

Milí řešitelé!

XIX. ročník FYKOSu je již u konce. Doufáme, že se vám seminář líbil, že jste si zasoutěžili, ale hlavně se také něco nového naučili. S maturanty se těšíme na shledání v řadách organizátorů, s ostatními pak v příštím ročníku a s těmi úspěšnějšími také na podzimním soustředění.

Všem nedočkavým řešitelům se moc omlouváme, že řešení 5. a 6. série nacházíte ve schránce až teď. Zpoždění je způsobeno zaneprázdněností editora a rozsahem víceméně nutných korektur autorských řešení. Snad proto oceníte vypilovaná řešení, některá jsou důsledkem toho odlišná od těch, co jsme zveřejnili na našem webu v průběhu června. Věříme, že si během prázdnin najdete chvíli času a autorská, ba vzorová řešení si přečtete.

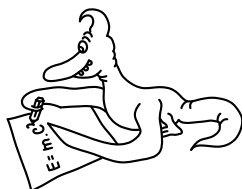
Na konci brožurky najdete výsledkovou listinu po 5. sérii a konečnou výsledkovou listinu.

Vás, kteří se již nedočkavě těšíte na příští XX. ročník FYKOSu, potěší zadání první série a první díl seriálu na konci brožurky.

Během prázdnin budeme pracovat na ročence XIX. ročníku, kde najdete souhrn všech úloh i jejich řešení, seriál a také krátké texty o podzimním a jarním soustředění a o zájezdu do CERNu. Velké části letošních řešitelů (těm úspěšnějším) zašleme ročenku zdarma koncem letošního roku. Účastníci jarního soustředění se již také brzy dočkají DVDčka z limitované edice, na kterém budou mimo jiné fotky a video.

Za všechny organizátory vám pěkný zbytek prázdnin přeje

Honza Prachař
editor

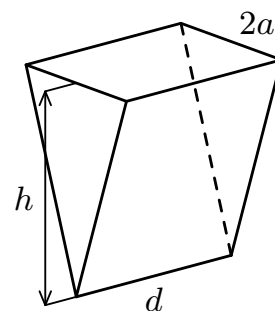
**Řešení V. série****Úloha V.1 ... veď svou bárku dál** (4 body; průměr 2,56; řešilo 27 studentů)

Pracovníci NASA objevili, že určité sedimenty rostlinného původu na měsíci Europa mají zajímavou štěpnost na velice pevné desky tvaru obdélníku a rovnoramenného trojúhelníku, takže z nich lze snadno a levně postavit loď výšky h , délky d a šířky paluby $2a$ jako na obrázku 1. Kapitán vám dává za úkol zjistit, pro jaké hustoty tamějších oceánských vod bude plavba bezpečná.

Předpokládejte, že desky mají konstantní tloušťku a hustotu ρ_m , že loď je dutá a má palubu. (Diskutujte případ, že plavidlo není duté a celé má konstantní hustotu ρ_m .) Nemusíte kapitánovi předložit jedinou výslednou relaci, spíše prakticky užitečný návod na propočty s uvedením všech potřebných vztahů; snažte se je napsat přehledně a úsporně a odůvodněte užití případné vhodné aproximace.

Vymyslel Pavel Brom při vzpomínce na historiku o jedné nešťastně navržené lodi.

Pro tuto úlohu je v první řadě důležité si uvědomit, že loď musí plavat, tedy že průměrná hustota lodě musí být nižší než hustota oceánu. Je také třeba, aby loď byla ve stabilní poloze, tzn. že působiště vztlakové síly (tzv. *metacentrum plování*) musí být nad těžištěm lodě. Pak totiž mírné výchylky z rovnovážné polohy vyvolají rozdíl momentů tíhové a vztlakové síly, který bude mít snahu vzniklou výchylku vyrovnat zpět. Pokud tomu tak nebude, rozdíl momentů těchto sil bude mít snahu tuto výchylku zvětšovat (viz obrázky 2 a 3).



Obr. 1

Souřadný systém zvolíme tak, že nulová výška je nejnižší bod lodě. Budeme předpokládat, že loď bude plavat v poloze, v jaké je nakreslena na obrázku, a že pluje velmi pomalu, tedy se chová obdobně, jako by stála na místě. Také budeme předpokládat, že tloušťka desek je zanedbatelně malá oproti rozměrům lodě.

Nejdříve vypočteme průměrnou hustotu ρ_1 lodě, tedy vypočítáme hmotnost jednotlivých desek a podělíme objemem lodě.

$$\rho_1 = \frac{2t\rho_m(ad + ah + d\sqrt{a^2 + h^2})}{adh} = \frac{t\rho_m S(a, d, h)}{adh},$$

kde t je tloušťka desek a S je funkce, kterou jsme substituovali celkový povrch lodě. Někteří pilní řešitelé přidali k hmotnosti lodě i hmotnost nákladu. Získali jsme tedy první podmínku, která je nutná pro bezpečnou plavbu, tedy aby hustota oceánu byla vyšší než ρ_1 .

Nyní přichází na pořad stabilita. Polohu těžiště lodě najdeme jako vážený průměr těžišť jednotlivých komponent, přičemž je zřejmé, že těžiště horní paluby je ve výšce h , těžiště obou trojúhelníků je ve výšce $2h/3$ a těžiště bočních obdélníků ve výšce $h/2$, tedy těžiště lodě bude ve výšce

$$h_T = \frac{2t\rho_m(adh + \frac{2}{3}ah^2 + \frac{1}{2}dh\sqrt{a^2 + h^2})}{t\rho_m S(a, d, h)} = \frac{adh + \frac{2}{3}ah^2 + \frac{1}{2}dh\sqrt{a^2 + h^2}}{\frac{1}{2}S(a, d, h)} = \frac{2T(a, d, h)}{S(a, d, h)},$$

kde T je funkce, kterou jsme substituovali čítec předchozího zlomku, abychom zpřehlednili níže uvedené výpočty.

Loď se potopí do takové hloubky H , že hmotnost vytlačené vody je stejná jako hmotnost lodě, tedy

$$t\rho_m S(a, d, h) = \rho \frac{aH^2 d}{h} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{th\rho_m S(a, d, h)}{\rho ad}},$$

kde ρ je hustota oceánu. Z jednoduché geometrické úvahy – potopená část lodě je vlastně trojúhelníkový hranol – je zřejmé, že „těžiště vytlačené vody“ (čili působíště vztlakové síly) je ve výšce $H_T = 2H/3$.

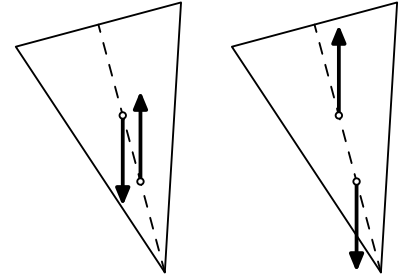
Vrátíme-li se k naší podmínce, že působíště vztlakové síly má být výš než těžiště lodě, hledáme takovou hustotu oceánu, pro kterou platí $H_T > h_T$.

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{th\rho_m S(a, d, h)}{\rho ad}} > \frac{2T(a, d, h)}{S(a, d, h)} \Rightarrow \rho < \rho' = \frac{th\rho_m S^3(a, d, h)}{9ad T^2(a, d, h)}$$

Při nižší hustotě oceánu než ρ' se loď potopí do větší hloubky (stoupne působíště vztlakové síly), přičemž těžiště lodě zůstane na stejném místě, tedy loď bude stabilní. Při vyšší hustotě oceánu se loď více vynoří (klesne působíště vztlakové síly), a tedy působíště vztlakové síly bude níž než těžiště lodě, a tudíž loď bude nestabilní.

Máme tedy dvě podmínky stability (v uvažované poloze), jednak hustota oceánu musí být vyšší než ρ_1 , jednak nižší než ρ' . Samozřejmě pokud bychom uvažovali jinou polohu lodě, podmínky by byly radikálně odlišné.

$$\frac{t\rho_m S(a, d, h)}{adh} < \rho < \frac{th\rho_m S^3(a, d, h)}{9ad T^2(a, d, h)}.$$



Obr. 2.
Labilní
poloha

Obr. 3.
Stabilní
poloha

Vyřešme ještě otázku, zda pro daný tvar a polohu lodi, existuje taková hustota oceánu, že loď na ní bude plovat stabilně. Tehdy musí platit $\rho_1 < \rho'$ čili

$$1 < \frac{h^2 S^2(a, d, h)}{9 T^2(a, d, h)} \Rightarrow 1 < \frac{2(ad + ah + d\sqrt{a^2 + h^2})}{3(ad + \frac{2}{3}ah + \frac{1}{2}d\sqrt{a^2 + h^2})}.$$

Po úpravě dostaneme

$$2a < \sqrt{a^2 + h^2},$$

neboli délka ramena trojúhelníku musí být delší než délka základny.

Jestliže budeme uvažovat případ, kdyby byla celá loď homogenní (nejen desky, ale i uvnitř), výrazně se nám zjednoduší podmínka, aby oceán loď unesl. Stačí, když hustota oceánu bude vyšší než hustota lodě, která je již známa.

