

Milí řešitelé!

Konečně dostáváte do rukou autorská řešení první série FYKOSu společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmikoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentový zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou. Až příští rok jim z propagačního oddělení přijde zadání první série příštího ročníku.

Na závěr chceme upozornit, že na našich webových stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> naleznete zadání a řešení úloh, výsledky i celé komentáře dokonce mnohem dříve, než vám dojdou poštou. Zvláště zdůrazňujeme, že řešení úloh se budeme snažit zveřejnit co nejdříve po termínu odeslání. Celý náš web projde brzy částečnou přestavbou, proto vaše připomínky k současným stránkám a nápady, co by se mohlo objevit na nových, posílejte prosím na e-mailovou adresu webmaster@fykos.mff.cuni.cz.

vaši organizátoři

Soutěž



Kdo vyhrává? Ten, kdo v zadáních a komentářích, výsledkových listinách atd. tohoto ročníku najde a oznámí (mailem či poštou) nejvíce pravopisných či věcných chyb.

O co se hraje? Na prvních deset hledačů chyb čekají trička FYKOSu a na několik nejlepších navíc hodnotné knihy.

Jak máte chyby psát? Uveďte, kde přesně chyba je a v čem spočívá. U věcných, fyzikálních či závažných stylistických chyb zdůvodněte. Příklad (fiktivní): Číslo 1 (najdete v pravém horním rohu stránky), strana 3, 3. odstavec: Chybí čárka ve větě: "Ze speciální teorie relativity víme, že ..."

Jak se bude vyhodnocovat? Za chyby nalezené v každém z čísel 3 až 7 (první dvě se počítají spolu se třetím) dostanete podle počtu a závažnosti vámi nalezených chyb 0 až 10 bodů. Chyby objevené více řešiteli se započítávají všem. Na konci vyhrávají řešitelé s nejvyšším součtem. Body za chyby a za úlohy spolu samozřejmě nijak nesouvisí. V průběhu ročníku vám budeme posílat průběžné pořadí.

Proč tato soutěž? Minulý rok se nám osvědčila. Ulehčíte nám práci na korekturách při přípravě ročenky. Zamyslete se nad tím, zda vám nepodsouváme nesmysly.



Zadání III. série



Termín odeslání: 3. ledna 2005

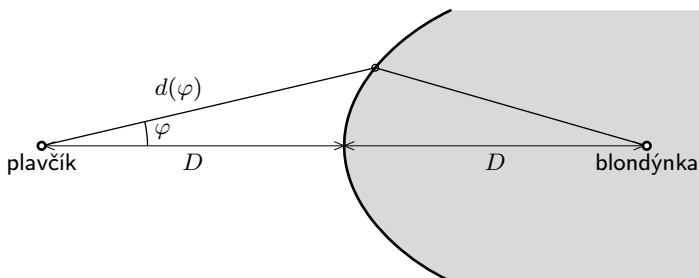
Úloha III.1 ... teplota na Zemi

Průměrná teplota na povrchu Země je $T = 287\text{ K}$. Jaká bude nová průměrná teplota T' , pokud se střední vzdálenost mezi Zemí a Sluncem zkrátí o 1%?

Úloha III.2 ... pobřežní hlídka

Plavčík stojící ve vzdálenosti D od břehu moře náhle spatří topící se bujnou blondýnku, která doplávala do vzdálenosti D od břehu (viz obr. 1). Poradte mu, jak se k ní má co nejrychleji dostat, pokud rychlost jeho běhu je v a rychlost plavání $v/2$. Vzdálenost okraje moře od plavčíka závisí na úhlu φ následujícím předpisem

$$d(\varphi) = \frac{D}{3} (8 \cos \varphi - 2 \sqrt{16 \cos^2 \varphi - 12 \cos \varphi - 3} - 3).$$



Obr. 1. Na pláži

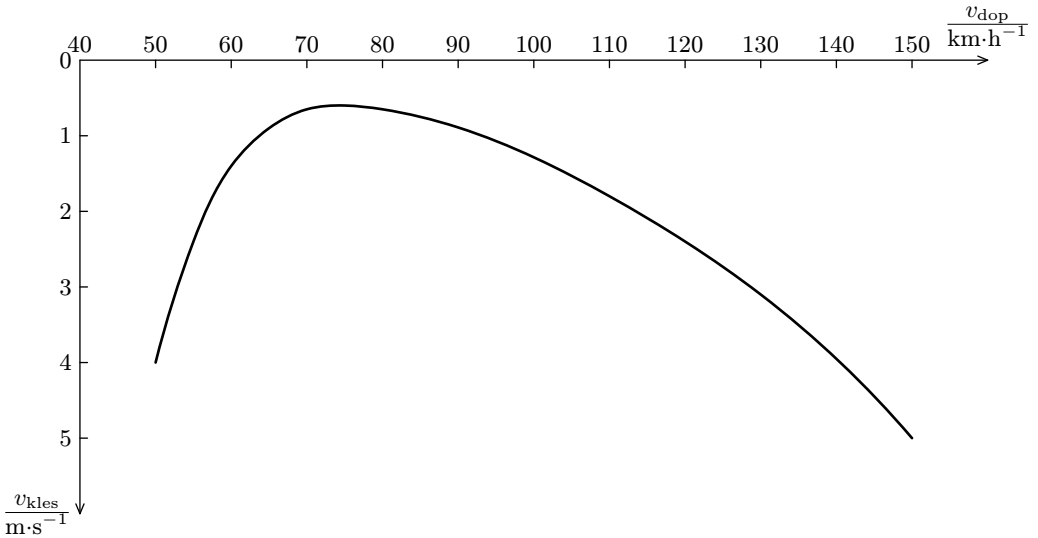
Úloha III.3 ... nabitá krychle

Jaký je poměr hodnot elektrostatického potenciálu ve vrcholu a ve středu nevodivé rovnoměrně nabitě krychle? Celkový náboj na krychli je Q a délka strany krychle je a . Předpokládejte, že elektrický potenciál v nekonečnu je nulový.

Úloha III.4 ... s větroněm přes kanál

Jeden známý letec se rozhodl ve větroně přeletět kanál La Manche. V Calais se nechal vyvléci do výšky $h = 3\text{ km}$ a z této výšky se přímým klouzavým letem vypravil do Anglie. Jako dobrý pilot ví, kterak při ustáleném letu vypadá závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} (viz graf na obr. 2). Poradte mu, jak rychle má letět, aby doletěl co nejdál.

Když je ve třech čtvrtinách cesty do Anglie, začne od ostrovů fučet silný vítr o rychlosti $10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rozhodněte, jak rychle má letět nyní, aby se dostal co nejdál. Jaká by musela být rychlost větru, aby mu znemožnila přistát na pevnině, případně aby mu umožnila návrat do Francie?

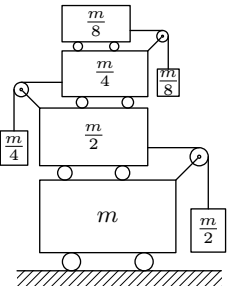
Obr. 2. Závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} .

Úloha III. P ... věž z vozíčků

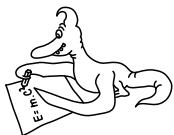
Určete zrychlení prvního a stého vozíčku (počítáno od země) na obrázku 3. Vozíčků je nekonečně mnoho, na obrázku jsou zakresleny jen první čtyři. Spodní vozíček má hmotnost m , další vozíček, který po něm jezdí, a závaží, se kterým je spojen, má hmotnost $m/2$. Podobně další vozíček a závaží má hmotnost $m/4$ atd. Předpokládejte, že závaží jsou připevněná k vozíčkům, tj. že se ve svislém směru neodchylují. Tření mezi jednotlivými vozíčky zanedbejte.

Úloha III. E ... hustota vzduchu

Změřte hustotu vzduchu. Provést to můžete libovolnou metodou, nezapomeňte k vaší metodě uvést potřebnou teorii. Správný experimentální výsledek nesmí také postrádat určení chyby změněné hodnoty.



Obr. 3. Vozíčky



Řešení I. série

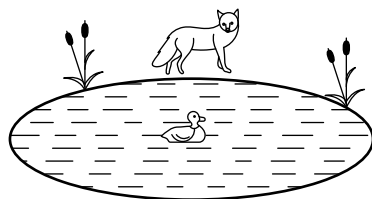
Úloha I.1 ... ošklivé kačátko (4 body; průměr 1,30; řešilo 99 studentů)

Opuštěné ošklivé kačátko zůstalo osamocené uprostřed kruhového rybníku. Chce se dostat za svými sourozenci a matkou kachnou, ale na břehu rybníka na něj číhá liška. Kačátko je ještě mladé, proto dokáže vzlétnout pouze z pevné země. Určete maximální poměr rychlostí běhu lišky a plavání kačátka, aby stihlo doplatit na břeh a z něj lišce uletět. Poradte také kačátku, jakou strategii má zvolit.

