl frekvencí modů asi $\Delta f = 170$ GHz. Pro porovnání, frekvence světla s vlnovou délkou $\lambda = 800$ nm je $3,75 \cdot 10^{14}$ Hz. Tedy jednotlivé mody mají vzájemný frekvenční rozdíl přibližně 100 000-krát menší, než je hlavní frekvence.

Krátké laserové pulsy

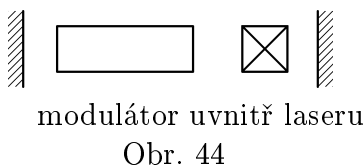
Z minulého dílu seriálu víme, jak funguje laser. Stručně připomeňme, že základem je tzv. aktivní prostředí, které zesiluje procházející světlo díky procesu nazývaném stimulovaná emise. Aktivní prostředí je umístěno v rezonátoru, ve kterém světlo obíhá neustále dokola a zesiluje se. Část světla opouští rezonátor skrz polopropustné zrcadlo – toto světlo tvoří výstupní světelný svazek laseru. Tím, jak část zesíleného světla zůstává v rezonátoru a dále se zesiluje, je laserové světlo velmi koherentní. Velmi zjednodušeně si můžeme představit, že v koherentním světle je elektrická intenzita jako nekonečně dlouhá sinusovka. Na rozdíl od vysoce koherentního laserového světla je světlo žárovky téměř nekoherentní. Intenzitu elektrického pole v nekoherentním světle si představujeme zase jako sinusovku, tentokrát ale jen jako její velmi krátké útržky, které nejsou mezi sebou nijak provázány, mají nahodilé fáze. Pro nás je důležité, že při popisu laserového světla vystačíme s jednoduchou exponenciálou $e^{i(\omega t + \varphi + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$.

Konečně se dostáváme k tématu tohoto dílu seriálu, jímž jsou krátké světelné pulsy. „Krátký“ v tomto případě znamená něco mezi mikrosekundou (10^{-6} s) až femtosekundami (10^{-15} s). Krátké pulsy využijeme při zkoumání dynamických vlastností materiálů, které se mění v časech srovnatelných s délkou trvání pulsu (tzv. spektroskopie s vysokým časovým rozlišením). Krátký puls obsahuje všechnu energii v relativně krátkém čase, je v něm obsažen vysoký špičkový (tj. maximální) výkon a proto se využívá pro prudké zahřátí terčů při výzkumu termojaderné fúze apod.

Metod k získání krátkých pulsů existuje několik. Velmi jednoduchou je použití kontinuálně pracujícího laseru s externí uzávěrkou nebo modulátorem, který propouští světlo jen po dobu trvání pulsu. Tato metoda není příliš výhodná, protože energie se při zavřené závěrcce ztrácí a tak špičkový výkon nemůže být větší než je kontinuální výkon laseru.



Obr. 43



modulátor uvnitř laseru

Obr. 44

Účinnější metodou získávání pulsů je zapínání a vypínání samotného laseru vnitřní modulací, kdy se energie nashromážděná mezi pulsy vyzáří během pulsu. Energie se může hromadit v rezonátoru ve formě světla, které se pak periodicky vypouští ven, nebo v aktivním prostředí (v inverzním obsazení hladin), odkud se uvolňuje během pulsu. Tyto způsoby generace pulsů umožňují generovat pulsy

se špičkovým výkonem větším než je stálý výkon kontinuálního laseru.

Pro vnitřní modulaci laserového záření se nejčastěji využívá Q-spínání, otevírání dutiny a modová synchronizace.

Q-spínání

Písmeno Q v názvu značí, že spínání se děje pomocí změny kvality rezonátoru (anglicky Quality). Při tomto způsobu modulace se energie mezi pulsy uschovává v aktivním prostředí. Do rezonátoru je vložen modulátor, který nepropouští světlo a znemožňuje laseru fungovat. Stále však probíhá čerpání a když je v aktivním prostředí „uskladněno“ dostatek energie, přepne se modulátor tak, že propouští světlo. Tehdy začne laser fungovat, foton spontánní emise se začne prudce zesilovat, vygeneruje se obří puls, na který se spotřebuje většina energie z aktivního prostředí, které přestane zesilovat a laser opět přestane svítit.

Otevírání dutiny

Světlo je uvězněno v dutině rezonátoru pomocí 100% odrazujících zrcadel. Tím, jak světlo stále obíhá a zesiluje se, se uvnitř vytvoří silné světelné pole, pak se odstraní jedno ze zrcátek (např. odklopením) a z laseru unikne všechna energie akumulovaná ve světle ven.

Systém pracuje podobně jako nádoba, do níž se konstantní rychlostí nalévá hadicí voda. Když se nádoba naplní vodou, odstraní se náhle její dno, takže všechna voda je naráz vypuštěná. Dno

nádoby se vrátí zpět a celý proces se může opakovat. Konstantní tok se tím převádí na impulsní tok. V případě laseru s otvíráním dutiny odpovídá nádobě rezonátor, hadici s vodou konstantní čerpání a dnu nádoby výstupní zrcadlo rezonátoru.