Druhá podmínka, tedy vzájemná poloha těžiště lodě a ponořené části se také poněkud zjednoduší. Těžiště lodě je (opět jde o homogenní trojúhelníkový hranol) ve $2/3$ výšky celé lodě. Těžiště ponořené části je ve $2/3$ její výšky, tedy vždy níže, než je těžiště lodě – za předpokladu, že loď plove. Tudíž by homogenní loď nesetřvala v poloze jako na obrázku, ale překlopila by se palubou dolů, podobně jako to dělají ledovce.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... *Pet u okna* (3 body; průměr 2,81; řešilo 27 studentů)

U okna ve vytopeném pokojíku stojí uzavřená prázdná PET láhev. Za oknem mrzne, až praští. Ráno maminka otevřela okno, aby místnost důkladně vyvětrala, jenže při vaření oběda na to zcela zapoměla, a v pokojíku tak klesla teplota pod bod mrazu. Určete relativní změnu objemu δV láhve, která stojí na okně.

Výsledná změna objemu závisí na vlastnostech láhve, které nebyly uvedeny v zadání, především na její tuhosti. Jednoduše můžeme vypočítat dva extrémní případy, tedy pokud je láhev dokonale tuhá, případně dokonale pružná.

V prvním případě bude láhev odolávat jakémukoli tlaku okolního vzduchu, a výsledný objem je tedy určen pouze koeficientem objemové roztažnosti β materiálu, ze kterého je láhev vyrobená, podle vzorce

$$V_2 = V_1(1 + \beta\Delta T) \Rightarrow \delta V = \frac{\Delta V}{V_1} = \beta\Delta T,$$

kde $\Delta T = T_2 - T_1$ je rozdíl koncové a počáteční teploty.

V druhém případě jsou rozhodující vlastnosti plynu uzavřeného v láhvi. Jelikož vzduch můžeme považovat za ideální plyn, platí pro něj stavová rovnice plynu

$$pV = nRT.$$

Láhev bude v průběhu ochlazování zmenšovat svůj objem natolik, aby byl stále tlak uzavřeného plynu vyrovnán s atmosférickým tlakem. Jedná se tedy o izobarický děj, pro který platí Gay-Lussacův zákon. Ten lze lehce odvodit ze stavové rovnice, pokud položíme n , R a p rovno konstantě; získáme vztah

$$\frac{V}{T} = \text{konst},$$

který platí po celou dobu děje. Z toho již vyjádříme hledaný výsledný objem

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \delta V = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta T}{T_1}.$$

Ve skutečnosti má samozřejmě láhev určitou tuhost, bude tedy jistou dobu odolávat vnějšímu tlaku a pak skokem změni svůj objem (známé praskání při náhlé deformaci stěny láhve). Změna tvaru láhve je tedy obecně děj velmi složitý, prakticky nepopsatelný.

Petra Suková

pet@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... účinnost elektrárny (5 bodů; průměr 1,07; řešilo 14 studentů)

Vypočítejte účinnost stroje, který pracuje mezi dvěma tepelnými lázněmi o teplotách T_1 a T_2 , $T_1 > T_2$ a který dosahuje maximálního možného výkonu. Do výsledného vztahu potom dosadte data některé známé elektrárny.

Uvědomte si, že Carnotův stroj má nulový výkon, protože při izotermickém ději je rozdíl teplot mezi strojem a lázní nekonečně malý, což způsobí nekonečně malý tepelný tok a nekonečně malý výkon stroje. Úloha z knížky Herberta Callena – *Thermodynamics*.

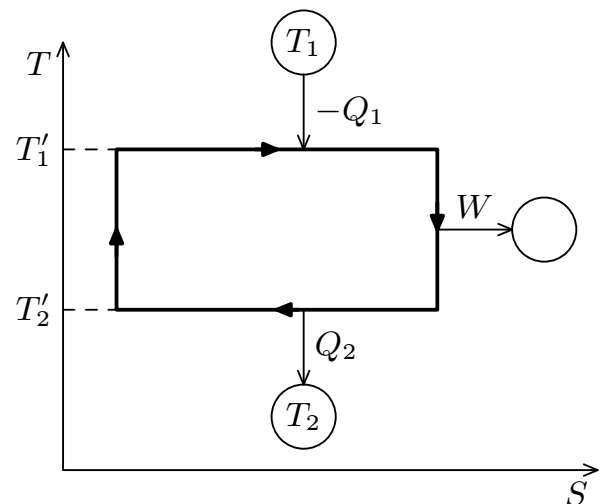
Jak jsme zmínili v zadání, maximální účinnost nemusí být nezbytně to, čeho chceme dosáhnout při konstrukci reálných tepelných strojů. Důležitý je výkon, který je ve sporu s maximální účinností – Carnotův stroj má nulový výkon.

Předpokládejme, že chceme odebírat teplo z teplejší tepelné lázně a nějakým způsobem získávat práci. Dobře víme, že maximální možné účinnosti dosahuje každý vratný děj (změna celkové entropie je nulová). Jestliže má někdy pracovní látka tepelného stroje dosáhnout teploty jedné z lázní, bude jí to trvat nekonečně dlouhou dobu, a stroj tak bude mít nulový výkon. Pokud však během odebírání tepla z lázně má pracovní látka teplotu nižší než teplota lázně, stává se děj nevratným (v takovém systému totiž roste celková entropie¹). Abychom tedy získali nenulový výkon, musí extrakce tepla z teplé lázně (stejně jako odevzdávání přebytečného tepla chladnější lázni) probíhat nevratně².

Pro další analýzu budeme předpokládat, že izotermie pracovního cyklu budou na teplotách T'_1 a T'_2 tak, že platí $T_1 > T'_1 > T'_2 > T_2$. Tudíž teplo přechází z teplejší lázně do pracovní látky skrze teplotní rozdíl $T_1 - T'_1$ a teplo odchází z pracovní látky do chladnější lázně skrze teplotní rozdíl $T'_2 - T_2$, jak je znázorněno na obrázku 4. Tepelný tok je úměrný teplotnímu rozdílu s konstantou úměrnosti κ , kde κ je tepelná vodivost krát plocha děleno tloušťka stěny mezi lázní a pracovní látkou.

Jestliže t_1 je čas potřebný k přenesení tepla³ Q_1 , pak platí

$$\frac{-Q_1}{t_1} = \kappa_1(T_1 - T'_1).$$



Obr. 4. TS-diagram pracovního cyklu.

¹) Podobně jako vzroste entropie systému při odstranění izolační přepážky mezi dvěma plyny různých teplot.

²) Takový stroj, ve kterém dochází k toku tepla nevratně, nazýváme *endoreversibilní*.

³) Q_1 je teplo přijaté teplou lázní, proto $Q_1 < 0$.

Podobný vztah platí pro teplo Q_2 . Celkový čas, který stroj stráví na obou izotermách, tedy je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{-Q_1}{T_1 - T_1'} + \frac{1}{\varkappa_2} \frac{Q_2}{T_2' - T_2}. \quad (1)$$

Předpokládáme, že čas strávený na obou adiabatách je zanedbatelný vůči t , adiabatické děje totiž musí proběhnout velice rychle, aby pracovní látka nestihla relaxovat, navíc tento čas můžeme libovolně zkrátit.

Jelikož pracovní cyklus je vlastně Carnotův cyklus pracující mezi teplotami T_1' a T_2' , platí

$$\frac{W}{-Q_1} = \eta = 1 - \frac{T_2'}{T_1'}, \quad \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{-Q_1 - W} = \frac{1}{-Q_1/W - 1} = \frac{\eta}{1 - \eta} = \frac{T_1'}{T_2'} - 1.$$

Toto využijeme do vztahu (1).

$$t = \left(\frac{1}{\varkappa_1} \frac{1}{T_1 - T_1'} \frac{T_1'}{T_1' - T_2'} + \frac{1}{\varkappa_2} \frac{1}{T_2' - T_2} \frac{T_2'}{T_1' - T_2'} \right) W.$$

Výkon našeho stroje je W/t a toto číslo chceme maximalizovat vzhledem k zatím neznámým teplotám T_1' a T_2' . Po provedení příslušných derivací dostaneme podmínky⁴

$$T_1' = c\sqrt{T_1}, \quad T_2' = c\sqrt{T_2}$$

a maximální ziskatelný výkon je

$$P = \varkappa_1 \varkappa_2 \left(\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2}} \right)^2.$$

Hledali jsme účinnost tohoto stroje vyjádřenou pomocí T_1 a T_2 a ta je

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Pozoruhodné je, že účinnost nezávisí na koeficientech \varkappa_1 a \varkappa_2 .

Velké elektrárny evidentně pracují tak, že mají téměř maximální výkon, jak ukazují data ze tří elektráren v následující tabulce.

Elektrárna	T_2 [°C]	T_1 [°C]	η	ε	pozorovaná
West Thurrock (UK), tepelná elektrárna	~ 25	565	0,64	0,40	0,36
CANDU (Kanada), PHW jaderný reaktor	~ 25	300	0,48	0,28	0,30
Larderello (Itálie), geotermální elektrárna	80	250	0,32	0,175	0,16

Účinnosti elektráren ve srovnání s účinností η Carnotova stroje a s účinností ε .

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

⁴⁾ Kde $c = (\sqrt{\varkappa_1 T_1} + \sqrt{\varkappa_2 T_2}) / (\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2})$.

Úloha V.4 ... přírodní reaktor (4 body; průměr 2,59; řešilo 22 studentů)

Ve vzorku přirozeného uranu je 0,72 % izotopu ^{235}U s poločasem rozpadu 704 miliónů let a zbytek izotopu ^{238}U , který má poločas rozpadu 4468 miliónů let.