Úlohu znala Lenka Zdeborová.

Mějme kačátko, nechť jeho rychlost je 1 a rychlost lišky v (bude pak rovna přímo hledanému poměru). Není obtížné nahlédnout, že je-li kačátko dostatečně blízko středu rybníku, může dosáhnout stejné či větší úhlové rychlosti rotace kolem středu než liška obíhající po břehu. Skutečně, je-li kachnička ve vhodné vzdálenosti r a liška ve vzdálenosti R od středu, úhlová rychlost kačátka je

$$\omega_K = \frac{v_K}{r} = \frac{1}{r} > \frac{v}{R} = \frac{v_L}{R} = \omega_L.$$



Obr. 4. Kačátko v rybníku

Nerovnost platí pro $r/R < 1/v$. Odtud již přímo plyne, že se kačátko může dostat do situace, kdy je ve vzdálenosti $r = R/v$ od středu a liška se nachází na přesně opačné straně rybníku, tj. spojnice liška–oběť prochází středem kružnice. Velká část řešitelů se probojovala až sem.

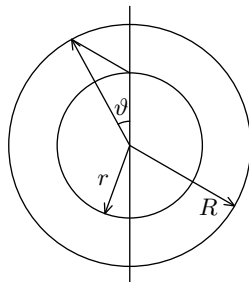
Ovšem ihned vyvstává otázka: „Co dál?“ Nejjednodušší odpověď může znít: „Kačátko by mělo plavat po co nejkratší cestě ke břehu.“ Příkladnějším bude na břehu za nejkratší čas. Nicméně toto je jen jedna strana mince! Druhá říká: „Podívej se na lišku.“ Ona totiž nezahálí, nýbrž usilovně sprintuje směrem k očekávanému přístavišti zvířátka. Měli bychom tedy alespoň popřemýšlet, zda by nebylo lepší, aby kachnička plavala poněkud od lišky.

Mimochodem, největší část řešitelů tvrdila, že má kachnička plavat ze středu přímo rovně k okraji. Zde je vidět, že se mýlí, neboť je-li kachnička na obvodu našeho pomyslného kruhu, je blíže okraji než předtím a liška je stejně jako předtím na opačné straně kruhu.

Vraťme se k pohybu lišky. Ta vidí kačátko na opačné straně a nyní se musí rozhodnout, kam poběží. Samozřejmě se nezastaví, to by kačátku poskytla náskok. Liška se může rozběhnout, kam chce (ze symetrie). Nyní určíme, jak se zachová kačátko.

Pochopitelně, poplave více méně na druhou stranu než liška (otáčí se ve stejném smyslu). Poplave po přímce, neboť kdyby plavalo po křivce z bodu A do B, mohlo by plavat přímo z A do B, čímž by ušetřilo čas. Budeme předpokládat, že liška jednou se rozběhnuvší se již neotočí, což zdůvodníme později.

Z obrázku 5 určíme dráhu lišky $R(\pi + \vartheta)$ a dráhu kačátka $\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta}$. V mezním případě se budou rovnat doby, za které liška a kačátko tyto dráhy urazily. To nám poskytne závislost v na ϑ . Nám zbývá najít maximum této funkce. Při úpravě využijeme vztah uvedený



Obr. 5

výše ($R/r = v$).

$$\begin{aligned} R(\pi + \vartheta) &= v \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta}, \\ \pi + \vartheta &= v \sqrt{1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \vartheta}, \\ \pi + \vartheta &= \sqrt{1 + v^2 - 2v \cos \vartheta}, \\ 0 &= v^2 - 2v \cos \vartheta + 1 - (\pi + \vartheta)^2. \end{aligned}$$

Odtud určíme

$$v = \cos \vartheta + \sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta}, \quad (1)$$

přičemž znaménko $+$ použijeme, aby bylo v kladné. Zbývá určit polohu maxima, tj. vztah derivovat podle ϑ a položit derivaci rovnu nule

$$\frac{dv}{d\vartheta} = -\sin \vartheta + \frac{\pi + \vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta}} = 0.$$

Po několika přímočarých úpravách se radostně dobereme stavu

$$1 - 2 \frac{\pi + \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta} + \left(\frac{\pi + \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 = 0,$$

odkud přímo plyne

$$\operatorname{tg} \vartheta = \pi + \vartheta. \quad (2)$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky.

Tímto postesknutím práce fyzika nesmí skončit! Samozřejmě neočekáváme, že by student střední školy měl v malíčku numerické metody. Ale každý má počítač, který takové věci umí provádět. Stačí najít vhodný software (např. Excel), jenž řeší rovnice či kreslí grafy. A dokonce i když člověk s počítačem nekamarádí, nemusí se vzdát, má-li chytrou hlavu. Co třeba následující úvaha. Když se mi podaří najít ϑ tak, že $\operatorname{tg} \vartheta < \pi + \vartheta$ a vzápětí jiné ϑ , ovšem splňující $\operatorname{tg} \vartheta > \pi + \vartheta$, zjistil jsem, v kterém intervalu leží správné ϑ , splňující rovnici (2). Je-li tento interval příliš široký, provedu hledání znovu, ϑ budu ale vybírat z tohoto nového intervalu. Intervaly zužuji tak dlouho, dokud nejsou dostatečně úzké. Je to sice poněkud pracné, ale najdu alespoň přibližnou hodnotu ϑ .

Prakticky je nejlépe rovnici upravit na tvar $\operatorname{tg} \vartheta - \pi - \vartheta = 0$ a sledovat znaménko nové levé strany. Vyberu na začátku interval, pro který platí, že vlevo je levá strana záporná a vpravo kladná (nebo naopak). Pak se podívám na hodnotu levé strany uprostřed intervalu. Je-li kladná, vezmu za nový interval levou polovinu, je-li záporná, vezmu pravou polovinu, a postup opakuji tak dlouho, dokud není interval pro mé účely dostatečně úzký. V každém kroku se zmenší na polovinu, tj. konvergence je rychlá.

Touto metodou se dá získat odhad

$$\vartheta \approx 1,352 \quad \Rightarrow \quad v \approx 4,601,$$

který je správným řešením úlohy.

Bylo by dobré se ještě podívat, co to znamená geometricky. Dokážeme, že se vlastně jedná o tečnu k malé kružnici! Je-li totiž onen trojúhelník pravouhlý (tedy jde-li o tečnu), musí pro něj platit Pythagorova věta. Vyjádřeno rovnicí

$$R^2 = r^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{R}{r} = v.$$

Nicméně dosadíme-li do našeho výrazu (1) pro v podmínku nulové derivace (2), zjistíme totéž

$$v = \cos \vartheta + \sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta} = \cos \vartheta + \sqrt{\text{tg}^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta} = \cos \vartheta + \sin \vartheta \cdot \text{tg} \vartheta = \frac{1}{\cos \vartheta}.$$

Tedy trojúhelník je pravoúhlý.

Zbývá nám malý restík, totiž diskutovat, co se stane, otočí-li se liška. Liška se nejdříve musí vrátit do své původní pozice. Když je vpravo od ní a kačátko plavalo po tečně, přímká střed-liška leží vlevo od kačátka. Bude-li se liška vracet, pak kačátko tuto přímkou protne. Máme situaci jako na začátku, jenže kačátko je nyní dále od středu než předtím. Čili liška si uškodila.

Podle počtu správných řešení se dá usoudit, že pro většinu řešitelů čtení tohoto textu nebyla úplná ztráta času.

Matouš Ringel

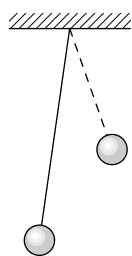
matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 2 ... přistřižené kyvadlo (3 body; průměr 2,43; řešilo 105 studentů)

Malá hmotná kulička visí na konci nehmotného provázku a kmitá svojí vlastní frekvencí f kolem rovnovážné polohy (viz obr. 6). Jaká bude vlastní frekvence f' , pokud zkrátíme provázek na polovinu?

Úloha pochází z MFO v Kanadě, 1997.

Řešení této úlohy bylo opravdu jednoduché. Malou hmotnou kuličku na nehmotném závěsu lze v dobrém přiblížení považovat za matematické kyvadlo (poloměr kuličky je malý v porovnání s délkou závěsu, závěs je nehmotný, výchylka je do 5°). Stačilo tedy použít vztah pro frekvenci matematického kyvadla



Obr. 6

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu délku zkráceného kyvadla, získáme

$$f' = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l/2}}.$$

Rovnice podělíme

$$\frac{f'}{f} = \frac{1/2\pi \cdot \sqrt{2g/l}}{1/2\pi \cdot \sqrt{g/l}} \Rightarrow f' = f \sqrt{2},$$

čímž získáme hledaný vztah mezi původní a novou frekvencí.