U Q-spínání a otevírání dutiny je nejkratší možná délka trvání pulsu určena dobou, než energie odeče z laseru ven. Pokud je energie uskladněná ve formě světla, tak to je $\tau_{min} = 2l/c$, než světlo stihne vyběhnout z rezonátoru, u Q-spínání se musí přelit energie z aktivního prostředí do světla, což trvá několikrát déle, než je doba oběhu světla v rezonátoru.

Modová synchronizace

Získání mnohem kratších pulsů než v předešlých případech umožňuje metoda synchronizace módů (anglicky mode-locking — uzamykání módů). Jak víme z minulého dílu seriálu, tvoří se v rezonátoru podélné módy, které vyhovují podmínce celistvého násobku λ v dutině. Frekvence dvou sousedních módů se liší o

$$\Delta\nu = \frac{c}{2l},$$

kde c je rychlost světla, l optická délka rezonátoru (tj. nd , pokud je rezonátor zaplněn aktivním prostředím s indexem lomu n od kraje ke kraji). Pokud aktivní prostředí zesiluje v dostatečně širokém spektrálním oboru, může být jednotlivých módů vybuzených v laseru několik tisíc. Superpozicí těchto módů dostaneme velmi krátké pulsy, jejich vznik si teď spočítáme.

Předpokládejme, že v laseru je vybuzen lichý počet M podélných módů kolem centrální frekvence ν_0 . Všechny módy nechť mají stejnou amplitudu*) a rozdíl fází sousedních módů je pro všechny módy stejný a s časem se nemění — fáze jsou vzájemně uzamknuté (od toho se metoda jmenuje). Pro jednoduchost zápisu předpokládejme všechny fáze nulové. Když si módy očíslijeme celými čísly $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm S$; $M = 2S + 1$, můžeme každý napsat jako rovinnou vlnu

$$E_q = A e^{i2\pi(\nu_0 + q\Delta\nu)t}.$$

Superpozice módů v laseru, kterou pozorujeme, q je daná prostým součtem všech elementárních módů

$$\begin{aligned} \sum_{q=-S}^{q=S} A_q e^{i2\pi(\nu_0 + q\Delta\nu)t} &= A \sum_{q=-S}^{q=S} e^{i2\pi\nu_0 t} e^{i2\pi q\Delta\nu t} = \\ &= A e^{i2\pi\nu_0 t} \sum_{q=-S}^{q=S} e^{i2\pi q\Delta\nu t} = A e^{i2\pi\nu_0 t} (e^{-Si2\pi\Delta\nu t} \dots + 1 + e^{i2\pi\Delta\nu t} + \dots e^{Si2\pi\Delta\nu t}). \end{aligned} \quad (28)$$

Označíme-li $\delta = \pi\Delta\nu t$, v kulaté závorce dostáváme konečnou geometrickou řadu s M členy, jejíž první člen je $e^{-Si2\delta}$, kvocient $e^{i2\delta}$ a součet je

$$\begin{aligned} e^{-Si2\delta} \frac{1 - e^{(2S+1)i2\delta}}{1 - e^{i2\delta}} &= \frac{e^{-Si2\delta} - e^{(S+1)i2\delta}}{1 - e^{i2\delta}} \cdot \frac{e^{-i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{e^{-(2S+1)i\delta} - e^{(2S+1)i\delta}}{e^{-i\delta} - e^{i\delta}} \\ &= \frac{e^{-Mi\delta} - e^{Mi\delta}}{2i} \frac{2i}{e^{-i\delta} - e^{i\delta}} = \frac{\sin M\delta}{\sin \delta}. \end{aligned}$$

Na výstupu laseru dostaneme nakonec elektrickou intenzitu

$$A e^{i2\pi\nu_0 t} \frac{\sin M\pi\Delta\nu t}{\sin \pi\Delta\nu t}.$$

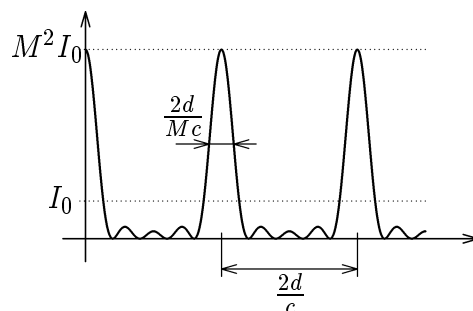
Intenzita světla na výstupu, jak je nakresleno na obrázku 45, je $A^2(\sin^2 M\pi\Delta\nu t)/(\sin^2 \pi\Delta\nu t)$. Tato funkce je periodická a tak v každém okamžiku, kdy je $\pi\Delta\nu t$ násobkem π , se objeví krátký puls. Všimněme si, že perioda se kterou se puls objevuje je přesně rovna době, kterou světlo potřebuje na to, aby jednou oběhlo laser ($\pi\Delta\nu t = \pi c/2lt = \pi$ a pak $ct = 2l$). Světlo dělá přesně to, co

*) tento předpoklad není nezbytný, jen nám umožní jednoduše spočítat tvar výsledného pulsu

jsme od něj požadovali: periodicky se objevuje puls, jehož velikost je M^2 –krát větší než intenzita samostatného módu a je tím kratší, čím více módů se zapojilo do synchronizace módů.

Touto metodou se dosahují v současnosti délky pulsů v oblasti desítek femtosekund (10^{-14} s).