V sedmdesátých letech minulého století byla při těžbě uranu v oblasti Okla v rovníkovém Gabonu objevena ruda s relativním zastoupením izotopu ^{235}U 0,44 %. Tento nesoulad lze vysvětlit tím, že se v ložisku kdysi samovolně zažehl přírodní jaderný reaktor.

Uřčete, po jakou dobu jaderná reakce probíhala, bylo-li štěpení ^{235}U vyvoláno pomalými neutrony. Ke srážce nějakého pomalého neutronu s daným jádrem dojde průměrně jednou za 352 tisíc let.

Úloha ze zápočtové písemky z jaderné fyziky.

V případě rozpadu částic můžeme předpokládat, že částice jsou nezávislé a každá z nich se v malém časovém intervalu dt rozpadne s pravděpodobností λ . Za tento úsek času se tedy rozpadne $dN = -\lambda N dt$ částic (záporné znaménko bereme kvůli tomu, že částic ubývá). Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad \ln N = -\lambda t + \text{konst},$$

Počet částic, které se zatím nerozpadly, je tedy vyjádřen funkcí

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

kde $N(0)$ je původní počet částic. Střední doba života jedné částice τ je rovna převrácené hodnotě koeficientu λ . Střední dobu totiž můžeme určit tak, že každý z časů t započteme s vahou počtu částic rozpadlých v úseku $(t, t + dt)$. Pro spojitou proměnnou přejde součet v následující integraci

$$-\frac{1}{N(0)} \int_0^\infty t dN(t) = \frac{1}{N(0)\tau} \int_0^\infty t N(0) e^{-t/\tau} dt = \tau \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} d\frac{t}{\tau} = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx = \tau.$$

Čas τ je tedy průměrnou dobou, po které dojde k rozpadu částice. S poločasem rozpadu $T_{1/2}$ (dobou, ve které se rozpadne přesně polovina částic) souvisí střední doba života vztahem $\tau \ln 2 = T_{1/2}$, který obdržíme z rovnice (2) dosazením $N(T_{1/2}) = 1/2 N(0)$.

Nechť reakce probíhala po dobu t_1 a pak se izotop po dobu t_2 dál rozpadal. Protože radioaktivní rozpad i snižování obsahu izotopu ^{235}U v důsledku reakce jsou nezávislé jevy, dostáváme pro počet jeho atomů ve vzorku z Okla

$$N_{235}(t_1) = N_{235}(0) e^{-t_1/\tau} e^{-t_1 \ln 2/T_{235}},$$

$$N_{235}(t_1 + t_2) = N_{235}(t_1) e^{-t_2 \ln 2/T_{235}} = N_{235}(0) e^{-t_1/\tau} e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}},$$

kde τ je střední doba srážky neutronů s jádrem a T_{235} poločas rozpadu izotopu ^{235}U . Počet atomů ^{238}U vypočteme obdobně už bez příspěvku reakce

$$N_{238}(t_1 + t_2) = N_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}.$$

Pro vzorky z oblastí, kde jaderná reakce neproběhla, dostáváme

$$N'_{235}(t_1 + t_2) = N'_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}},$$

$$N'_{238}(t_1 + t_2) = N'_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}.$$

Poměr zastoupení izotopů ^{235}U a ^{238}U před reakcí byl v obou vzorcích stejný, proto

$$\begin{aligned} \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2)} &= \frac{N_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}}{N_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}} e^{-t_1/\tau} = \\ &= \frac{N'_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}}{N'_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}} e^{-t_1/\tau} = \frac{N'_{235}(t_1 + t_2)}{N'_{238}(t_1 + t_2)} e^{-t_1/\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

Odsud získáme dobu reakce

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{N_{238}(t_1 + t_2)}{N_{235}(t_1 + t_2)} \cdot \frac{N'_{235}(t_1 + t_2)}{N'_{238}(t_1 + t_2)} \right].$$

Požadované poměry už snadno získáme z relativního zastoupení η izotopu ^{235}U

$$\eta = \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2) + N_{235}(t_1 + t_2)} \Rightarrow \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2)} = \frac{\eta}{1 - \eta},$$

obdobně pro čárkované veličiny. Pro dobu reakce tedy konečně máme

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{\eta'(1 - \eta)}{\eta(1 - \eta')} \right],$$

číselně vychází asi 170 tisíc let. Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na poločasech rozpadu jednotlivých izotopů, ani na době, ve které reakce proběhla.

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.P ... o ztracené studně (3 body; průměr 2,65; řešilo 26 studentů)

Babička a dědeček obývají už léta svoji starou chalupu, kde mají vlastní studnu se znamenitou vodou. Jednoho dne přestala pumpa jejich vodu čerpat, pravděpodobně se poškodil koš ve studni. Tato drobná závada se však ukázala jako velký problém, neb oni sami ani jejich předkové nevěděli, kde byla studna kdysi vykopána.

Od čerpadla, které je uvnitř chalupy, vede jedenapůlpalcová trubka asi metr pod zem, kde zahýbá a pokračuje vodorovně směrem ven z chalupy. Studna je zavezená, avšak není jasné, jestli je na zahradě, či dokonce přímo pod domem.

Poradte starouškům, jakým způsobem nalézt studnu. Navrhněte několik co nejsnáze proveditelných postupů. *V reálném životě na problém narazil Marek Scholz.*

Hned na začátku musíme říci, že následující text nebude řešením daného problému – nalezení studny. Půjde spíše jen o postup, který by mohl vést k určení umístění studny. Předně si uvědomme, jak hluboko může studna být. K získávání vody se používá povrchové čerpadlo umístěné pravděpodobně někde ve sklepě. Teoretická hloubka, ze které je čerpadlo schopné dostat vodu, je nejvýše 10 m, neboť hydrostatický tlak vodního sloupce o této výšce vyrovnává atmosférický tlak. Ve skutečnosti ale pumpa nevyčerpá vodu z hloubky větší než 8 m. Hladina studny nebude hlouběji než přibližně 6 m–7 m od čerpadla. Sací koš totiž musí být ponořen ve vodě navzdory kolísání výšky hladiny podzemní vody.

Pro další postup při hledání bude nutné si obstarat (třeba i nakreslit) plán půdorysu domu včetně okolí, do kterého budeme zakreslovat možné lokality studny. Polohu studny určíme nejsnadněji tak, že odkopeme zeminu kolem trubky vedoucí z čerpadla až ke kolenu, kde trubka

zahýbá. Koleno odmontujeme a použijeme ocelový drát (asi tak trojku) k určení směru, ale hlavně vzdálenosti umístění studny. Lze totiž předpokládat, že potrubí vedoucí ke studně po cestě nezatačí, zahýbá až kolmo dolů do studny. Možnou polohu si zakreslíme a zvažíme, zda tam studna vůbec může být. Pokud je například hned vedle žumpa, můžeme nález zavrhnout. Pak musíme začít kopat. Této činnosti se v žádném případě nevyhneme, pokud chceme opravit sací koš.

Neuspějeme-li, můžeme se obrátit s radou o pomoc na osoby, které umí vodu hledat, tzv. proutkaře. Jistě existuje mnoho osob, které neumí vodu hledat a vydávají se za proutkaře. Je tedy nutné hledat osvědčené, zkušené osoby. Tato možnost vyhledání studny by neměla být zamítnuta, přečtěte si následující zkušenost mého dědy.

Asi před padesáti lety bylo potřeba zavést vodu pro bytový dům o čtyřech bytech pro pracovníky vodáren v Raduni u Opavy. Místní studny neposkytovaly dostatečnou kapacitu, a bylo tedy nutné najít nový zdroj podzemní vody. Na dvoře patřícím k domu se proto začala provádět náhodná sondáž. Ta bohužel nic nenalezla. Proto se zaměstnanci vodáren rozhodli k zoufalému kroku. Zeptali se místních, zda by jim nedoporučili proutkaře (dle dědy nějaký pan Pechanec, ale nebyl si jménem jistý). Pana Pechance pak pozvali na dvůr, který ho jistým způsobem prošel a určil dvě místa, kde se nalézala voda. Vrty, resp. čerpací pokusy potvrdily přítomnost podzemní vody. Jeden ze zdrojů poskytoval více vody a ten se vybral jako zdroj pro studnu, která se později vykopala a sloužila dlouhou dobu.

Co se týče vašich řešení, byla hodnocena velice mírně vzhledem k povaze zadaného úkolu. Při použití cizí myšlenky citujte svůj zdroj.