Chceme-li si odvodit (3), rozebereme síly působící na kuličku. Tíhovou sílu rozložíme do směru tečného ke směru pohybu a do směru kolmého na směr pohybu. Normálová složka tíhové síly je kompenzována silou závěsu, takže výslednice sil má nenulovou složku pouze ve směru pohybu kuličky. Druhá impulzová věta říká

$$J\ddot{\varphi} = M,$$

kde J je moment setrvačnosti kuličky vzhledem k závěsu ($J = ml^2$) a M je velikost momentu sil působícího na kuličku

$$M = mgl \sin \varphi.$$

Dosazením do rovnice druhé impulzové věty získáme (moment dosazujeme se záporným znaménkem, protože působí proti směru pohybu)

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} &= -mgl \sin \varphi, \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Tato rovnice nejde analyticky vyřešit. Uvažujeme-li výchylku malou, je

$$\sin \varphi \doteq \varphi$$

a rovnice (4) získá mnohem jednodušší tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (5)$$

Toto je rovnice harmonických kmitů, jejímž řešením je

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha_0),$$

kde A je amplituda, α_0 je počáteční fáze a ω úhlová frekvence harmonických kmitů. Abychom zjistili hodnotu ω , dosadíme φ z této rovnice do (5)

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha_0) + \frac{g}{l} A \cos(\omega t + \alpha_0) = 0.$$

Má-li tato rovnice platit pro všechna t , okamžitě dostáváme

$$A\omega^2 = A \frac{g}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Pro frekvenci platí

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

dostali jsme tedy výsledek (3).

Většina řešitelů měla tuto úlohu správně, nejčastější chybou byla záměna vzorců pro frekvenci a periodu. Řešitelům pak vyšla převrácená hodnota $f'/f = 1/\sqrt{2}$, což je nesmysl. Několik z vás také přistoupilo k řešení úlohy experimentálně, to ale nebylo naším záměrem.

Petra Suková & Martin Rybář

pet@fykos.mff.cuni.cz, martin@fykos.mff.cuni.cz

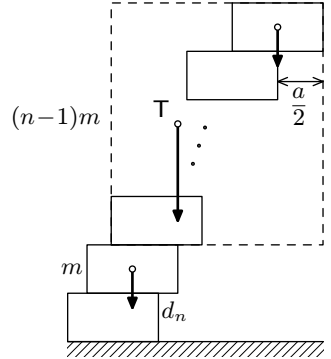
Úloha I.3 ... mistr zedník (4 body; průměr 2,33; řešilo 75 studentů)

Zedník staví cihly na sebe do výšky jako schody. Snaží se je postavit co nejvíce do dálky a ví, že jich může použít, kolik chce. Poradte mu, jak to má provést, aby se „dostal“ co možná nejdále, i když nesmí používat maltu.

Na úlohu si vzpomněl Jarda Trnka, když doma stavěl příčku.

Aby soustava cihel nespadla, musí platit, že část soustavy nad libovolnou cihlou musí mít těžiště nad podstavou této cihly. Chceme-li se dostat s cihlami co nejdále, jsme nuceni toto těžiště umístit právě nad boční hranu (ve směru stavění) této cihly.

Vzhledem k výše uvedeným úvahám bude nejjvhodnější uvažovat polohy cihel seshora dolů. Máme-li dvojici cihel, budou předcházející úvahy naplněny v případě, že horní cihla bude přecházet právě o $a/2$, je-li a délka hrany podstavy (viz obrázek 7). Nyní uvažme situaci pro $(n+1)$ -ní cihlu shora. Část soustavy nad touto cihlou můžeme rozdělit na cihlu bezprostředně nad ní (tedy n -tou shora) a na zbylou část obsahující $n-1$ cihel. Podle výše zmíněné úvahy jsme soustavu nad n -tou cihlou umístili tak, že její těžiště je nad boční hranou n -té cihly a její hmotnost je $m(n-1)$, kde m je hmotnost jedné cihly. Označme d_n délku, o jakou přechází n -tá cihla přes $(n+1)$ -ní. Má-li být těžiště prvních n cihel nad boční hranou $(n+1)$ -ní cihly, platí



Obr. 7

$$\frac{1}{nm} \left[-m \left(\frac{a}{2} - d_n \right) + m(n-1)d_n \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad d_n = \frac{a}{2n}.$$

Budeme-li takto stavět cihly na sebe, dostaneme se do vzdálenosti rovné součtu všech posunutí d_i

$$d = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} + \dots + \frac{a}{2n} + \dots = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right).$$

Součet řady v závorce je nekonečně veliký. To lze nahlédnout tak, že si členy řady vhodně uzávorkujeme

$$d = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \right].$$

Součet členů v závorce odhadneme nejnižším členem skupiny

$$d \geq \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right).$$

Protože těchto skupin můžeme vytvořit nekonečně mnoho, sčítáme nekonečně mnohokrát $1/2$, součet řady je nekonečný. Zedník se tedy může dostat do libovolné vzdálenosti.

Milan Pečeňa & Jana Hrudíková
milan@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 4 ... vodník Děsíčko poznává svět (4 body; průměr 1,67; řešilo 69 studentů)

Vodník sedí na dně v čisté klidné vodě svého rybníka a dívá se vzhůru, jeho oči jsou v hloubce $h = 1,5$ m pod povrchem vody. Jak se Děsíčkovi jeví prostor nad hladinou? Předpokládejte, že index lomu oka je stejný jako index lomu vody.

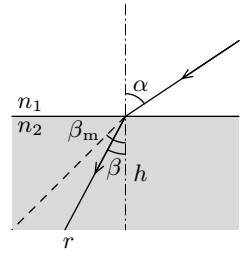
Úloha ze sbírky prof. Vybírala.

Vodník Děsíčko uvidí svět podstatně jinak, než kdyby se díval z hladiny. Je to způsobeno lomem světla, ke kterému dochází na rozhraní vzduch-voda. Pro paprsek procházející rozhraním platí Snellův zákon lomu

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \quad (6)$$

V tomto případě $n_1 < n_2$, proto se bude paprsek lomit ke kolmici. Z této nerovnosti a Snellova zákona je zřejmé, že existuje určitý kritický úhel β_m , pod kterým se lomí paprsky dopadající na hladinu pod úhlem $\alpha = 90^\circ$. Pokud $\beta > \beta_m$, nastává totální odraz (může se chápat i tak, že paprsky už by se neměly kam lomit, a proto se všechny odrazí). V našem případě $n_1 \doteq 1$ a $n_2 \doteq 1,33$, proto

$$\sin \beta_m = \frac{1}{1,33} \sin 90^\circ \Rightarrow \beta_m \doteq 49^\circ.$$



Obr. 8

Pokud se Děsíčko bude dívat pod menším úhlem než $90^\circ - \beta_m$ (měřeno od horizontu), uvidí odraz dna od hladiny, pod větším úhlem uvidí nad hladinu. Svět nad hladinou se mu bude jevit v kruhovém okně o poloměru

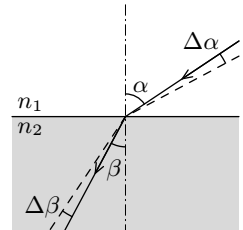
$$r = h \operatorname{tg} \beta_m \Rightarrow r \doteq 1,7 \text{ m}.$$

Nyní se zamysleme nad tím, jak deformovaný se mu bude jevit svět nad hladinou. Rozumnější a hlavně elegantnější je řešit to pomocí úhlů než pomocí vzdáleností. Člověk (i vodník) totiž vnímá věci v prostředí pomocí úhlů a pak až podle zkušenosti vyhodnotí, jak je daná věc veliká, případně jak je daleko.

Kdyby byl Děsíčko na hladině, viděl by předmět ve směru úhlu α pod úhlem $\Delta\alpha$ (můžeme ho nazvat úhlovou velikostí). Pod hladinou jej uvidí ve směru úhlu β pod úhlem $\Delta\beta$. Zjevně platí vztah

$$n_1 \sin(\alpha + \Delta\alpha) = n_2 \sin(\beta + \Delta\beta),$$

$$n_1 (\sin \alpha \cos \Delta\alpha + \cos \alpha \sin \Delta\alpha) = n_2 (\sin \beta \cos \Delta\beta + \cos \beta \sin \Delta\beta).$$



Obr. 9

Pro malé úhly $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ platí přibližně $\sin \Delta\alpha = \Delta\alpha$ a $\cos \Delta\alpha = 1$, dostáváme tedy

$$n_1 (\sin \alpha + \Delta\alpha \cos \alpha) = n_2 (\sin \beta + \Delta\beta \cos \beta).$$

Pomocí (6) a vztahu

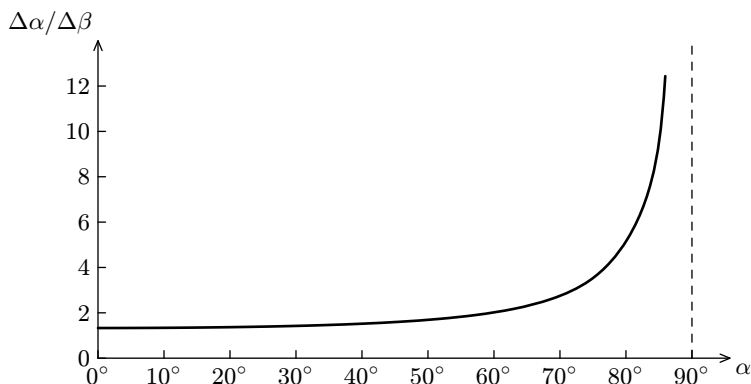
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

můžeme rovnici upravit na tvar

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - n_1^2/n_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

Výraz na levé straně je poměr mezi úhly $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$ a zjevně má význam relativní vertikální změny úhlové velikosti předmětu při přechodu z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí s indexem lomu n_2 v závislosti na úhlu, pod kterým bychom jej pozorovali bez optického rozhraní. Z výrazu na pravé straně lze vyčíst nejen vlastní zvětšení, ale při hlubším rozboru z něj lze vyčíst i vlastnosti kritického úhlu a vůbec charakteristiku celého lomu.