Víme, co se děje na výstupu z laseru. Co se však děje uvnitř? Laserem obíhá jeden velký a krátký puls. Uvnitř laseru je navíc modulátor (obr. 44), který je v okamžiku průchodu pulsu modulátorem otevřený, po zbytek času je uzavřený (tím je myšleno nepropustný pro světlo). Tento režim práce modulátoru zaručuje stálý vztah mezi všemi módy, tzv. uzamknutí módů. Módy vybuzené „správně“ jsou „schovány“ v pulsu a mohou nerušeně procházet modulátorem. Pokud by se chtěly vyvinout módy, které by nepřispívaly konstruktivně k pulsu, modulátor by jim ve vzniku zabránil, protože takovéto módy by procházely modulátorem ve chvílích jeho uzavření — tím se eliminují.



Obr. 45

Modulátory

Výše zmíněné modulátory mohou být dvojího typu: aktivní nebo pasivní. Aktivní řízení znamená, že modulátor je řízen zvenku, obvykle elektrickým signálem, na jehož základě mění modulátor svou propustnost. Elektrický signál vyvolá např. změnu indexu lomu a modulátor (v tomto případě např. hranol) změní směr světla, které pak nemůže obíhat a zesilovat se. Tato aktivní modulace je velmi náročná z hlediska přesnosti ovládní modulátoru. Modulátor se musí periodicky otvírat a zavírat s frekvencí určenou dobou oběhu světla v rezonátoru. Tato doba je závislá na délce rezonátoru, která zase závisí na teplotě a tudíž se může časem nepatrně měnit. Proto se musí ovládací frekvence neustále korigovat a v konečném důsledku je celé zařízení hodně složité.

Mnohem jednodušší způsob je pasivní modulace. V laseru se synchronizovanými módy obíhá jeden velký puls, a bylo by jednoduché, kdyby si při každém průchodu modulátorem mohl modulátor „otevřít“. To jde zařídit, pokud se jako modulátor použije saturabilní absorbér. To je látka, která při malých intenzitách světla silně absorbuje. Když na ni ale dopadne intenzivnější světlo, její absorpce klesá, tj. větší procento dopadajícího světla projde. Obíhá-li tedy laserem silný a krátký puls, tak při průchodu modulátorem necítí téměř žádné ztráty (absorpci) a modulátor je po dobu průchodu pulsu otevřený — puls si otevřel modulátor sám. Slabý puls, případně kontinuální složka laserového záření se nemohou zesilovat, protože zesílení v aktivním prostředí nestačí vyrovnat ztráty, které jsou spojeny s průchodem slabého světla saturabilním absorbérem.

Úloha S. V ... synchronizace módů (mode-locking)

Předpokládejme modově synchronizovaný laser s optickou délkou rezonátoru $l = 1,8$ m, pracujícího na střední vlnové délce $\lambda = 800$ nm se středním výkonem 1 W.

- S jakou frekvencí laser produkuje jednotlivé pulsy? Jaká je mezi nimi prostorová vzdálenost?
- Jak je prostorově dlouhý puls o délce 70 fs?
- Kolik fotonů je v jednom pulsu?
- Jaký je špičkový výkon v pulsu?
- Kolik módů potřebujeme k dosažení pulsů o délce 70 fs? V jaké oblasti vlnových délek musí zesilovat aktivní prostředí? Předpokládejte stejnou amplitudu všech módů, které se účastní tvorby pulsu.

a) V laseru obíhá jeden velký puls, ze kterého se pokaždé, když přijde k výstupnímu zrcadlu, část odštěpí a vyjde ven. Vzdálenost pulsů odpovídá dvojnásobné délce rezonátoru $2l$, jejich frekvence je $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} \doteq 83$ MHz.

b) Puls urazí za dobu 70 fs dráhu $ct = 21 \mu\text{m}$, stejně tak daleko je od sebe čelo a konec pulsu, tj. i puls má tuto délku.

c) Celková energie v jednom pulsu je rovna součtu energií jednotlivých fotonů $E_{puls} = nh\nu = n \frac{hc}{\lambda}$, nebo je to také podíl energie vyzářené za 1 s a počtu pulsů za 1 s (frekvence f) $E_{puls} = \frac{P}{f} = P \frac{2l}{c}$. Dosazením dostaneme celkový počet fotonů v jednom pulsu $n = \frac{2Pl}{hc^2} = 4,9 \cdot 10^9$ fotonů.

d) Předpokládejme přibližně obdélníkový tvar pulsů. Energie je obsažena v pulsech, které trvají v jedné sekundě dohromady $f\Delta t = 5,8 \cdot 10^{-6}$ s. Špičkový výkon je poměr energie vyzářené za 1 s a doby, po kterou trvají pulsy, $P_{\text{špičk.}} = \frac{P}{f\Delta t} = \frac{2Pl}{c\Delta t} = 172$ kW.

e) Z předchozího dílu seriálu víme, že puls je dlouhý $\Delta t = \frac{2l}{Mc}$, kde M je počet modů, které se účastní synchronizace modů. Pro náš puls potřebujeme přibližně $M = \frac{2l}{\Delta tc} = 171\,000$ modů. Vzdálenost jednotlivých modů od sebe je $\Delta\nu = \frac{c}{2l}$ a střední frekvence laseru je $\nu_0 = \frac{c}{\lambda}$, od níž potřebujeme na obě strany mít zesílení pro $\frac{M}{2}$ modů, tedy laser musí zesilovat mezi frekvencemi $\nu_{min,max} = \nu_0 \pm \Delta\nu \frac{M}{2} = \frac{c}{\lambda} \pm \frac{1}{2\Delta t}$, což ve vlnových délkách znamená zesílení mezi $\lambda_{min} = 785$ nm a $\lambda_{max} = 816$ nm.