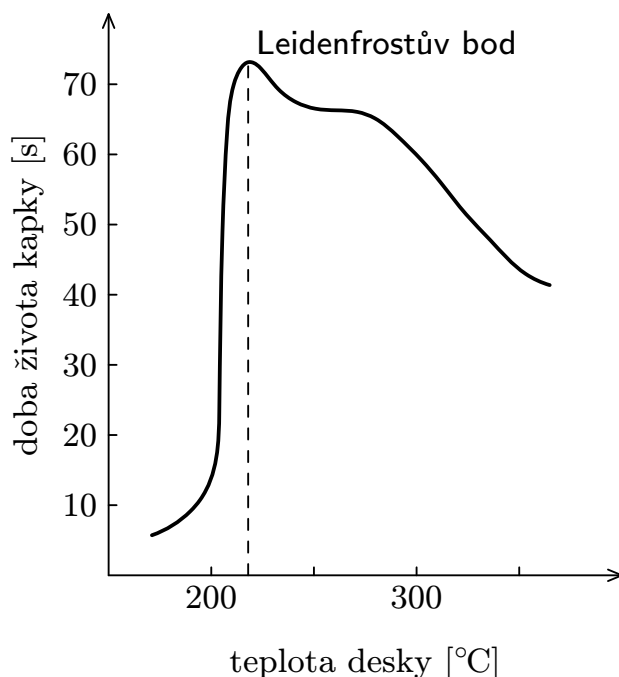
Karel Tůma

ka.jinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.E ... *babiččiny palačinky* (8 bodů; průměr 3,62; řešilo 29 studentů)

Rozehřejte pánvičku na plotýnce nebo nad plamenem tak, aby se na ní daly smažit palačinky (asi na 200°C). Pokud na její suchý rozžhavený povrch cáknete kapičku vody, hned se nevypaří, ale bude po něm až minutu rejdít. Proměřte dobu rejdění v závislosti na velikosti kapičky a tento jev se pokuste vysvětlit.

Úlohu navrhl Jano Lalinský.



Obr. 5. Doba života kapek na horké desce

Teorie

Vytáhneme z kredence pánvičku, pořádně ji rozežřejeme, kápneme na ni vodu a ona se nám okamžitě vypaří, přestože zadání nám tvrdí něco jiného. Kapka podle zadání prý vydrží rejdít na pánvičce až minutu. Takže kde je zakopán pes (přesněji kde jsou ty *babiččiny palačinky*)? Jakkoli nepřirozené to může někomu přijít, pánvička je jenom příliš studená, přesněji řečeno její teplota nedosáhla okolí tzv. *Leidenfrostova bodu* (citlivější povahy upozorní, že žádná velká překvapení se už nechystají, a tudíž mohou klidně číst dál). Abychom pochopili, o co se jedná, podívejme na graf na obrázku 5 (převzato z [1]).

Tuhle závislost naměřil Jearl Walker z Clevelandské Univerzity v Ohio, o čemž si můžete pře-

číst v poměrně známé knížce [1]. Z této závislosti je zřejmé, že při jisté teplotě (kolem 200 °C) dochází k prudkému růstu doby života kapek s teplotou pánve. Jako Leidenfrostův bod pak označujeme teplotu, při které žijí kapky nejdéle. A to je přesně ta teplota, při které bychom rádi proměřili závislost doby života kapky na jejím objemu (a pekli též babiččiny palačinky). Avšak dříve, než se pustíme do měření a vymyšlení různých teoretických modelů pro délku života kapek v závislosti na jejich objemu, měli bychom zjistit, proč se kapka chová takhle podivně. Protože nejlepším expertem na rejdící kapky na horké desce je vzpomínaný Jearl Walker, nechme ho promluvit: „Je-li teplota nad Leidenfrostovým bodem, spodní povrch kapky se okamžitě vypaří. Tlak této páry ovšem kapku nadnáší, takže se zbytek kapky desky ani nedotkne. Vrstva je stále doplňována vodní párou z dolního povrchu kapky, odkud se voda neustále odpařuje díky záření a vedení tepla vrstvou páry. Přestože je tloušťka vrstvy menší, než 0,1 mm u hranice a okolo 0,2 mm ve středu, dokáže výrazně zpomalit vypařování kapky.“ K tomuto vysvětlení jenom dodám, že vedení tepla vrstvou páry je o poznání menší, než je tomu při vedení tepla přes rozhraní kapka–pánvička – a to vysvětluje i skutečnost, proč se kapka vypaří tak rychle při nízkých teplotách (myslím tím teploty menší než je Leidenfrostův bod), kdy neexistuje tato vrstvička páry v dostatečné míře.

A nyní je na řadě slíbený teoretický model. Předpokládejme, že kapka má přibližně kulový tvar (kapka nezaujme přesně kulový tvar, koho by to víc zajímalo, toho můžeme opět odkázat na knihu [1]) a že mezi kapkou a povrchem pánve je vrstva páry. Kapka přijímá teplo od pánve prostřednictvím záření a vedením tepla skrz vrstvičku páry. O teplo přichází kapka díky vypařování, vyzařování a část tepla také odvádí okolní vzduch. Dominantním jevy, které mají vliv na teplotu kapky, jsou odpařování vody z kapky a vedení tepla vrstvičkou mezi pánví a kapkou⁵. Pokud bude kapka v každém okamžiku ve stavu tepelné rovnováhy, pro vypařování můžeme napsat rovnici

$$-l\rho \frac{dV}{dt} = \lambda \frac{P(T - T_0)}{d}.$$

Člen na levé straně rovnice je teplo spotřebované na odpaření objemu⁶ ($-dV$) kapky za čas dt , ρ je tedy hustota vody a l je měrné skupenské teplo vypařování. Člen na pravé straně vyjadřuje přenos tepla vedením skrz vrstvu páry, ten je úměrný obsahu průřezu kapky P , tepelné vodivosti směsy vzduchu a páry λ , rozdílu teplot mezi pánví a kapkou $T - T_0$ a nepřímo úměrný tloušťce d vrstvy páry. Zdůrazňujeme, že uvedená rovnice je jen hrubý popis toho, co se ve skutečnosti s kapkou děje. Experiment ukáže, jak bude tento teoretický model úspěšný.

Pro kulovou kapku platí $V = 4\pi R^3/3$ a $P = \pi R^2$, kde R je poloměr kapky. Rovnici pro odpařování kapky přepíšeme jenom v proměných V a t (tzn. že P vyjádříme pomocí V). Po úpravách dostaneme

$$-\frac{dV}{dt} = \left[\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3} \lambda \frac{(T - T_0)}{l\rho d} \right] V^{2/3}.$$

Výraz v hranaté závorce označíme K a diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných

$$-\int_V^0 \frac{dV}{V^{2/3}} = \int_0^t K dt,$$

⁵) Experimentální ověření tohoto faktu viz úloha IV.E loňského ročníku FYKOSu.

⁶) Objem kapky se zmenšuje, proto je dV menší než nula.

kde horní a dolní meze integrálů jsme zvolili tak, aby v čase 0 měla kapka objem V a v čase t objem 0. Počítáme už jenom dané integrály a pro dobu odpařování kapky obdržíme

$$t = \frac{3}{K} V^{1/3}.$$

Proměřením závislosti doby života kapky na jejím objemu $t(V)$ můžeme určit konstantu K a tedy koeficient tepelné vodivosti λ dělený tloušťkou d vrstvy páry.

$$\frac{\lambda}{d} = \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} \frac{3l_0}{T - T_0} \left(\frac{3}{K} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Hrubost našeho modelu se projeví ve skutečnosti, že konstanta K bude záviset na objemu kapky, protože se během odpařování mění její tvar, tloušťka polštáře mezi ní a pánví apod. Tato závislost bude obecně složitá. Zvláště při malých objemech kapky, kdy je děj nejvíce dynamický, se bude náš model nejvíce lišit od reality. Při integrování jsme předpokládali, že K na objemu nezávisí a pro dobu vypařování jsme dostali jednoduchý výsledek $t \sim V^{1/3}$. Takže se podívejme, co ukázal experiment.

Postup měření

Naším skvělým experimentálním zařízením byla elektrická plotna na koleji, místo pánve jsme ale použili nerezový hrnec (nedělejte to!⁷⁾, protože na pánvi se nedařilo rejdně pozorovat, pravděpodobně kvůli nízké teplotě pánve nebo možná také kvůli teflonovému povrchu. Injekční stříkačkou objemu 2 ml jsme kapali kapky vody na povrch a stopkami na mobilu měřili dobu, kterou kapka na rozpáleném povrchu vydržela.

Pro měření jsme použili dva druhy kapek. Velké kapky jsme odkapávali přímo ze stříkačky, malé kapky jsme připravovali tak, že jsme zmenšili otvor stříkačky tak, aby byly kapky menší. Další větší kapky jsme jednoduše vytvářeli rychlým nakapáním více kapek menších. Soustavná chyba měření objemu stříkačkou je asi 2 procenta, jak jsme zjistili měřením hmotnosti natáhnutého objemu vody. Vzhledem k době vypařování (asi 1 min) je měření času dostatečně přesné, bohužel méně přesné je měření objemu kapek. Objem kapky ze stříkačky je možné stanovit tak, že nakapáte množství kapek, spočítáte je a za objem kapky pak prohlásíte výsledný objem vydělený počtem kapek. Takto jsme to dělali – při velkých kapkách to celkem šlo (nepřesnost asi 6%), kdežto při malých to šlo o dost hůř a nepřesnost odhadujeme asi na 14%. To už je opravdu hodně nepřesné, ale stále lepší, než kdybychom určovali objem měřením poloměru (který má smysl jenom pro malé kapky kulového tvaru).

Výsledky měření

Naměřené hodnoty jsou shrnuty v dále uvedené tabulce.

Naměřené hodnoty jsme spolu s jejich chybami vynesli do grafu (viz obr. 6) a nechali proložit závislostí $t = AV^{1/3} + B$ s neznámými koeficienty A a B . Oproti teoretické závislosti jsme přidali konstantu B , aby závislost dobře odpovídala i pro malé objemy kapek. Tehdy je náš teoretický model nejvíce špatně. Dostali jsme

$$A = (320 \pm 40) \text{ s} \cdot \text{ml}^{-1/3}, \quad B = (-40 \pm 15) \text{ s}.$$

⁷⁾ Na tak vysoké teploty hrnec není navržen a evidentně to špatně snáší – ten náš na povrchu trochu zčernal tak, že se to nedá umýt (děkuji *Jakubovi Fišerovi* za zapůjčení hrnce a zároveň se mu ještě jednou omlouvám za jeho poškození).