V našem případě bude docházet ke zmenšení, což se dalo určit i z obrázku. Pro α jdoucí k 90° poroste zmenšení nade všechny meze. Není bez zajímavosti prozkoumat, jak se tato funkce na intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ chová (viz obr. 10).



Obr. 10

K výsledku, že Děsilko uvidí nad hladinu pouze kruhovým otvorem, dospělo hodně řešitelů. Většina se ale pak spokojila s konstatováním, že obraz světa bude zdeformovaný a zmenšený. Jen málo se pokusilo o rozumnou analýzu této deformace, ať už graficky nebo početně.

Vojta Krejčířík

vojta@fykos.mff.cuni.cz

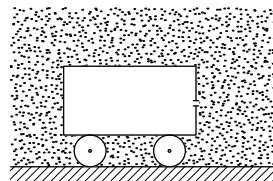
Úloha I. P ... antiraketa (4 body; průměr 1,60; řešilo 82 studentů)

Uvažme nádobu na kolečkách s otvorem dle obr. 11. Uniká-li stlačený vzduch z nádoby ven, nádoba se pohybuje. Jde o princip analogický raketovým motorům. Představme si nyní opačnou situaci. Nádobu, v níž bylo vakuum, umístěnou ve vzduchu, který do nádoby proudí malým otvorem. Jak se bude nádoba pohybovat? Předpokládejte, že se nádoba může po zemi pohybovat bez odporu.

Úloha z prvního ročníku FYKOSu.

Ujasníme si nejdříve počáteční stav. Molekuly plynu obklopují antiraketu, uvnitř se však nenachází žádná molekula. Jedná se tedy o značně uspořádaný stav, který se určitě nezachová a přejde do konečného, co nejméně neuspořádaného stavu. Molekuly v něm budou vyplňovat celý prostor okolo a uvnitř antiraketu. Takže nás už zajímá jen to, co se děje mezi těmito stavy s antiraketou.

Můžeme zvolit různé přístupy k tomuto problému (dohodneme se však, že bez větší chyby můžeme zanedbat případný odpor plynu vůči raketě, protože se bude pohybovat velmi pomalu). O tlaku před otvorem můžeme říci, že je jen nepodstatně menší než tlak v okolí, protože okolí je neohrazené a tlaky se velmi rychle vyrovnávají. Jedná se tedy o kvazistacionární děj.



Obr. 11. Antiraketa

Mikroskopický přístup

Při tomto přístupu se snažíme zjistit, co se děje s jednotlivými molekulami. V první řadě si uvědomme, že molekuly uvnitř antiraketu, které narazí na její zadní stěnu (stěna naproti otvoru), na ní nezůstanou „přilepené“, ale odrazí se k otvoru, a některé dokonce přes něj vyletí ven. Zároveň dochází ke srážkám uvnitř nádoby a přes otvor přilétají molekuly (s postupujícím časem stále méně). Museli bychom tedy nějak vyjádřit, kolik molekul narazí do zadní a kolik do přední stěny, což zjevně vůbec není jednoduché. Jinými slovy, tento přístup není realizovatelný jednoduchými úvahami.

Tlak plynu

Dohodli jsme se na předpokladu, že antiraketa se bude pohybovat pomalu. To znamená, že tlak před a za antiraketou je bez větší chyby stejně velký, označme ho $p_1(t)$ (tlak v čase t). Zevnitř působí na zadní stěnu tlak $p_2(t)$, na přední stěnu tlak $p_3(t)$, který určitě nebude menší než tlak $p_2(t)$, pokud přední stěnou vlétávají molekuly. V konečném stavu jsou samozřejmě stejně velké, platí $p_2(t) \leq p_3(t)$. Na zadní stěnu působí tedy síla

$$F_z = S[p_1(t) - p_2(t)],$$

v přední stěně je otvor o ploše ΔS , takže výsledná síla je

$$F_p = (S - \Delta S)[p_1(t) - p_3(t)].$$

Porovnáním sil zjišťujeme $F_z > F_p$, protože $S > S - \Delta S$ a

$$p_1(t) - p_2(t) \geq p_1(t) - p_3(t).$$

To znamená, že výsledná síla má směr \mathbf{F}_z a velikost $F(t) = |F_z - F_p|$. Antiraketa se pohybuje otvorem směrem dopředu. Vzhledem k tomu, že tlaky se vyrovnávají, se tato síla s časem zmenšuje. Antiraketa se pohybuje se stále se zmenšujícím zrychlením.

Někteří řešitelé si situaci zjednodušili tvrzením, že před otvorem vzniká podtlak, který antiraketu „vcucává“, což je, jak už víte, zanedbatelné.

Zákon zachování energie

Energie je skalární veličinou, proto nám při zjišťování směru pohybu nepomůže znalost změny celkové energie molekul plynu. Mohli bychom však zjistit, zda se vůbec změní; museli bychom ale nějakým numerickým způsobem spočítat celkovou energii molekul plynu na konci celého děje. Takže tato metoda nám příliš nepomůže. Někteří řešitelé si uvědomili, že pokud se plyn rozpíná do vakua, nekoná práci, protože ji nemá kam odevzdat. Náš případ však není analogický, protože antiraketa se může pohybovat.

Zákon zachování hybnosti

Předpokládáme, že plyn v okolí se nachází v kvazistacionárním stavu, celková jeho hybnost je tedy nulová. Otvorem můžou vyletovat jen molekuly, které mají nenulovou vodorovnou složku hybnosti ve směru k otvoru. Je jich však méně než molekul, které do antirakety vletují, protože uvnitř antirakety je menší koncentrace molekul. Vyletující molekuly mají proto menší hybnost než vletující molekuly. Aby platil zákon zachování hybnosti, musí se antiraketa pohybovat ve směru opačném než vlétávající molekuly, to znamená otvorem dopředu.

Postupně se hybnosti molekul, které prolétávají otvorem opačným směrem, vyrovnávají, protože se tlaky postupně vyrovnávají. Antiraketa proto zvyšuje svou hybnost stále méně, zrychlení je stále menší, dokud se tlaky nevyrovnanají. Tehdy je rovné nule.

V každém případě je výsledný pohyb antirakety téměř nepostřehnutelný.

Peter Zalom
peter@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. E ... a přeče se točí (8 bodů; průměr 4,33; řešilo 46 studentů)

Již několik století víme, že se Země točí. Změřte tedy dobu, za kterou se Země otočí o 360° kolem své osy. Svě měření se pokuste provést co nejpřesněji. Můžete navrhnout a vypracovat několik různých metod a jejich výsledky porovnat. V každém případě proveďte dostatek měření, abyste je mohli statisticky zpracovat. Úlohu vymyslel kolektiv všech organizátorů.

Teorie

Jako způsob určení doby rotace se nabízí měřit dobu mezi po sobě následujícími západy Slunce nebo pomocí stínu. Oba tyto způsoby mají jednu vadu – Země kromě pohybu kolem vlastní osy ještě obíhá kolem Slunce. Když sluneční paprsky dopadají na zemský povrch znovu pod tímž úhlem, Země se mezitím stihla pootočit kolem Slunce o $360^\circ/365,25$ (asi 1°), a tak v tu dobu Země neorotovala o celých 360° , ale jen o přibližně 359° . Je třeba provést příslušnou korekci. Ani takhle to však není úplně v pořádku, neboť trajektorie, po které obíhá Země okolo Slunce, není kružnice, nýbrž elipsa a rychlost pohybu Země je v různých místech trajektorie různá (2. Keplerův zákon)¹.

Vhodnější metodou je určovat dobu rotace z polohy hvězd. Pohyb hvězd a pohyb středu Země vzhledem ke vzdáleným hvězdám můžeme v tomto případě skutečně zanedbat. Pokud máme přístup ke hvězdářskému dalekohledu, můžeme jej pro toto měření využít. (Co jiného než hvězdářský dalekohled vydrží nehnuté stát po celých 23 h 56 min anebo pomocí čeho jiného lze na stupnici odečítat rektascenzi?)