Všimněme si, že pro dosažení časově krátkého pulsu potřebujeme relativně spektrálně široké zesílení prostředí.

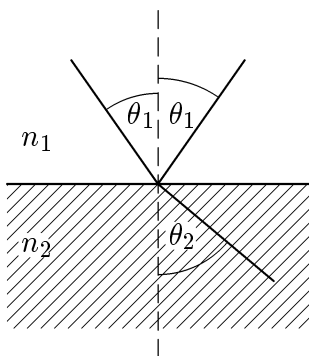
Optické vlnovody a optická vlákna

V tomto díle seriálu ukážeme, jak funguje optické vlákno a proč by asi nefungoval vlnovod ze zrcadel. Také spočítáme, kolik informace se může přenášet optickým vláknem, a si ukážeme si, jak ušetřit za ponorku potřebnou na opravy podmořské elektroniky.

Někdy potřebujeme přivést světlo od světelného zdroje někam jinam. Pokud je mezi zdrojem a místem, kde světlo potřebujeme, přímá cesta, je díky přímočarému šíření světla vše jednoduché. Někdy však cesta není přímá a my potřebujeme světlo několikrát ohnout, aby se dostalo tam kam má. S takovým problémem se setkali např. lékaři, když se chtěli podívat na nepřístupná místa lidského organismu (třeba do žaludku, když je zajímavé, jestli pacient trpí žaludečním vředem nebo je to jen hypochondr). Jednou z možností bylo vytvořit světlovod, který přivede světlo na místo a zpět přivede obraz zkoumaného místa.

Řešením tohoto problému je zrcadlový nebo čočkový vlnovod (obr. 46). Oba jsou vhodné pro přenos světla jen na krátké vzdálenosti, protože mají velké ztráty a kromě toho jsou mechanicky složité. Žádné zrcadlo nemá sto procentní odrazivost a i když má odrazivost např. 99 %, tak stačí 69 odrazů a intenzita světla klesne na polovinu ($0,99^{69} \doteq 0,5$). Pro přenos světla na větší vzdálenosti jsou tyto světlovody nevhodné.

Úplný (totální) odraz světla na rozhraní dvou prostředí je k vedení světla ideální. Paprsky se opakovaně odrážejí aniž by docházelo k lomu a tak se neztrácí energie.



Obr. 47

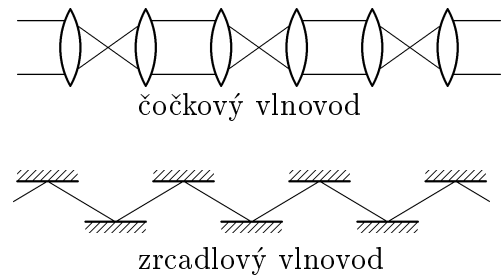
K totálnímu odrazu může dojít, pokud světlo dopadá z opticky hustšího prostředí pod velkým úhlem na rozhraní s opticky řidším prostředím. Napíšeme-li Snellův zákon v takovémto případě ($n_1 > n_2$)

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (29)$$

a přepíšeme jej do tvaru

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 .$$

Můžeme si všimnout, že pokud je $\sin \theta_1$ blízký 1 ($\frac{n_1}{n_2} > 1$), tak by musel být $\sin \theta_2$ větší než 1, což není možné splnit pro žádnou reálnou hodnotu θ_2 . Proto nemůže existovat žádný lomený paprsek v libovolném směru. Existuje pouze odražený paprsek, který nese všechnu energii dopadajícího paprsku.

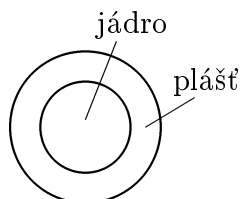


Obr. 46

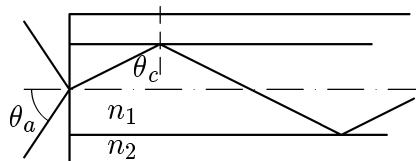
Minimální úhel, při kterém dochází k totálnímu odrazu, se označuje jako kritický θ_c a platí pro něj

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

Pro větší úhly dopadu nastává totální odraz.



Obr. 48



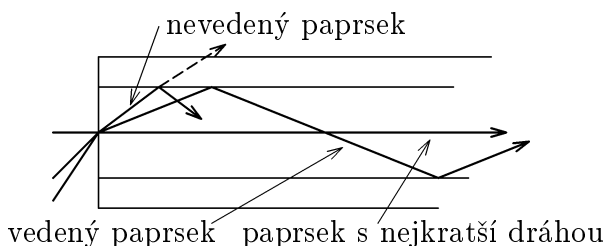
Obr. 49

V optickém vlákne se světlo šíří jen s využitím totálních odrazů. Samotné optické vlákno je velmi dlouhý válec, který má na průřezu dvě různé oblasti — jádro a plášť. V jádru, které je opticky hustší než plášť, se šíří samotné světlo. Plášť slouží jako ochrana vlákna před vnějšími vlivy. Plášť není nezbytně nutný pro činnost vlákna, teoreticky by ke vzniku totálních odrazů stačilo umístit jádro vlákna do vzduchu, ale tak by docházelo k velkým ztrátám při vedení světla (obr. 50). Každá nečistota na povrchu by způsobovala vyvázání světla z vlákna a přenesený výkon by postupně klesal. Pokud je jádro obaleno pláštěm, nastávají totální odrazy na rozhraní jádro-plášť, které je stále dobře definováno a „nejde znečistit“.