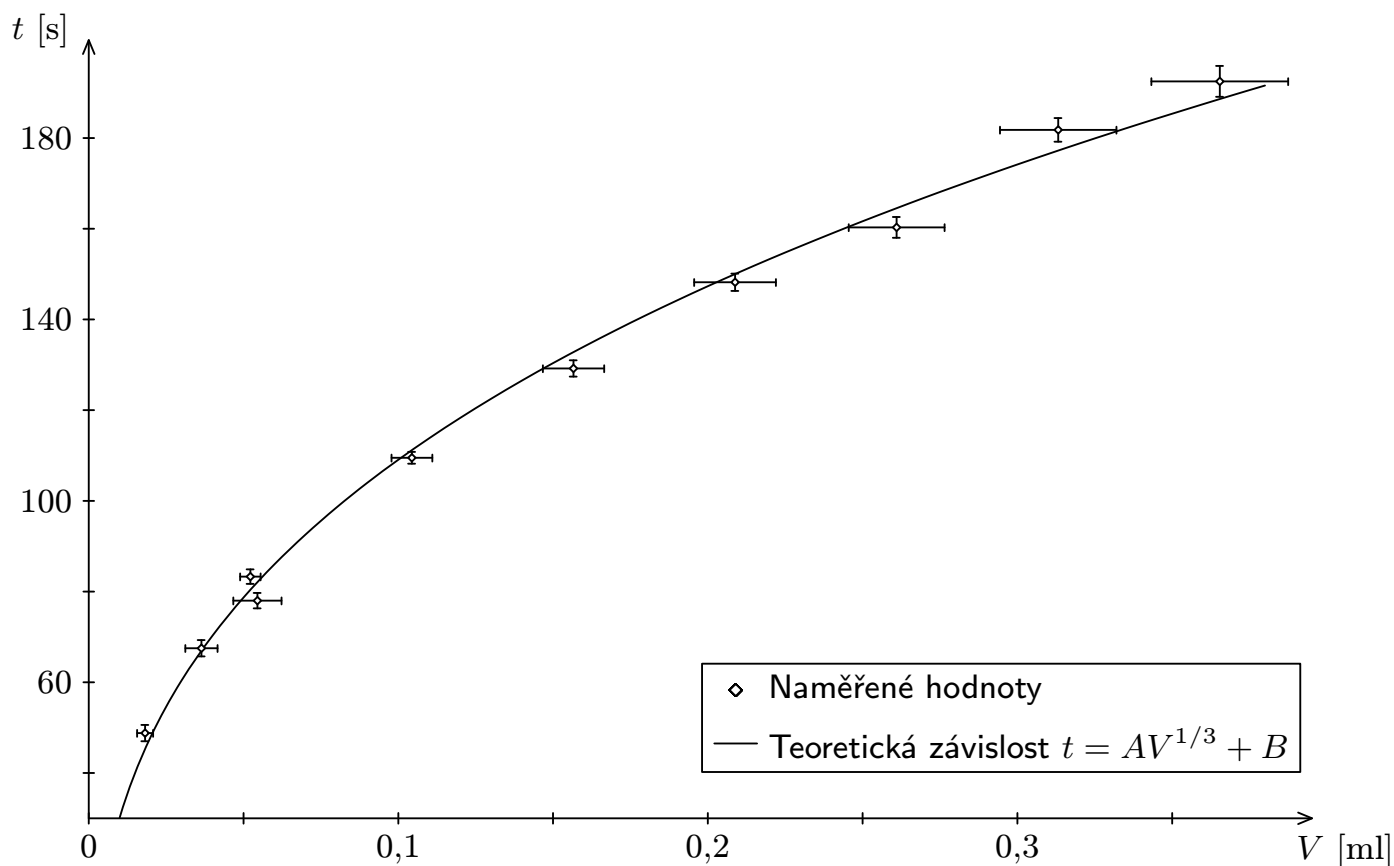
č. m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V [ml]	0,0182	0,0364	0,0522	0,0545	0,1044	0,1566	0,2088	0,2610	0,3132	0,3654
σ_V [ml]	0,0026	0,0052	0,0033	0,0078	0,0066	0,0099	0,0132	0,0155	0,0188	0,0221
	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]	t_6 [s]	t_7 [s]	t_8 [s]	t_9 [s]	t_{10} [s]
	52	65	88	77	109	134	153	168	174	194
	47	68	84	76	108	129	151	164	180	192
	43	70	84	82	109	129	142	155	182	183
	53	72	84	77	110	131	147	156	192	185
	49	62	80		113	129	147	162	183	197
	49	68	80		108	123	149	157	180	204
t_i [s]	48,8	67,5	83,3	78	109,5	129,2	148,2	160,3	181,8	192,5
σ_{t_i} [s]	1,8	1,8	1,6	1,7	1,3	1,8	1,9	2,3	2,6	3,4

Naměřené hodnoty závislosti doby vypařování na objemu kapky.

Teplota kapky T_0 je rovna teplotě varu vody, teplota pánve je asi 220°C , takže $T - T_0 = (120 \pm 30)$ K. Hustoty vody a její skupenské teplo vypařování při 100°C najdeme v tabulkách $\rho = 958 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $l = 2260 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Dosazením do (4) dostaneme

$$\lambda/d = (1400 \pm 500) \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Z této hodnoty můžeme alespoň odhadnout tloušťku vrstvy mezi pánví a kapkou. V tabulkách najdeme, že tepelné vodivosti plynů jsou řádově $10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, takže $d \approx 10 \mu\text{m}$.



Obr. 6. Závislost doby rejdění kapky na jejím objemu.

Diskuse výsledků

Největší vliv na celé měření měla nepřesnost stanovení objemu kapek, která se podle grafu na obrázku 6 značně projevila při malých kapkách (všimněte si skoku v naměřeném času mezi třetí a čtvrtou kapkou v grafu 6). Další vlivy na přesnost jsou: proměnlivá teplota povrchu, teplotní roztažnost plastové injekční stříkačky při kapání nad rozpáleným povrchem a z toho vyplývající vliv na objem kapek, nepřesné stanovení času (kapání více kapek do jedné větší musí být dost rychlé) atd. Dále je zřejmé, že konkrétní časy $t = t(V)$ závisí na konkrétních podmínkách, jako teplota, čistota a vlastnosti rozpáleného povrchu, složení vody, okolní vlhkost atd. Ale i přesto má měření význam jako informace o průběhu vypařování kapky.

Při pohledu na graf na obrázku 6 vidíme, že teoretická závislost (s korekcí pro malé objemy kapek) dobře vystihuje naměřenou závislost. Teoretický model tedy nebyl úplně zcestný. Dokonce se nám podařilo řádově odhadnout tloušťku vrstvy páry mezi kapkou a povrchem pánve. Hodnota $10\ \mu\text{m}$ je reálná, dá se očekávat takový výsledek. To je další skutečnost, která nevyvrací uvedenou teorii.

Přesnější experiment by vyžadoval hlavně vymyslet lepší metodu kapání kapek a zejména měření jejich objemu. Možná by také bylo dobré zajistit větší stálost teploty povrchu – při našem měření termostat neustále vypínal a zapínal ohřívání plotny, takže teplota nebyla pořád stejná.

Co bychom rádi viděli ve vašich řešeních

Nějaké teoretické předpovědi. Jak a čím jste měřili? Co jste naměřili? Jak přesně jste to změřili? Potvrdili jste, nebo vyvrátili teoretické předpovědi? Kde mohl být zdroj systematických chyb měření? Co by se případně dalo zlepšit na experimentu?

Co bychom viděli jen neradi ve vašich řešeních

Co jste jedli při sepisování toho celého (pochvala – nikoho to nenapadlo). Dalekosáhlé závěry ze třech měření. Grafy proložené lomenou čarou. Grafy bez popisků. Tabulky bez popisků. Dokonale přesná měření. Žádné zhodnocení naměřených hodnot.

A speciálně při této úloze jsme nebyli příliš nadšeni z řešení, v nichž jste jenom konstatovali, že jste při měření nepozorovali žádné rejdní kapek na pánvičce. Chtělo by to aspoň popřemýšlet proč. Totiž problémem je právě dosažení ideální teploty (za Leidenfrostovým bodem). Tu sice lze přímo měřit jen těžko, ale někdy je dobré jednoduše nám uvěřit a udělat vše pro to, aby kapky rejdlily. Minimálně to chtělo vyzkoušet jinou pánvičku nebo starý (nejlépe nepoužívaný) hrnec.