Dále můžeme využít metodu Foucaultova kyvadla. Tato metoda je však náročná na praktické provedení a nepřesnosti. Další možností je změřit tíhové zrychlení, které, jak známo, závisí na rychlosti rotace Země. Chyba takového měření by však byla srovnatelná s měřenou hodnotou.

Výsledky měření

Jelikož jsem neměla k měření dostatek hvězdných nocí, rozhodla jsem se použít naměřené hodnoty některého z řešitelů. Kdyby toto řešení mělo být zcela autorské, nemohlo by být v žádném případě vzorové, protože výsledky *Stanislava Vosolobě* nebo *Tomáše Bednárika* by byly očividně lepší než ty moje. Vybrala jsem ke zveřejnění Stanislavovo řešení. Ten měřil v šesti dnech čas, kdy se hvězda Capella promítla do určitého bodu.

den	1. měření		2. měření	
	t_1 [h:min:s]	Δt_1 [min:s]	t_2 [h:min:s]	Δt_2 [min:s]
1	20:36:35	–	20:40:15	–
2	20:24:47	3:56	20:28:25	3:57
3	20:20:50	3:57	20:29:05	4:20
4	20:12:50	4:00	20:16:00	4:03
5	20:05:20	3:45	20:07:50	4:05
6	20:01:37	3:34	20:03:58	3:52

Vypočítáme průměrnou hodnotu Δt a směrodatnou odchylku $s_{\Delta t}$, k hrubé chybě nedošlo.

$$\Delta t = 4 \text{ min } 2,9 \text{ s}, \quad s_{\Delta t} = 6,7 \text{ s}.$$

¹⁾ Je užitečné nakreslit si obrázek. Pojmy jako hvězdný a sluneční den jsou objasněny např. v gymnaziální učebnici fyziky – díl astrofyzika.

Jako celkovou chybu vezmeme trojnásobek směrodatné odchylky, chyba měření je vůči ní zanedbatelná

$$\Delta t = (4,0 \pm 0,3) \text{ min}.$$

Pro dobu rotace Země dostáváme

$$T = 24 \text{ h} - \Delta t = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 0 \text{ s} \pm 20 \text{ s},$$

v rámci chyby se shodujeme s tabulkovou hodnotou 23 h 56 min 4 s.

Poznámky k došlým řešením

Musím hned zdůraznit, že tato úloha byla experimentální. Sešla se nám totiž spousta řešení, která byla sice správně, avšak něco jim chybělo. Tím něčím nebylo nic jiného než naměřené hodnoty, jejich zpracování a zhodnocení jejich přesnosti resp. nepřesnosti, plus případný detailnější popis provedení experimentu. Při bodování se cenilo i navržení dalších alternativních metod.

Velká část z vás měřila dobu rotace pomocí Slunce. Mnoho těch, kteří měřili touto metodou, obdrželo takřka tabulkový výsledek 23 h 56 min, ačkoliv většina z nich zapoměla spáchat již výše zmíněnou korekci. Na první pohled to je překvapivé, ale mám takový pocit, že když člověk tuší, co by měl správně naměřit, více či méně podvědomě odečítá hodnoty tak, aby se výsledkem stala právě ona očekávaná hodnota.

Druhá zhruba polovina řešitelů určovala dobu rotace z polohy hvězd. Zde bych ráda vyzdvihla úsilí *Jakuba Bandy*, který si pro účely experimentu sestrojil vlastní astroláb.

Rotaci Země pomocí Foucaultova kyvadla či tíhového zrychlení nikdo neměřil. Vzhledem k náročnosti obou metod se tomu ani nedivím.

Jana Ringelová
jana@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. S ... kinematika hmotného bodu (5 bodů; průměr 3,84; řešilo 31 studentů)

a) Poloha hmotného bodu v závislosti na čase v kartézské souřadnicové soustavě je popsána polohovým vektorem

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, d).$$

Určete, jak závisí na čase vektory $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{a}(t)$. Vypočítejte také tečnou, normálovou a binormálovou složku zrychlení.

b) Kolo poloměru R se valí bez prokluzování po přímé dráze rychlostí v . S kolem je pevně spojen bod ve vzdálenosti r od středu. Určete jeho pohyb a rychlost jako funkce času v soustavě spojené se Zemí. Může být jeho rychlost v určitém okamžiku nulová?

Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

a) Vektor rychlosti \mathbf{v} je roven první časové derivaci polohového vektoru \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d(R \cos \omega t, R \sin \omega t, d)}{dt} = \left(\frac{dR \cos \omega t}{dt}, \frac{dR \sin \omega t}{dt}, \frac{dd}{dt} \right) = \\ &= (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, 0). \end{aligned}$$

Vektor zrychlení \mathbf{a} je definován jako první časová derivace vektoru rychlosti, platí tedy

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0).$$

K určení tečné, normálové a binormálové složky zrychlení použijeme vztahy ze seriálu. Nejprve vypočítáme velikost rychlosti

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 \omega t + R^2\omega^2 \cos^2 \omega t} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega,$$

kde jsme využili $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Všimněte si, že velikost rychlosti nezávisí na čase. Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru R úhlovou rychlostí ω . Pro tečnou složku zrychlení vychází

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = 0$$

a pro normálovou (poloměr oskulační kružnice je roven R)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2.$$

Binormálová složka zrychlení a_b je vždy nulová.

Jediná nenulová složka zrychlení je tedy normálová, zrychlení má směr normály a jeho velikost je a_n .

- b) Zaveďme si kartézskou souřadnicovou soustavu S následovně. Osa x je vodorovná a míří ve směru pohybu středu kola, osa y míří svisle vzhůru (viz obr. 12). Pohyb kola je rovinný, osu z není třeba uvažovat. Počátek souřadnicové soustavy umístíme na úroveň země. Polohu středu kola, které se pohybuje rychlostí v , popisuje polohový vektor

$$\mathbf{r}_{S'} = (vt, R).$$

Nyní přejdeme do soustavy spojené se středem kola, která je rovněž inerciální. V ní si zavedeme souřadnicovou soustavu S' s počátkem ve středu kola a se stejně orientovanými osami x a y . V této soustavě koná hmotný bod, který je upevněn ve vzdálenosti r od středu, pohyb po kružnici. Z analogie s částí a) dostáváme pro polohový vektor

$$\mathbf{r}' = (r \cos \omega t, -r \sin \omega t),$$

jen je třeba uvážit, jakým směrem se bude kolo otáčet.

Opět se vraťme do soustavy S spojené se Zemí a vyjádřeme si polohový vektor hmotného bodu. Ten je dán vektorovým součtem $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{S'} + \mathbf{r}'$, dostáváme tedy

$$\mathbf{r}(t) = (vt + r \cos \omega t, R - r \sin \omega t).$$

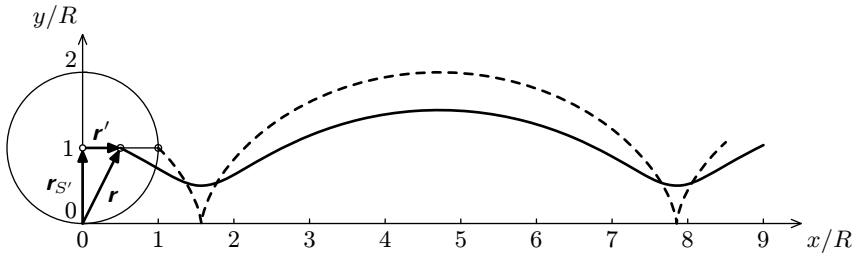
Úhlovou rychlost určíme z podmínky, že valící se kolo neprokluzuje. Platí tedy $v = \omega R$, odtud

$$\mathbf{r}(t) = \left(vt + r \cos \frac{vt}{R}, R - r \sin \frac{vt}{R} \right).$$

Hmotný bod se bude pohybovat po cykloidě (viz graf na obrázku 12).