Jak se šíří paprsky vláknem je znázorněno na obrázku 49. Všechny paprsky, které svírají s osou vlákna úhel menší než $90^\circ - \theta_c$ se šíří vlákem, ostatní se po několika částečných odrazech utlumí (obr. 51). Jaký je maximální úhel, pod kterým má smysl svítit do vlákna? Z geometrických vztahů mezi úhly, ze Snellova zákona (29) a vztahu pro kritický úhel dostaneme vztah pro numerickou aperturu

$$NA = \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

Optická vlákna se většinou vyrábí tažením ze superčistého skla. Čistota je tak velká, že i přes několik kilometrů tlustý kus skla by bylo perfektně vidět. Klasické okenní sklo začíná být neprůhledné při tloušťce několika centimetrů (*pozn.: zkuste navštívit sklenářství a podívejte se přes vrstvu několika skel. Uvidíte i spoustu dalších zajímavých efektů.*)



Obr. 51

Změny indexu lomu mezi jádrem a pláštěm bývá dosaženo malou příměsí titanu, germania nebo bóru do křemenného skla ještě před vlastním tažením. Příměs se do skla dostává obvykle difuzí při vyšší teplotě. Díky tomuto způsobu výroby není rozdíl mezi indexem lomu jádra a pláště příliš velký, zavádí se proto relativní změna indexu lomu Δ , která udává poměr rozdílu indexů lomů a vlastní velikosti indexu lomu jako

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1},$$

přičemž $\Delta \ll 1$. Obvyklé hodnoty indexu lomu u optických vláken jsou $n = 1,44$ a $\Delta = 0,001$ až $0,02$. Protože je Δ relativně malé, můžeme upravit numerickou aperturu do tvaru

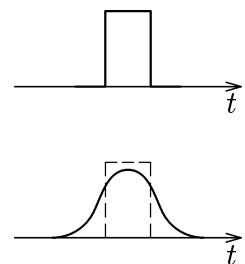
$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

Díky malému Δ je numerická apertura relativně malá, ale to v principu nevadí, pokud se nám povede navázat světlo do vlákna vhodným způsobem. Někdy může být malá numerická apertura dokonce výhodou.

Ve vláknech pozorujeme při šíření světla modovou strukturu podobně jako v laseru. Zatímco v laseru (viz minulé díly seriálu) jsme mluvili především o podélných modech, ve vlákne se jedná spíše o mody příčné. Vznik modů můžeme jednoduše vysvětlit kombinací představ geometrické a vlnové optiky. Představa paprsku znázorňuje šíření rovinné vlny vláknem a aby docházelo ke konstruktivní interferenci (analogicky jako v laseru), musí paprsek během jedné periody oběhu (tj. když se odrazí od „horní“ a „dolní“ strany vlákna a dostane se zase do „stejného“ výchozího stavu) získat vhodný fázový posun. Této podmínce pak vyhovuje několik různých směrů paprsků, které se šíří vláknem a nazýváme je jednotlivými mody. Množství modů, které se mohou šířit vláknem, je závislé na n , Δ a na průměru jádra.

Co je podstatné u každého modu je rychlost, s jakou je schopen se šířit vláknem. Různé paprsky, které svírají různé úhly s osou vlákna, mají různé dráhy a proto je jejich rychlost šíření ve směru různá. Ty, které se šíří hodně klikatě jsou pomalejší než ty, co se šíří rovně. Odborně se tomuto jevu říká modová disperze grupových rychlostí.

Právě disperze grupových rychlostí je nepříjemnou záležitostí v oblasti datových komunikací. Omezuje množství informace, kterou jsme schopni přenést optickým vláknem za jednotku času. Informace se po optickém kabelu přenáší jako světelný signál. Buď je tam světlo nebo tma. Řekněme, že pošleme do optického vlákna obdélníkový puls (obr. 52). Co se s ním stane po průchodu vláknem? Po průchodu to již nebude puls s ostrými hranicemi, ale rozplizlý a široký puls. Je to tím, že energie pulsu se rozdělila mezi mody, které ji přenesly na druhý konec vlákna, ale díky rozdílné modové rychlosti se dostala na druhou stranu v různých časech a výstupní puls je v čase široký. Jeho začátek tvoří energie z modů s velkou rychlostí, na konci je energie, kterou přinesly mody s malou rychlostí. Kdyby byl vstupní puls nekonečně krátký, na výstupu bychom dostali signál o délce



Obr. 52

$$\Delta t = \frac{s}{v_{\min}} - \frac{s}{v_{\max}},$$

kde v_{\min} a v_{\max} jsou rychlosti nejrychlejších a nejpomalejších modů. Abychom jednotlivé pulsy na výstupu odlišili, tak musí být od sebe vzdáleny nejméně tak daleko, o kolik se rozšíří během průchodu vláknem.