Bonus na závěr

Jak si všiml *Marek Kaleta*, pokud kápnete trochu větší kapku (asi 0,5 ml) do malé jamky na plotně (takže vám kapka neutěče), dopadem dalších malých kapek ji trochu rozvibrujete. Pokud chvíli počkáte a ještě máte trochu štěstí, uvidíte něco opravdu krásného – kapka začne kmitat vlastním modem ve tvaru podobném trojčípé, pěticípé nebo i vícečípé hvězdě či mnohoúhelníku, má-li kapka vhodnou velikost (viz obr. 7). Přitom kapka kmitá tak rychle, že okem neuvidíte okamžitý tvar kapky, ale překryv dvou po sobě následujících kmitů (dva trojúhelníky pootočené o 60°), takže místo trojúhelníku vidíte šestiúhelník! Zajímavé je, že když už tyto kmity začnou, jen tak rychle nezmizí. Jak je to možné, když nějaké, byť velmi malé tření mezi kapkou a plotnou



Obr. 7

(a v neposlední řadě také vnitřní tření v kapce) tam být přece musí, takže dochází ke ztrátám energie kmitů? Jediným vysvětlením, které se nabízí, je, že kapka si musí brát tepelnou energii od plotny a měnit ji na mechanickou energii svého pravidelného kmitavého pohybu podobně jako tepelný stroj. Pokus je velmi pěkný, určitě si ho vyzkoušejte!

Literatura

[1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika*. VUT Brno – naklad. VUTIUM, Brno 2000.

Peter Zalom

peter@fykos.mff.cuni.cz

Ján Lalinský

jano@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.S ... fermiony a bosony (5 bodů; průměr 3,86; řešilo 7 studentů)

a) Najděte hustotu stavů $g(E)$ pro volné elektrony a pomocí ní určete vztah mezi počtem elektronů a Fermiho energií při nulové teplotě. Zjistěte, jak musí záviset Fermiho energie na teplotě (při malých teplotách), aby byl počet elektronů konstantní. Nakonec odhadněte počet excitovaných elektronů při pokojové teplotě.

Nápověda. Nechte se inspirovat minulými díly seriálu a úlohami k nim.

b) Určete závislost chemického potenciálu μ na teplotě při malých teplotách a konstantním počtu částic v systému stejných bosonů. Najděte teplotní závislost počtu excitovaných bosonů při nízkých teplotách.

Zadal autor seriálu Matouš Ringel.

a) Veličinu $g(E)$ jsme již v podstatě vypočítali v rámci úloh k druhému dílu seriálu a v závěru čtvrtého dílu. Elektron má podobně jako foton dva dodatečné stupně volnosti spojené s orientací spinu $+1/2$ a $-1/2$. Po dosazení vyjde

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}. \quad (5)$$

V seriálu jsme odvodili, že v rovnováze je střední počet fermionů ve stavu i s energií E_i dán Fermiho-Diracovým rozdělením

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta(E_i - E_F)) + 1}, \quad (6)$$

kde E_F je Fermiho energie. Pro $E_i = E_F$ má rozdělovací funkce $\langle N_i \rangle$ hodnotu $1/2$ – stavy s energií E_F jsou zcela zaplněny. Pokud je teplota nulová, znamená to, že pod energií E_F jsou všechny stavy zcela zaplněné $\langle N_i(E_i < E_F) \rangle = 1$ a nad touto energií naopak zcela prázdné $\langle N_i(E_i > E_F) \rangle = 0$.

Tímto můžeme svázat počet elektronů N s E_F při nulové teplotě – počet elektronů je totiž totožný s počtem stavů s energií $E \leq E_F$. Z definice hustoty stavů $g(E)$ nyní přímo plyne, že

$$N = \int_0^{E_F} g(E) dE = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{E_F^{3/2}}{3/2}. \quad (7)$$

Tak zní souvislost mezi energií nejvyššího zaplněného stavu E_F a počtem všech částic N .

Dalším úkolem, jenž je poněkud početně náročnější, bylo zjistit, jak se bude pohybovat Fermiho energie při zvyšování teploty. Především si ale uvědomme, proč se vlastně bude pohybovat. Příčina bude jasná, jakmile si prohlédneme graf Fermiho-Diracova rozdělení v seriálu. Podle něho ze stavů, jež byly za nulové teploty zcela zaplněny, začnou mizet elektrony a objevovat se ve stavech s vyššími energiemi. Graf zobrazuje střední zaplnění *jednoho* stavu v závislosti na jeho energii. Počet stavů s energií v určitém intervalu (tj. vlastně veličina $g(E)$) ovšem roste s energií. Počet elektronů zmizivších z každého stavu musí být pronásoben počtem stavů; podobně počet elektronů objevivších se. Díky růstu $g(E)$ se tedy (při pevném E_F) nad E_F objeví více elektronů, než zmizí z oblasti pod E_F . Počet elektronů má nicméně zůstat konstantní. Přírůstek je kompenzován posunutím E_F , a tím i celého Fermiho-Diracova rozdělení k nižším energiím.

Nové E_F vypočítáme následovně. Zjistíme počet elektronů při nenulové teplotě a položíme jej roven počtu elektronů při nulové teplotě. Tím dostaneme rovnici pro E_F . K tomu můžeme použít odvozený vzorec pro N , jenom je jej potřeba mírně modifikovat, a to pronásobením hustoty $g(E)$ průměrným obsazením stavu $\langle N \rangle$; v případě výše je to jedna pod E_F a nula nad E_F . Dále musíme horní integrační mez prodloužit do nekonečna, neboť v principu může být obsazen libovolně vysoký stav. Máme tedy

$$N = \int_0^{\infty} \langle N \rangle g(E) dE = \int_0^{\infty} \frac{1}{\exp(\beta(E - E_F)) + 1} \cdot \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE.$$

Tento integrál musíme nějak odhadnout. Ukážeme si zde pěkný trik.

Především si všimněme, že Fermi-Diracovo rozdělení (6) je symetrické vůči E_F , a to následujícím způsobem

$$\langle N(E_F + \Delta E) \rangle = 1 - \langle N(E_F - \Delta E) \rangle.$$

Tento vzorec platí pro libovolné ΔE a dá se ověřit prostým dosazením do F-D rozdělení. Jeho význam se dá shrnout vulgarizujícím sloganem: „Co se nahoře objeví, to dole zmizí.“ Nyní by nás mohlo napadnout rozdělit integrál v energii E_F na dva integrály

$$N = \int_0^{E_F} \langle N(E) \rangle g(E) dE + \int_{E_F}^{\infty} \langle N(E) \rangle g(E) dE.$$

Jako y si označíme rozdíl $E - E_F$. V prvním integrálu využijeme symetrii

$$\begin{aligned} \int_0^{E_F} \langle N(E) \rangle g(E) dE &= \int_0^{E_F} \langle N(E_F + y) \rangle g(E) dE = \\ &= \int_0^{E_F} (1 - \langle N(E_F - y) \rangle) g(E) dE = \int_0^{E_F} g(E) dE - \int_0^{E_F} \langle N(E_F - y) \rangle g(E_F + y) dy. \end{aligned}$$

Rovnice pro N přejde do tvaru

$$\begin{aligned} N - \int_0^{E_F} g(E) dE + \int_0^{E_F} \langle N(E_F + y) \rangle g(E_F - y) dy &= \\ = \int_{E_F}^{\infty} \langle N(E) \rangle g(E) dE = \int_0^{\infty} \langle N(E_F + y) \rangle g(E_F + y) dy. \end{aligned}$$

Sem nyní dosadíme explicitní výraz pro $\langle N(E) \rangle$

$$N - \int_0^{E_F} g(E) dE + \int_0^{E_F} \frac{g(E_F - y)}{e^{\beta y} + 1} dy = \int_0^{\infty} \frac{g(E_F + y)}{e^{\beta y} + 1} dy.$$

Nakonec provedeme substituci $x = \beta y$ a za integrál z $g(E)$ dosadíme hodnotu (7) vypočítanou na začátku řešení

$$N - \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2} + \int_0^{\beta E_F} \frac{g(E_F - x/\beta)}{e^x + 1} d\left(\frac{x}{\beta}\right) = \int_0^{\infty} \frac{g(E_F + x/\beta)}{e^x + 1} d\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Je-li teplota malá, veličina β je velká. Integrovaná funkce má strukturu $g \cdot f$, kde g se mění pomalu, zatímco f exponenciálně (to jest rychle) klesá. Do integrálu přispějí jenom hodnoty s nevelkými x . Ovšem pokud x není velké, x/β je rozhodně malinké. V této oblasti můžeme odhadnout funkci $g(E_F + x/\beta)$ pomocí diferenciálu

$$g(E_F + x/\beta) \approx g(E_F) + \frac{x}{\beta} \left. \frac{dg(E)}{dE} \right|_{E=E_F}.$$

Navíc můžeme horní mez prvního integrálu prodloužit do nekonečna, neboť součin βE_F je velký. Po dosazení dostáváme rovnici

$$N - \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2} = 2g'(E_F) \int_0^{\infty} \frac{x/\beta}{e^x + 1} d\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Fermiho energii při nulové teplotě označíme E_F^0 . Pro malé teploty je E_F blízké E_F^0 , rozdíl bude záviset na teplotě. Členy tohoto rozdílu, které jsou úměrné vyšší než druhé mocnině teploty, budeme zanedbávat. Jako první bod řešení jsme vypočítali, jak souvisí energie E_F^0 s počtem částic N . Nalezený vzorec (7) sem můžeme dosadit. Dále můžeme přímo vypočítat derivaci g' z (5). Po dosazení a zkrácení nabyde rovnice tvaru

$$(E_F^0)^{3/2} - E_F^{3/2} = \frac{3}{2} \frac{E_F^{-1/2}}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx.$$

Integrál se dá spočítat, ovšem zde to dělat nebudeme. Počítač nám poradí, že se rovná $\pi^2/12$. Použijeme přibližný vzorec $(1+x)^r \approx 1+rx$ pro $E_F^{-1/2}$

$$E_F^{-1/2} = (E_F^0 + E_F - E_F^0)^{-1/2} \approx (E_F^0)^{-1/2} \left(1 - \frac{E_F - E_F^0}{2E_F} \right).$$

Druhý člen v závorce úměrný rozdílu $E_F - E_F^0$ můžeme zanedbat, protože tento výraz násobíme T^2 v čitateli zlomku před integrálem. Konečným výsledkem je

$$E_F = E_F^0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{12} \frac{k^2 T^2}{(E_F^0)^2} \right)^{2/3} \approx E_F^0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{k^2 T^2}{(E_F^0)^2} \right).$$

Fermiho energie klesá s teplotou. Všimněme si, že změna E_F je až druhého řádu v teplotě, tj. při nízkých teplotách zanedbatelná proti efektům prvního řádu. Toho dále využijeme.