Vektor rychlosti určíme derivováním podle času

$$\mathbf{v}(t) = \left(v - \frac{vr}{R} \sin \frac{vt}{R}, -\frac{vr}{R} \cos \frac{vt}{R} \right) = v \left(1 - \frac{r}{R} \sin \frac{vt}{R}, -\frac{r}{R} \cos \frac{vt}{R} \right).$$



Obr. 12

Má-li být rychlost v určitém okamžiku nulová, musí být obě složky rychlosti nulové. Svislá složka rychlosti bude nulová, pokud argument kosinu bude lichý násobek $\pi/2$, což nastane v časech

$$\frac{vt}{R} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_k = (2k+1)\frac{\pi R}{2v}.$$

Rychlost hmotného bodu v těchto časech bude

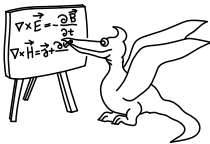
$$\mathbf{v}(t_k) = v \left(1 - \frac{r}{R} \sin \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \right], 0 \right) = v \left(1 \pm \frac{r}{R}, 0 \right).$$

Rychlost bude nulová jestliže $r = R$, tedy pokud se hmotný bod nachází na obvodu kola, a k je sudé ($k = 2l$). Vypočítejme ještě polohu hmotného bodu v tomto okamžiku

$$\mathbf{r}(t_{2l}) = \left((4l+1)\frac{\pi R}{2}, 0 \right),$$

hmotný bod se při nulové rychlosti dotýká země.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Lagrangeovská formulace mechaniky

V této kapitole si budeme povídat o zcela jiné formulaci mechaniky, než je Newtonův pohled, který jsme si zopakovali minule. Pokud nějaké části nebudete zcela rozumět, přejděte rovnou na příklady, kterými je výklad dostatečně proložen.

Vazby

Newtonovská mechanika umí přehledně a jednoduše řešit příklady, pokud jsou jednoznačně určeny působící síly. Problém ale nastane, pokud se objeví *vazba*. Jedná se o geometrickou podmínku, kterou daná soustava musí splňovat. Většinou se jedná o případ, kdy je těleso vázáno na (musí se pohybovat po) nějakou křivku, například kružnici či přímku. Obecně vazbu hmotného bodu na plochu můžeme matematicky vyjádřit pomocí rovnice

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (7)$$

Vazba může být, jak je zapsáno v rovnici (7), obecně závislá i na čase. Vazeb může být i několik, pro r vazebných podmínek je nutno psát

$$f_j(x, y, z, t) = 0, \quad \text{pro } j = 1, \dots, r. \quad (8)$$

Ukažme si sestavení takovéto rovnice na nejjednodušších případech.

Příklad 3 – vazebné podmínky

Určete vazebné rovnice pro pohyb hmotného bodu

- po přímce, která je souhlasná s osou x ,
- po kružnici se středem o souřadnicích $[x_0, y_0]$ a poloměrem R ,
- po kouli o poloměru R se středem na ose y , který se pohybuje podél osy y rychlostí v .

Řešení

- a) Zde je určení podmínky jednoduché, vyplývá totiž přímo ze zadání

$$y = 0, \quad z = 0.$$

- b) Pro každý bod na kružnici je splněna rovnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Vazebná podmínka má potom tvar

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0, \quad z = 0.$$

- c) Pro souřadnice hmotného bodu na kouli se středem v $[x_0, y_0, z_0]$ platí $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Protože střed koule je na ose y a y -ová souřadnice středu lineárně roste s časem, platí pro vazebnou podmínku

$$x^2 + (y - vt)^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Pokud máme soustavu více hmotných bodů, které jsou navzájem svázány vazebnou podmínkou, potom můžeme rovnici (8) zobecnit pro N hmotných bodů

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad \text{pro } j = 1, \dots, r.$$

Index u souřadnic probíhá všechny hmotné body, které se na vazbě podílejí. Zkusme si teď vazby nějakým způsobem klasifikovat.

Obecnou vazbu danou rovnicí (7) nazýváme *holonomní*. Pokud neobsahuje explicitně čas, nazýváme takovou vazbu *skleronomní*, v opačném případě mluvíme o vazbě *rheonomní*. Vazebné podmínky mohou záviset i na rychlostech, formulace Lagrangeovy mechaniky s těmito vazbami je poněkud složitější, proto zde nebudeme tyto vazby více popisovat.

Zobecněné souřadnice

Dosud jsme všechny problémy řešili v kartézských souřadnicích. Zavádění těchto souřadnic nemusí být vždy „nejpřirozenější“; můžeme najít souřadnice, ve kterých se nám bude problém řešit daleko snadněji. Ještě výrazněji to platí pro soustavy s holonomními vazbami.

Podívejme se na příklad 3. K určení polohy částice v částech a) a b) nám stačí jenom jedna souřadnice. V prvním případě je to poloha na ose x , můžeme tedy zůstat u kartézských souřadnic. V případě b) nám sice k popisu polohy bodu stačí jedno číslo – poloha na kružnici, v kartézském systému ale potřebujeme k určení polohy x -ovou i y -ovou souřadnici. Kdybychom

například znali jen souřadnici y , nedokážeme z vazebné podmínky (7) určit souřadnici x , podmínka je totiž kvadratická v x i v y . Zavedením polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

nám bude k popisu polohy stačit pouze souřadnice φ , neboť vazebná podmínka získá tvar $r = R$.

Přistupme k definici zobecněných souřadnic. Předpokládejme, že polohu částice určíme proměnnými q_1, q_2, q_3 . Kartézské souřadnice x_1, x_2, x_3 můžeme vyjádřit takto²

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t). \quad (9)$$

Abychom mohli trojici q_1, q_2, q_3 nazvat souřadnicemi bodu, musí být zobrazení x_i vzájemně jednoznačné, tj. každé trojici q_1, q_2, q_3 odpovídá právě jedna trojice x_1, x_2, x_3 a naopak. Pak existuje inverzní zobrazení

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (10)$$

Uvažujme soustavu s r holonomními podmínkami (8) a zavedme následující souřadnice. Prvních $n = 3 - r$ zvolíme libovolně podle (10) a posledních r následovně

$$q_{i+3-r} = f_i(x, y, z, t) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, r.$$

Tudíž (9) dostává tvar

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t). \quad (11)$$

Kartézské souřadnice závisí jen na prvních n obecných souřadnicích, protože ostatní jsou nulové. Poslední vztah můžeme interpretovat takto. Souřadnice x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice bodu v třírozměrném prostoru. Zavedením r holonomních podmínek v tomto prostoru vznikne podprostor³ dimenze n , na nějž je pohyb hmotného bodu omezen. Jeho body tedy stačí určovat n obecnými souřadnicemi q_1, \dots, q_n , vztahem (11) jsou pak určeny všechny kartézské souřadnice jednoznačně. Protože polohu částice určuje n souřadnic, říkáme, že má soustava n stupňů volnosti.

V příkladu 3 má tedy hmotný bod v části a) a b) jeden stupeň volnosti a v části c) dva stupně volnosti.

Matematické kyvadlo je podrobena dvěma holonomním vazbám, má tedy jeden stupeň volnosti, jeho stav popisujeme orientovaným úhlem, který svírá se svislou rovinou.

Pokud chceme řešit problém hmotného bodu omezeného r vazebnými podmínkami, můžeme zůstat v kartézských souřadnicích, jak ukazují Lagrangeovy rovnice 1. druhu. Ve většině případů je daleko vhodnější přejít k $n = 3 - r$ zobecněným souřadnicím, které zavádíme tak, aby jimi byly v každém čase určeny jednoznačně kartézské souřadnice. Při jejich hledání využíváme symetrií systému, aby se nám popis systému co nejvíce zjednodušil. Pohybové rovnice v těchto zobecněných souřadnicích získáme nejlépe z Lagrangeových rovnic 2. druhu.

Na závěr uvedme dva nejdůležitější systémy zobecněných souřadnic, se kterými se ve fyzice díky různým symetriím setkáte velice často.

²⁾ Označení kartézských souřadnic jako x, y, z je ekvivaletní s x_1, x_2, x_3 . Při použití indexů se více hodí druhá možnost.

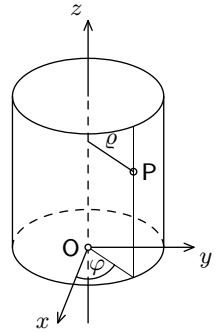
³⁾ Tento prostor nazýváme *konfiguračním prostorem* holonomní soustavy.

Pokud má zkoumaný systém válcovou symetrii, zavádíme tzv. *válcové souřadnice* (viz obr. 13). V prostoru volíme osu, od které měříme vzdálenost ϱ , podél ní měříme vzdálenost z a úhel otočení kolem osy udává φ . Transformační vztahy s kartézským systémem jsou

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z.$$

V systémech se sférickou symetrií zavádíme tzv. *sférické souřadnice* (viz obr. 14). V prostoru volíme bod, od kterého měříme vzdálenost r , a úhel otočení kolem tohoto bodu udávají $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$. Transformační vztahy s kartézskou souřadnicovou soustavou jsou

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta.$$



Obr. 13

Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Zavedení vazeb a vazebných rovnic nás vede k zahrnutí vazebné síly do Newtonových rovnic. Uvažujme nejdříve pohyb omezený jednou vazebnou podmínkou (pohyb po ploše). Nepřihlížíme-li ke tření (jež může být eventuálně započítáno zvlášť), působí vazebná plocha na hmotný bod silou \mathbf{R} . Od této síly očekáváme, že je kolmá na vazebnou plochu, protože se od plochy nelze odtrhnout ani se do ní zabořit. Tuto vlastnost můžeme zapsat takto

$$\mathbf{R} = \lambda \text{grad } f, \quad (12)$$

kde f je vazba, grad je diferenciální vektorový operátor *gradient*

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

a λ je zatím neurčená funkce času. Pro zvědavé čtenáře ukažme, že vektor grad f je skutečně kolmý na vazebnou plochu (kolmá na tuto plochu je potom i vazebná síla \mathbf{R}).