Modovou disperzi grupových rychlostí je možné různými metodami různě eliminovat. Jednou z možností je použití speciálního profilu indexu lomu v jádře vlákna. Vlákna o kterých jste zatím mluvili, mají index lomu v celém průřezu vlákna stejný, který se mění skokem na hranici jádra a pláště. Takovýmto vláknům se říká vlákna se skokovým indexem lomu. Všechny paprsky se šíří stejnou rychlostí (stejný index lomu), ale po různých drahách. Pokud vyrobíme vlákno, které bude mít největší index lomu uprostřed a nejmenší na krajích, paprsky s dlouhou dráhou se budou šířit rychleji a celková rychlost modů se vyrovná. Takovýmto vláknům se říká vlákna s gradientním indexem lomu.

Druhou z možností je použít tzv. jednomodová vlákna. Jednomodové vlákno je takové vlákno, které je dostatečně tenké, aby se jím mohl šířit jen jediný mod. Protože je mod jen jeden, je mezimodová disperze potlačena.

Když se podařilo vyrobit první jednomodová vlákna, ukázalo se, že na disperzi mají vliv i další jevy. Z teorie plyne, že v čase konečný puls má i ve frekvenční oblasti konečnou šířku. A protože index lomu (a tedy i rychlost světla ve vlákne) je závislý na vlnové délce, bude se každá vlnová délka (barva) šířit jinou rychlostí a přibude další zdroj disperze.

Nejnovější metodou na potlačení disperze jsou tzv. solitonová vlákna, ve kterých se šíří optický puls ve formě solitonu a díky nelineárním efektům se přesně zachovává jeho tvar, takže se jeho délka v čase téměř nemění.

Nutno konstatovat, že rychlost komunikace po optických kabelech zatím není omezena samotným vláknem, ale rychlostí elektroniky, která musí být na obou stranách vlákna — jednou jako

zdroj signálu a na druhé straně jako detektor a zpracovatel signálu. Jestliže se podaří vyvinout celooptické počítače, tak padne i tato překážka a komunikační rychlost zase dramaticky vzroste.

Zmínili jsme, že optická vlákna se vyrábějí ze superčistého skla. Ale i takové sklo má jistý útlum a i díky nehomogenitám dochází ke ztrátám energie. Při přenosu na krátké vzdálenosti (např. v rámci města) to nevádí, ale pro datové přenosy pod oceánem je třeba kabel doplnit tzv. opakovači. Opakovač je věc, která přijme optický signál, zesílí jej a zesílený jej pošle dál. První opakovače převedly optický signál na elektrický, ten zesílily a opět jej převedly na optický a ten poslaly dále. Problém je v tom, že opakovače musí být umístěny uprostřed oceánu a proto je každá jejich oprava velmi nákladná. Opticko-elektricko-optický opakovač je relativně složitá a tedy i poruchová věc.

Celou složitou elektronickou věc jde nahradit jednoduchým laserovým zesilovačem. Stejně tak, jako je v laseru aktivní prostředí, které zesiluje procházející světlo, tak se kousek vlákna upraví, aby bylo schopno zesilovat světlo. Úprava spočívá v tom, že se krátký úsek dopuje např. erbiem. Aby se aktivní prostředí chovalo jako zesilovač, musí se mu dodávat energie, musí se tedy na dopovanou část vlákna svítit, což obstará několik svítivých diod. Tak je opakovač mnohem méně poruchový a ušetří se za opravy. Další výhodou tohoto uspořádání oproti elektrooptickému opakovači je, že když se provozovatel rozhodne používat v optickém kabelu jiný přenosový protokol, nemusí „učit“ opakovače nové věci. Laserový zesilovač signál jen pasivně zesiluje, ale elektrooptický musí signálu „rozumět“.

Úloha S. VI ... optická vlákna

a) Jak velká je vstupní numerická apertura u vlákna se skokovou změnou indexu lomu s indexem lomu $n = 1,452$ a relativní změnou indexu lomu $\Delta = 0,01$.

b) Jak dlouhý signál dostaneme na výstupu z optického vlákna s parametry z části a) o délce 100 km, jestliže dáme na vstup signál dlouhý $1 \mu\text{s}$? K výpočtům použijte nastíněného geometrického modelu.

c) Jakou maximální přenosovou kapacitu (v bytech/s) můžeme na tomto vlákně provozovat? Předpokládejte, že přenesení jednoho bitu znamená přenést jeden impuls.

a) Numerickou aperturu spočítáme podle vztahu uvedeného v seriálu $NA = n\sqrt{2\Delta} = 0,205$.

b) Nejprve uvažujme, jak se ve vláknu rozšíří velmi úzký světelný puls. Pro rychlost šíření paprsku je důležitá rychlost ve směru podélné osy vlákna. Nejrychleji se pak šíří paprsky rovnoběžné s osou vlákna a to rychlostí $v_{max} = c/n$. Nejpomalejší paprsky, které se ještě vláknem šíří, jsou paprsky, které se odráží pod kritickým úhlem a jejich podélná rychlost je zmenšená o sinus kritického úhlu a je tedy $v_{min} = c \sin \theta_C/n$.