Nakonec odhadneme počet excitovaných elektronů N_E , to jest elektronů s energií větší než E_F . Pro něj můžeme snadno napsat přesný vzorec

$$N_E = \int_{E_F}^{\infty} \langle N \rangle g(E) dE.$$

Typická energie excitace se pohybuje kolem hodnoty kT , což je malé číslo ve srovnání s E_F . Čili příspěvek k integrálu pochází pouze z oblasti energií kT kolem Fermiho energie. V tomto intervalu se $g(E)$ prakticky nestihne změnit, pročež ji můžeme vytknout před integrál. Dostaneme

$$\begin{aligned} N_E &\approx g(E_F) \int_{E_F}^{\infty} \langle N \rangle dE = g(E_F) \int_{E_F}^{\infty} \frac{dE}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} = \\ &= g(E_F) \int_0^{\infty} \frac{d(x/\beta)}{e^x + 1} = kT \cdot g(E_F) \ln 2. \end{aligned}$$

Počet excitovaných elektronů je přímo úměrný teplotě. Každý z nich si nese dodatečnou energii řádu kT , jejich energie je úměrná $(kT)^2$. Tepelná kapacita (derivace energie podle teploty) je proto úměrná T . Při nízkých teplotách tedy u kovů nepozorujeme tak rychlý pokles, jaký předpovídá Einsteinova či Debeyova teorie, neboť tyto neuvažují volné elektrony.

- b) U bosonů je situace podstatně jednodušší než u fermionů. V seriálu jsme se dozvěděli, že bosony mají při nízkých teplotách tendenci soustředit se v základním stavu. Při nulové teplotě je základní stav zcela obsazen a ostatní jsou zcela prázdné. Při popisu excitací se poté můžeme při nízkých teplotách omezit pouze základním a prvním excitovaným stavem. Dále budeme uvažovat základní stav s energií E_0 a první excitovaný s energií E_1 . Počet stavů s energií E_1 označíme g .

Při velice malé teplotě je obsazen prakticky jen základní stav. Toho využijeme k nalezení μ při malých teplotách. Pro počet částic N totiž podle Boseho-Einsteinova rozdělení platí

$$N = \frac{1}{\exp(\beta(E_0 - \mu)) - 1}.$$

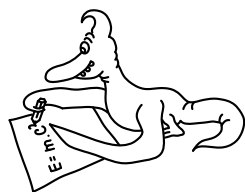
Odtud plyne $\mu = E_0 - kT \cdot \ln(1 + 1/N)$.

Počet excitovaných bosonů je za malé teploty dán v podstatě jen počtem bosonů v prvním excitovaném stavu (změnu μ můžeme přitom zanedbat). Přímo z Boseho-Einsteinova rozdělení plyne

$$N_E \approx \frac{g}{\exp(\beta(E_1 - \mu)) - 1} = \frac{g}{\exp(\beta(E_1 - E_0)) \cdot (1 + 1/N) - 1}.$$

Matouš Ringel

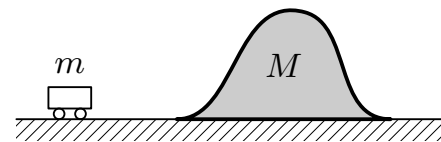
matous@fykos.mff.cuni.cz



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... zdolání kopečku (5 bodů; průměr 2,96; řešilo 27 studentů)

Vozíček o hmotnosti m jede po rovině rychlostí v , na níž leží dřevěný „kopeček“ o hmotnosti M a výšce h , jenž po rovině klouže bez tření (viz obr. 8). Vozíček na kopeček najede. Za jakých podmínek se mu podaří přejet přes vrchol? Jakou rychlostí se bude hora nakonec pohybovat?



Obr. 8

Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.

Jelikož není nijak specifikováno, jak vypadá kopeček, je zřejmé, že zkoumat tuto úlohu pomocí účinků sil by nikam nevedlo – tedy možná vedlo, ale bylo by to zbytečně komplikované. Proto raději budeme úlohu zkoumat z hlediska energií. Pro platnost zákona zachování mechanické energie nebudeme uvažovat žádné odporové síly. Také je třeba, aby se vozíček během své cesty nevznosl nad povrch kopečku, jelikož při dopadu by se část jeho energie předala podložce. Také budeme předpokládat, že kopeček má dostatečně hladký povrch, aby do něj vozíček „nenarazil“.

Vztažnou soustavu volíme pevně spojenou s podložkou, kladný směr rychlosti volíme tak, že vozíček má na počátku kladnou rychlost.

Pro stanovení velikosti kritické počáteční rychlosti v_k vozíčku (minimální počáteční rychlosti takové, aby vozíček kopeček přejel) budeme předpokládat, že kopeček má jediný vrcholek, a tedy po zdolání tohoto vrcholku je již jisté, že vozíček kopeček přejede. Jelikož kopeček volně klouže po podložce, bude mít vozíček při překonávání vrcholku v mezním případě stejnou rychlost jako kopeček, tuto společnou rychlost si označíme V_k . Díky předpokladům platí zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_k^2 &= \frac{1}{2}(m+M)V_k^2 + mgh, \\ mv_k &= (m+M)V_k.\end{aligned}$$

Vyloučením V_k dostaneme

$$v_k^2 = \frac{m+M}{M}gh, \quad (8)$$

čímž jsme získali kritickou velikost počáteční rychlosti vozíčku pro dostání se na vrcholek.

Nyní pojďme zkoumat, jakou rychlostí se bude kopeček pohybovat poté, co z něj vozíček sjede. Opět využijeme zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti, tedy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}MV^2, \\ mv &= mw + MV,\end{aligned}$$

kde w je rychlost vozíčku po opuštění kopečku a V je konečná rychlost kopečku. Po vyloučení w získáme rovnici

$$\frac{M}{m}V \left(\frac{m+M}{m}V - 2v \right) = 0,$$

která má dvě řešení pro V

$$V_1 = 0, \quad V_2 = \frac{2m}{m+M} v.$$

Jak ukážeme dál, první řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček překoná a dál pokračuje stejnou rychlostí jako na počátku, a druhé řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček nepřekoná.

Pokud tedy budeme uvažovat rychlost kopečku V_2 a vyjádříme si rychlost vozíčku w , získáme

$$w = \frac{m-M}{m} v,$$

ekvivalentními úpravami vztahů pro w a V_2 lze snadno dokázat, že $V_2 > w$, což vzhledem k povaze úlohy znamená, že kopeček je „před“ vozíčkem a stále se mu vzdaluje, neboli že vozíček kopeček nepřekoná.

Vozíček tedy musí jet alespoň rychlostí v_k dle vztahu (8), a pokud překoná kopeček, tak kopeček nakonec zůstane stát v klidu, ale bude posunut oproti své původní poloze.

Častá chyba v zaslaných řešeních byla, že si řešitelé neuvědomili, že kopeček se nebude pohybovat rychlostí V_k příliš dlouho, protože vozíček na něj bude ještě nějak působit při svém sjíždění dolů.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.2 ... kukačky na lanech (5 bodů; průměr 2,20; řešilo 15 studentů)

Kyvadlové hodiny o hmotnosti M jsou zavěšeny na dvou dlouhých rovnoběžných lanech (viz obr. 9). Kyvadlo se skládá ze závažíčka o hmotnosti m a lehké tyčky o délce l . Určete, o kolik se budou takové hodiny předbíhat (opozďovat) oproti hodinám pevně přibitým na stěně.

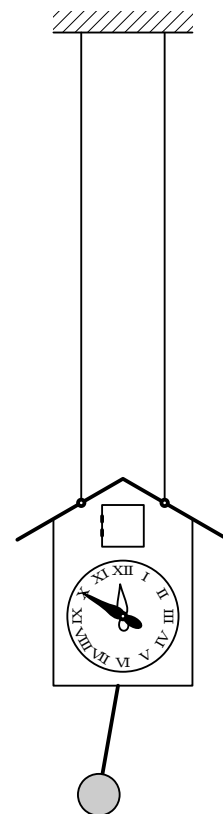
Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.

Vzhledem k tomu, že délka lana, na kterém jsou zavěšeny kukačky, je velká, lze považovat pohyb kukaček za vodorovný. Situace je tedy ekvivalentní tomu, že hodiny jsou vázány na vodorovnou přímku.