Vezměme dva body, pro které platí $f = 0$

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(x + dx, y + dy, z + dz) = 0,$$

potom také

$$0 = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z).$$

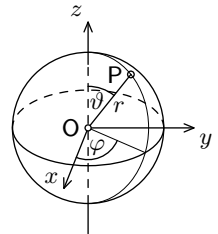
První člen rozvineme v Taylorovu řadu do prvního řádu

$$0 = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz - f(x, y, z),$$

to můžeme ale také zapsat jako skalární součin

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r},$$

neboli vektor grad f je kolmý na vektor $d\mathbf{r}$, ten však leží v ploše f , gradient je tedy nutně kolmý na plochu f .



Obr. 14

Přidáme vazebnou sílu do Newtonovy pohybové rovnice, dostaneme

$$\mathbf{F} + \lambda \operatorname{grad} f = m\mathbf{a}. \quad (13)$$

Tato rovnice se nazývá *Lagrangeova rovnice 1. druhu* a představuje vlastně tři pohybové rovnice pro tři souřadnice. Spolu s vazebnou podmínkou (7) tak máme soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé a_x, a_y, a_z a λ .

Příklad 4 – nakloněná rovina

Určete složky zrychlení hmotného bodu pohybujícího se po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou podložkou úhel α .

Řešení

Na hmotný bod působí tíhová síla, která má složky $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$. Pro nakloněnou rovinu platí $\operatorname{tg} \alpha = z/x$, vazebná podmínka má tedy tvar

$$f = x \operatorname{tg} \alpha - z = 0.$$

Vektor $\operatorname{grad} f$ má složky

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (\operatorname{tg} \alpha, 0, -1).$$

Vše dosadíme do rovnice (13)

$$(0, 0, -mg) + \lambda(\operatorname{tg} \alpha, 0, -1) = m(a_x, a_y, a_z).$$

Pro jednotlivé složky dostáváme tedy rovnice

$$\lambda \operatorname{tg} \alpha = ma_x, \quad 0 = a_y, \quad -mg - \lambda = ma_z.$$

Zderivujeme-li vazebnou podmínku dvakrát podle času, dostaneme čtvrtou rovnici

$$a_x \operatorname{tg} \alpha - a_z = 0. \quad (14)$$

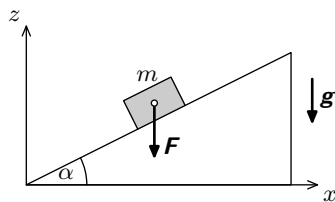
Vyjádříme ze třetí rovnice λ , dosadíme do první a použijeme (14).

$$\begin{aligned} (-mg - ma_x \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha = ma_x &\Rightarrow a_x = -\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = -g \sin \alpha \cos \alpha, \\ a_y = 0, \quad a_z = a_x \operatorname{tg} \alpha = -g \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Dostali jsme známé zrychlení tělesa, které se pohybuje po nakloněné rovině.

Pokud budeme mít více nezávislých vazebných podmínek r , započítáme každou jako vazebnou sílu zvlášť. V tomto případě bude mít Lagrangeova rovnice tvar

$$\mathbf{F} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad} f_i = m\mathbf{a}. \quad (15)$$



Obr. 15. Nakloněná rovina

Jde vlastně o Newtonův zákon síly, v němž rozdělujeme síly na vtištěné \mathbf{F} a vazebné \mathbf{R} , které můžeme také napsat pomocí vztahu (12). Zkusme teď vztah (15) zobecnit. Místo zrychlení \mathbf{a} pišme $\ddot{\mathbf{r}}$, což je druhá derivace polohového vektoru podle času. Dostáváme tak po dosazení do (15) s (8) obecně soustavu čtyř diferenciálních rovnic druhého řádu.

$$\mathbf{F} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad} f_i = m\ddot{\mathbf{r}},$$

$$f_i(x, y, z, t) = 0, \quad \text{pro } i = 1, \dots, r.$$

Pokud nechceme použít kartézské souřadnice (často se pro popis dané soustavy nehodí), můžeme použít obecné souřadnice, o nichž jsme se již něco dozvěděli. Lagrangeovy rovnice 1. druhu budou mít formálně stejný tvar, ve složkách je ale jejich vyjádření dosti složité (zjednoduší se pouze vazebná podmínka). Pro řešení problémů v obecných souřadnicích proto nebudeme Lagrangeovy rovnice 1. druhu používat, dále v textu si na to ukážeme daleko vhodnější nástroj.

Na závěr ještě zmíníme tvar Lagrangeových rovnic 1. druhu pro soustavu N hmotných bodů. Soustavu budeme popisovat v kartézské souřadnicové soustavě. Vezměme si j -tý bod této soustavy, jemu přiřadíme trojici kartézských souřadnic (x_j, y_j, z_j) . Soustava nechť je omezena r holonomními vazbami

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Soustava Lagrangeových rovnic 1. druhu má tvar

$$\mathbf{F}_1 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad}_1 f_i = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{F}_N + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad}_N f_i = m_N \ddot{\mathbf{r}}_N,$$

kde

$$\operatorname{grad}_j f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right).$$

Rovnice jsou vektorové, máme tak $3N + r$ diferenciálních rovnic pro $3N + r$ neznámých $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \lambda_1, \dots, \lambda_r$.

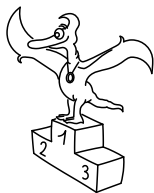
Úloha III. S ... Lagrangeovy rovnice 1. druhu

- Mějme hmotný bod zavěšený na nehmotném a nepružném vlákně. Zaveďte kartézskou souřadnicovou soustavu a v ní napište vazebnou podmínku pro hmotný bod.
- Napište Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro hmotný bod z části a). Ukažte, že z nich plyne pohybová rovnice matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

kde φ je úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

- Malé těleso je v klidu na vrcholu polokoule a začne klouzat dolů. Pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu určete, v jaké výšce se těleso odlepí od polokoule. (Nápověda: Těleso se odlepí v okamžiku, kdy $\lambda = 0$.)