Víme, že numerická apertura souvisí s kritickým úhlem vztahem $NA = \sin \theta_a = n \sin(\pi - \theta_C)$ a můžeme vyjádřit $\sin \theta_C = \sqrt{1 - (NA/n)^2}$.

Časový rozdíl mezi nejrychlejším a nejpomalejším paprskem spočteme jako rozdíl jejich časů (nesmíme udělat začátečníkovou chybu a odečítat rychlosti!)

$$\Delta t = \frac{L}{v_{min}} - \frac{L}{v_{max}} = \frac{Ln}{c \sin \theta_C} - \frac{Ln}{c} = \frac{Ln}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (NA/n)^2}} - 1 \right) \doteq \frac{Ln\Delta}{c}.$$

Pro naše konkrétní hodnoty dostáváme $4,9 \mu\text{s}$. Puls, který trvá konečnou dobu, bude po průchodu vláknem delší o hodnotu Δt . (Zamyslete se nad tím, proč není rozšíření dvojnásobné délky!) Puls původně dlouhý $1 \mu\text{s}$ se v tomto vlákně prodlouží na $5,9 \mu\text{s}$

c) Pulsy dlouhé $1 \mu\text{s}$ odpovídají frekvenci 1 MHz a není obtížné vyrobit pulsy mnohem kratší, pak bude maximální přenosová kapacita determinovaná jen rozšiřováním pulsu ve vlákně. Abychom rozeznali jednotlivé bity, musíme dosáhnout toho, aby se jednotlivé pulsy při výstupu z vlákna nepřekrývaly, tj. můžeme je vysílat maximálně s frekvencí $1/\Delta t$. Počet bytů [bajtů] (1 byte = 1B = 8b = 8 bitů [bitů]) přenesených za sekundu pak je $1/8\Delta t = 25,5 \text{ kB/s}$.

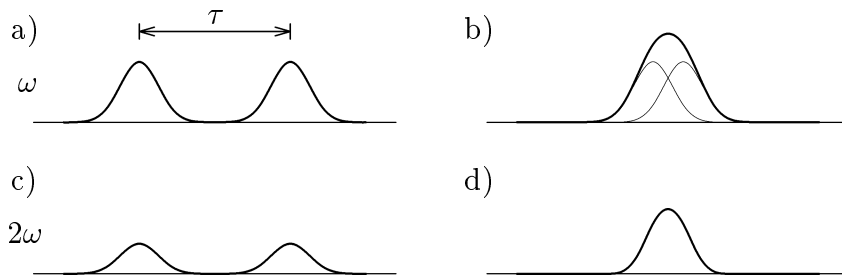
Detekce krátkých pulsů

Letos jsme dali řešitelům příležitost zeptat se na věci kolem optiky. Následující pasáž se snaží zodpovědět některé dotazy.

První dotaz se týkal toho, jak detekovat pulsy dlouhé (nebo spíše krátké?) 70 fs. Výhodou takto krátkých pulsů je, že jsou rychlejší než všechny elektronické součástky a díky nim můžeme sledovat děje rychlejší, než může sledovat elektronika. Přímou elektronicky tedy takové signály nemůžeme detekovat (resp. můžeme, ale odezva je omezena nejkratší reakční dobou elektronického systému a nikoliv délkou samotného optického pulsu). Pro určení délky pulsu používáme tzv. autokorelační metody v přístroji zvaném autokorelátor.

Než si objasníme funkci autokorelátoru, musíme nejprve uvést proces, který se nazývá generace druhé harmonické. Není to nic principiálně složitějšího, jde o to, že ve vhodně orientovaném krystalu se ze dvou fotonů o frekvenci ω vytvoří jeden foton o dvojnásobné frekvenci 2ω . Tento efekt je závislý na druhé mocnině intenzity světelného svazku.

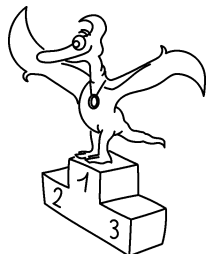
Pokud necháme šířit krystalem jeden puls, bude efektivita generace malá. Jestliže uvnitř krystalu dojde k časovému a prostorovému překryvu dvou stejných pulsů, bude intenzita vygenerované druhé harmonické až čtyřikrát větší než u jednotlivého pulsu. Intenzita signálu odpovídá tzv. autokorelační funkci $(I(t) + I(t + \tau))^2$. Jak se mění časový překryv, tj. pulsy se hýbou na časové ose (obr. 53a) a b)), mění se i účinnost generace. V době překryvu obou pulsů je signál největší. Detektor, který sleduje jen signál na frekvenci 2ω , může být pomalý ve srovnání s délkou pulsu. Na osciloskopu pozorujeme závislost velikosti signálu o frekvenci 2ω na časovém zpoždění mezi pulsy τ . Takto získaný graf má tvar závislý na tvaru pulsů a většinou se podobá gausovce. Z její šířky lze spočítat délku pulsu. Tato metoda určení délky pulsu je nepřímá, ale relativně jednoduchá a v praxi často používaná.



Obr. 53

Další dotaz se týkal modulace signálu pro optické komunikace. Pokud chceme přenášet vláknem informaci, používáme kontinuálně pracujícího laseru, který modulujeme modulátorem. Modulátory používané v optické komunikaci pracují obvykle na elektrooptickém principu. To znamená, že elektrické pole mění např. index lomu a tak se mění vlastnosti součástky a ta přepíná světelný signál mezi dvěma vlákny jako obyčejný vypínač.

Pokud vás problematika krátkých pulsů zaujala, můžete se něco zajímavého dozvědět také na adrese <http://quantum.karlov.mff.cuni.cz/OOE> v sekci Informace pro studenty.



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie čtvrtých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	204
1	Lenka	Zdeborová	4.A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské nám.	158
2	Daniel	Sprinzl	4.	Gymnázium Dačice	147
3	Petr	Klenka	oktáva A	Gymnázium Praha - Voděradská	137
4	Jiří	Samek	kvinta	Gymnázium Semily	108
5	Filip	Křížek	oktáva A	Gymnázium Praha - Litoměřická	93
6	Tomáš	Pecháček	4.P	MŠŠCH	92
7	Vít	Marek	4.A	Gymnázium Holešov	80
8	Miroslav	Musil	septima A	Gymnázium Nové Město na Moravě	74
9	Jan	Janský	septima	Gymnázium Strakonice	70
10	Jan	Myslivoček	4.A	Gymnázium Brno - třída kpt. Jaroše	54

Kategorie třetích ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	204
1	Jan	Houštěk	sexta	Gymnázium Pelhřimov	206
2	Karel	Kouřil	kvinta B	Gymnázium Blansko	153
3	Milan	Berta	III.A	Gymnázium Velké Kapušany	147
4	Juraj	Suchár	3.	Gymnázium Dubnica nad Váhom	113
5 - 6	Tomáš	Linhart	sexta	GOA Sedlčany	107
5 - 6	Miroslav	Pištěk	sexta	GOA Sedlčany	107
7	Jan	Houfek	sexta	Gymnázium Uherské Hradiště	103
8	Pavel	Augustinský	sexta B	Gymnázium Havířov	89
9	Jakub	Kulaviak	kvinta B	Gymnázium Blansko	81
10 - 11	Stanislav	Hampl	sexta	GOA Sedlčany	75
10 - 11	Tomáš	Matoušek	VI.C	Gymnázium Karlovy Vary	75

Kategorie druhých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	204
1	Petr	Nečesal	IV.C	Gymnázium Moravské Budějovice	166
2	Peter	Čendula	2.B	Gymnázium Liptovský Mikuláš	162
3	Martin	Beránek	V.	Gymnázium Praha - Ohradní	124
4	David	Kolovratník	2.E	SPŠS Chrudim	105
5	Jaromír	Chalupský	kvinta A	Gymnázium Sušice	102
6	Jan	Pšíkal	2.F	SPŠE Pardubice	86
7	Ondřej	Plašil	2.B	Gymnázium Praha - Chodovská	73
8	Michal	Škoda	kvinta B	Gymnázium Turnov	63
9	Pavel	Janda	kvinta	Gymnázium Telč	62
10	Jakub	Levic	kvinta B	Gymnázium Louny	61

Kategorie prvních ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	204
1	Michal	Bareš	kvarta A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské nám.	62
2	Ľuboš	Bednárík	1.F	Gymnázium Trenčín	39
3	Matej	Dubový	1.B	Gymnázium Trenčín	38
4	Zdeněk	Moravec	IX.C	ZŠ Blansko	31
5	Jiří	Vlach	kvarta	GOA Sedlčany	25

Obsah

Předmluva	3
Zadání úloh	4
Řešení teoretických úloh	9
Řešení experimentálních úloh	38
Seriál o moderní optice	52
Pořadí nejlepších řešitelů	77
Obsah	79

JIŘÍ FRANTA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář

XII. ročník – 1998/99

Předmluva: Drahomíra Doležalová, Jiří Franta

Autoři řešení úloh:

Michal Bittner (I.Exp, IV.Exp), Jakub Černý (III.3, VI.P),
Libor Dener (I.P, II.3, VI.Exp), Michal Fabinger (V.4),
Miroslav Kladiiva (II.2, IV.2), Karel Kolář (I.3, II.P, III.4, IV.P, V.1),
Daniel Král (V.2), Jiří Kvita (I.Exp, III.Exp, IV.Exp),
Jiří Libra (II.Exp), Ladislav Michnovič (II.2, IV.3),
Slavomír Nemšák (I.1, IV.2), Tomáš Ostatnický (VI.2),
Ondřej Pejchal (I.3, II.P), Václav Porod (II.1, III.1, V.P, VI.4),
Jan Prokleška (I.2, II.4, III.2, IV.1, V.Exp, VI.1), Libor Sedláček (I.4, IV.4, V.Exp),
Rudolf Sýkora (III.P, V.3, VI.3)

Seriál na pokračování: Jan Hradil, Miroslav Brož, Ondřej Pejchal

Sazba: Petr Janeček

Obrázky: Jana Gřondilová

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Oddělení vnějších vztahů a propagace
Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2
Praha 1999

80 stran, 53 obrázků

Sazba písmem Computer Modern v programu T_EX

Vydání první

Náklad 300 výtisků

Pro potřeby fakulty