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	4	8	5	32	<i>100</i>	32
1. Stanislav Vosolsobě	G U Balvanu Jablonec nN	2	3	4	3	4	9	5	30	<i>94</i>	30
2. Ivan Dimitrov		2	3	2	4	4	8	5	28	<i>88</i>	28
3. Roman Fiala	VOŠ a SPŠE Plzeň	4	3	4	3	0	8	–	22	<i>81</i>	22
4. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	2	3	4	3	2	–	5	19	<i>79</i>	19
5.–7. Peter Greškovič	G Svidník	2	3	2	3	2	2	–	14	<i>52</i>	14
<i>Petr Houšťek</i>	G Pelhřimov	2	3	4	0	–	–	5	14	<i>70</i>	14
<i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	4	3	4	–	3	–	–	14	<i>93</i>	14
8. Zdeněk Kučka	G Neumannova, Žďár n. S.	2	3	–	1	3	–	4	13	<i>65</i>	13
9.–10. Kateřina Fišerová	G Lepařovo, Jičín	1	3	–	4	4	–	–	12	<i>80</i>	12
<i>Petr Vaško</i>	MasG Petáková, Plzeň	1	3	4	4	–	–	–	12	<i>80</i>	12
11.–12. Petr Morávek	G Dašická, Pardubice	–	3	4	–	–	–	4	11	<i>92</i>	11
<i>Zuzana Safernová</i>	G Bílovec	–	3	4	–	–	–	4	11	<i>92</i>	11
13. Bedřich Roskovec	MasG Petáková, Plzeň	1	3	4	1	–	1	–	10	<i>43</i>	10
14. Lenka Doubravová	G Matyáše Lercha, Brno	–	3	2	2	2	–	–	9	<i>60</i>	9
15.–16. Michal Humpula	G Uherský Brod	1	3	–	2	–	–	2	8	<i>50</i>	8
<i>Robert Roreitner</i>	MasSŠ chemická, Praha	2	3	1	0	0	–	2	8	<i>33</i>	8
17.–18. Zdeněk Lochman	COP Hronov	1	1	1	1	3	–	–	7	<i>37</i>	7
<i>Petr Novotný</i>	COP Hronov	0	3	–	1	3	–	–	7	<i>47</i>	7
19.–20. Pavlína Böhmová	G Komenského Havířov	–	3	1	1	0	–	–	5	<i>33</i>	5
<i>Tomáš Mihalík</i>	G Husitská	1	3	1	0	0	–	–	5	<i>26</i>	5
21. Kateřina Žabková	SPgŠ Liberec	0	3	1	–	–	–	–	4	<i>36</i>	4
22. Jiří Kubr	COP Hronov	0	0	–	–	3	–	–	3	<i>27</i>	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	4	8	5	32	100	32
1.–2. Tomáš Bednárik	G Vsetín	2	3	4	4	1	9	5	28	88	28
Slavomír Takáč	G Nové Zámky	2	3	4	2	4	8	5	28	88	28
3. Petr Bezmozek Dvořák	SPŠ Jihlava	1	3	4	3	1	6	4	22	69	22
4. Peter Perešíni	G J. G. Tajovského	2	3	4	1	4	7	–	21	78	21
5. Aleš Podolník	G Kapitána Jaroše, Brno	2	3	4	–	2	5	4	20	71	20
6.–7. Petra Malá	G Moravský Krumlov	–	3	4	3	0	6	2	18	64	18
Zuzana Pöbišová	G J. G. Tajovského	1	3	4	–	3	7	–	18	78	18
8. Petr Smítal	G Kapitána Jaroše, Brno	2	3	3	3	1	–	5	17	71	17
9. Jan Bednár	COP Hronov	–	3	2	3	3	–	4	15	75	15
10. Libor Šachl	G Terezy Novákové Brno	2	3	4	3	1	1	–	14	52	14
11.–15. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	–	3	4	1	–	0	5	13	54	13
Miroslav Hrubý	BG Barvičova Brno	1	3	2	0	1	6	–	13	48	13
Monika Josieková	G Český Těšín	2	3	4	2	–	1	1	13	46	13
Adam Přenosil	G Sladkovského nám., Praha	2	2	4	0	–	–	5	13	65	13
Marek Scholz	G Neratovice	2	3	–	3	–	–	5	13	81	13
16.–19. Roman Derco	G Svidník	4	3	3	1	1	–	–	12	63	12
Tereza Klímošová	G Lanškroun	–	3	4	–	–	–	5	12	100	12
Martina Miková	G Olomouc	2	3	1	2	1	3	–	12	44	12
Jenda Valášek	G Broumov	–	3	–	3	–	6	–	12	80	12
20.–25. Jiří Hloska	G Terezy Novákové Brno	1	3	–	–	4	–	3	11	69	11
Martin Konečný	G Boskovice	1	3	4	0	0	–	3	11	46	11
Martin Koštejn	SPgŠ Liberec	2	3	3	0	3	–	–	11	58	11
Petr Kubala	SPŠ Frýdek Místek	1	3	–	–	0	7	–	11	58	11
Vladimír Sívák	G Ludovita Štúra	1	3	–	–	1	6	–	11	58	11
Tomáš Štátný	G D. Tatarku, Poprad	1	3	1	2	1	2	1	11	34	11
26.–27. Miroslav Janáček	SPgŠ Liberec	1	2	1	–	0	6	–	10	43	10
Michal Sívák	G Ludovita Štúra	–	3	–	–	1	6	–	10	67	10
28.–29. Beáta Hergelová	G Lučenec	1	3	4	1	0	–	–	9	47	9
Tomáš Jirotko	G Klatovy	1	3	–	–	–	2	3	9	45	9
30.–32. Jaroslav Haněl	G Bílovec	4	1	3	–	–	–	–	8	73	8
Vojtěch Molda	G Vsetín	2	1	2	2	1	–	–	8	42	8
Jana Vrábelová	G Ludovita Štúra	1	3	1	–	1	2	–	8	35	8
33.–34. Martin Hrdlička	G Louny	1	3	–	–	3	–	–	7	64	7
Jana Pokorná	COP Hronov	1	3	–	–	3	–	–	7	64	7
35.–36. Lucie Hympánová	G Kladno	1	3	–	1	0	1	–	6	26	6
Michal Seidel	COP Hronov	–	3	–	–	3	–	–	6	86	6
37.–40. Pavel Burda	G Křenová Brno	0	3	–	2	–	–	–	5	45	5
Vendula Exnerová	G Nad Štolou, Praha	2	3	–	–	0	–	–	5	45	5
Milan Klicpera	G Čelákovice	1	1	1	–	2	–	–	5	33	5
Radek Papoušek	G Lesní čtvrť, Zlín	1	3	–	1	–	–	–	5	45	5
41.–42. Radka Bystřická	G Hodonín	1	3	–	–	–	–	–	4	57	4
Jan Matoušek	G Žižkova, Kolín	1	3	–	–	0	–	–	4	36	4
43.–44. František Matyska	COP Hronov	1	1	–	1	0	–	–	3	20	3
Darja Suchá	G Kladno	–	3	–	–	–	–	–	3	100	3
45.–46. Martin Bernátek	SOŠ Krnov	1	–	–	1	–	–	–	2	25	2
Ondřej Lébl	G Nymburk	1	1	–	–	–	–	–	2	29	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	4	8	5	32	100	32
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy Praha	1	3	3	4	3	9	5	28	88	28
2. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče	3	3	4	3	–	6	5	24	86	24
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Zborovská, Praha	2	3	4	3	4	–	4	20	83	20
4. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	1	3	4	2	2	–	4	16	67	16
5. <i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	1	3	4	–	1	5	–	14	61	14
6. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	1	3	1	3	–	0	5	13	46	13
7.–8. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra	1	3	1	–	2	5	–	12	52	12
<i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická Praha	1	3	1	0	1	6	–	12	44	12
9. <i>Juraj Zajac</i>	G Ľudovíta Štúra	1	3	–	–	3	4	–	11	58	11
10. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	2	3	1	–	0	4	–	10	43	10
11. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	1	3	3	2	–	–	–	9	60	9
12.–15. <i>Kristýna Krejčová</i>	G Tišnov	2	0	2	–	4	–	–	8	53	8
<i>Martin Leza</i>	G Vysoké Mýto	0	0	–	–	3	5	–	8	42	8
<i>Vlastimil Peksa</i>	G Zborovská, Praha	3	3	–	2	0	–	–	8	53	8
<i>Jiří Špale</i>	GOA Sedlčany	–	3	–	1	4	–	–	8	73	8
16. <i>Beáta Garšicová</i>	G Vídeňská, Brno	1	0	–	–	–	6	–	7	47	7
17.–18. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	1	1	–	1	3	–	–	6	40	6
<i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	3	–	0	0	3	–	6	32	6
19.–21. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	2	–	2	–	–	–	–	4	50	4
<i>Petr Dvořák</i>	G V. Makovského	1	–	–	–	3	–	–	4	50	4
<i>Miloslava Kučeríková</i>	G Poprad	1	3	–	–	0	–	–	4	36	4
22. <i>Petra Votavová</i>	G Cheb	1	0	1	0	0	1	–	3	11	3
23.–24. <i>Tomáš Ehrlich</i>	G Holešov	2	–	–	–	–	–	–	2	50	2
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	1	0	–	1	–	–	–	2	18	2
25.–27. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	0	–	0	–	0	–	–	0	0	0
<i>Jana Przewczková</i>	G Havířov - Podlesí	0	0	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Jana Susová</i>	GOA Sedlčany	0	–	0	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	4	8	5	32	100	32
1.–2. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra	1	3	1	1	4	4	–	14	52	14
<i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra	1	3	1	0	4	5	–	14	52	14
3. <i>Tereza Fantová</i>	G Benešov	1	3	2	1	0	6	–	13	48	13
4. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	1	3	2	3	3	–	–	12	63	12
5.–6. <i>Lenka Sabová</i>	G Javorová, S. Nová Ves	–	3	1	2	3	–	–	9	60	9
<i>Jan Valášek</i>	G Zborovská, Praha	2	3	1	3	0	–	–	9	47	9
7. <i>Josef Müller</i>	G dr. Josefa Pekaře	1	3	1	2	0	–	–	7	37	7
8.–9. <i>Michal Berta</i>	G Trebišov	1	2	0	0	0	2	–	5	19	5
<i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	0	1	1	–	3	–	–	5	33	5
10.–11. <i>Petr Hons</i>	G Ostrava - Zábřeh	1	0	1	0	0	2	–	4	15	4
<i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	1	0	2	1	0	–	–	4	21	4
12. <i>Jan Macháček</i>	G Jeseník	1	0	1	1	0	–	–	3	16	3
13.–18. <i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	1	–	1	–	0	0	–	2	10	2
<i>Vlastimil Daniček</i>	COP Hronov	0	0	0	1	0	1	0	2	6	2
<i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	0	0	1	0	1	0	–	2	7	2
<i>Michaela Kulínová</i>	G Ostrava - Zábřeh	1	–	1	–	0	–	–	2	17	2
<i>Jan Navrátil</i>	COP Hronov	0	1	–	–	1	–	–	2	18	2
<i>Aleš Růžička</i>	G Tábor	1	0	1	–	–	–	–	2	18	2
19. <i>Barbora Henzlová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	1	–	–	–	–	–	–	1	25	1

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.