Uvažujme proto následující příklad. Mějme vozíček o hmotnosti M na vodorovných kolejnicích, na kterém je zavěšeno matematické kyvadlo o délce l a hmotnosti m (viz obr. 10). Na tuto soustavu působí pouze tíhová síla a reakce kolejí. Tyto síly mají svislý směr. Síly ve vodorovném směru jsou nulové, a proto těžiště této soustavy podle zákona setrvačnosti setrvává v klidu nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Ve svislém směru kmitá těžiště harmonickým pohybem se stejnou frekvencí jako kyvadlo.

Přejdeme do neinerciální soustavy spojené s těžištěm soustavy. Zde použijeme druhou impulzovou větu vzhledem k těžišti. Se setrvačnými silami se nemusíme trápit, protože mají působíště v těžišti a tedy nulový moment vzhledem k těžišti. Také předpokládejme, že výchylky kyvadla jsou dostatečně malé, aby $\cos \alpha \approx 1$ a $\sin \alpha \approx \alpha$.

Velikost tahové síly vlákna F určíme z rovnováhy sil působících na kyvadlo ve směru rovnoběžném s vláknem $F = mg \cos \alpha$, v tomto směru se totiž kyvadlo nepohybuje. Svislá souřadnice výslednice sil působících na vozík je nulová se vozík v tomto směru nepohybuje. Vodorovná souřadnice je ovšem nenulová a má hodnotu $-F \cos \alpha = -mg \cos \alpha \sin \alpha$ (tj. vodorovná složka míří



Obr. 9

na obrázku 10 doleva). Zbývá vzdálenost kyvadla od těžiště označit l_T a máme vše připraveno k napsání druhé impulzové věty.

$$[ml_T^2 + M(l - l_T)^2]\ddot{\alpha} = -mgl_T \sin \alpha - mg(l - l_T) \cos^2 \alpha \sin \alpha \approx \\ \approx -mgl\alpha$$

Jestliže za vzdálenost těžiště od kyvadla dosadíme $l_T = Ml/(m+M)$, po úpravách dostaneme

$$\ddot{\alpha} + \frac{(M+m)g}{Ml} \alpha = 0.$$

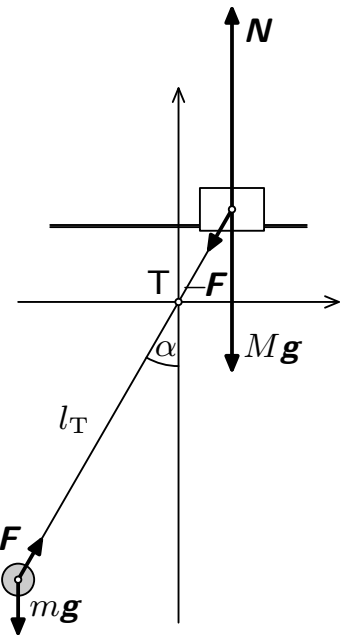
Rovnice kyvadla má tvar $\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$, takže úhlová frekvence soustavy kyvadla a vozíčku je

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}.$$

Podíl úhlových frekvencí zavěšených hodin a hodin pevně přibitých na stěně je roven

$$\frac{\omega}{\omega_P} = \sqrt{1 + \frac{m}{M}} > 1,$$

a tedy zavěšené kukačky se předbíhají oproti přibitým hodinám.



Obr. 10

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.3 ... roztáčíme elektromotor (5 bodů; průměr 2,38; řešilo 13 studentů)

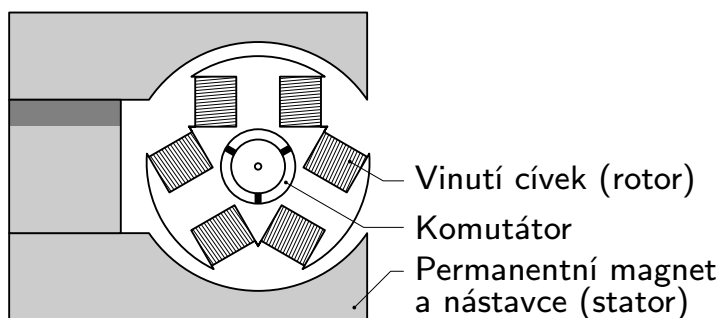
Na hřídeli elektromotoru je navinuta nit, na konci které je zavěšeno závaží o hmotnosti m . Pokud motor připojíme na ideální zdroj napětí U , závaží pojede vzhůru rychlostí v_1 . Jakou rychlostí bude závaží klesat, pokud zdroj odpojíme a vstup elektromotoru zkratujeme? Mechanické tření neuvažujte. Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.

Jaký elektromotor máme vlastně uvažovat? Běžné motory na střídavý proud fungují tak, že jejich rotor se snaží otáčet spolu s točivým magnetickým polem uvnitř válce motoru. Úhlová frekvence tohoto pole je stejná jako frekvence napětí, tedy střídavé motory mají většinou konstantní otáčky 3000 ot/min nebo nějaký jejich celočíselný násobek a do zadání tohoto příkladu se moc nehodí. Naproti tomu elektromotory na stejnosměrný proud mají proměnné otáčky (podle zatížení), a jsou tedy ideální pro naši úlohu.

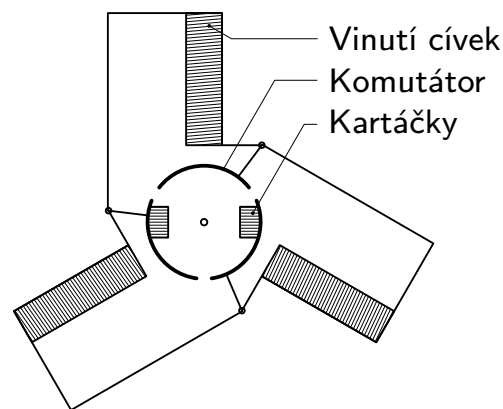
Ten nejobyčejnější stejnosměrný elektromotor (viz obr. 11), jaký možná znáte z rozebráných pohyblivých hraček na baterky a který budeme uvažovat, je složen ze statoru (dva opačné póly magnetu na obvodu), rotoru (osa s třemi navinutými cívkami, kterými teče proud) a komutátoru (ten přepne kontakty cívek ve správný čas tak, aby se rotor nezastavil v rovnovážné poloze, ale stále se otáčel).

Na čem závisí točivý moment (moment síly, kterým jej můžeme zatížit) takového elektromotoru? Víme, že Lorentzova síla působící na malý kousek proudovodiče v cívce na rotoru v magnetickém poli je úměrná velikosti proudu. Vektorový součet všech sil působících na cívky

(a tedy na celý rotor) je sice nulový, neboť rotor zůstává v pouzdře. Výsledný moment těchto sil je však nenulový, a protože je úměrný silám, je také úměrný proudu. Točivý moment D elektromotoru je tedy úměrný protékajícímu proudu a závisí jedině na něm $D = \text{konst} \cdot I$.



Obr. 11. Schéma elektromotoru



Obr. 12. Schéma zapojení vinutí cívek a komutátoru

Podívejme se teď na naši úlohu. Na hřídeli elektromotoru máme navinutou nit, na ní je zavěšeno těleso, na které působí tíhová síla $F_G = mg$. Teď připojíme stejnosměrné napětí U . Pokud je napětí dosti velké a moment magnetické síly otáčející rotorem bude větší než moment tíhové síly F_G , rotor se začne otáčet, nit se bude navíjet a závaží bude zrychlovat směrem nahoru. Jeho rychlost bude ale shora omezená – při otáčení rotoru bude vznikat v jeho cívkách indukované napětí, které podle Lenzova zákona snižuje proud v cívkách rotoru, a tedy i moment síly, který na něj působí. Toto napětí roste s rychlostí otáčení rotoru. Rychlost závaží se tedy po chvíli ustálí na nějaké konečné hodnotě v_1 , kdy je všechna energie dodávaná zdrojem do elektromotoru přeměňována na polohovou energii závaží a na teplo v elektromotoru. Magnetické pole je nasycené, jeho energie neroste. Pokud proud tekoucí obvodem označíme I a vnitřní odpor elektromotoru R , můžeme napsat

$$UI = RI^2 + mgv_1.$$

Jak je to v druhém případě, kdy zdroj odpojíme, ale obvod necháme uzavřený? Teď místo zdroje napětí pracuje tíhová síla, která táhne závaží dolů. Tělísko zrychluje, ale v cívkách opět vzniká napětí a proud v obvodu s odporem R ztrácí energii a přeměňuje ji na teplo, takže pohyb se opět ustálí na nějaké koncové rychlosti v_2 , při které je energie získávaná pádem přeměňována na teplo

$$mgv_2 = RI^2.$$

Proč je proud stejný jako v prvním případě? Všimněte si, že síla velikosti mg , kterou působí elektromotor na závaží, je v obou případech stejná a nezávisí na velikosti rychlosti nebo na směru pohybu. To znamená, že i moment síly, kterým působí elektromotor na závaží, je stejný, a protože ten je jednoznačnou funkcí proudu tekoucího cívkou, i proudy jsou v obou případech stejné. Vyloučením I z rovnic obdržíme

$$v_2 = \frac{U^2}{mgR} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgR}{U^2} v_1} \right) - v_1.$$

Dostali jsme velmi podivný výsledek, totiž dvě možné velikosti rychlosti v_2 . Skutečná rychlost, kterou se bude závaží pohybovat, je dána počátečními podmínkami (např. jakou rychlost na začátku udělíme závaží).

Ján Lalinský

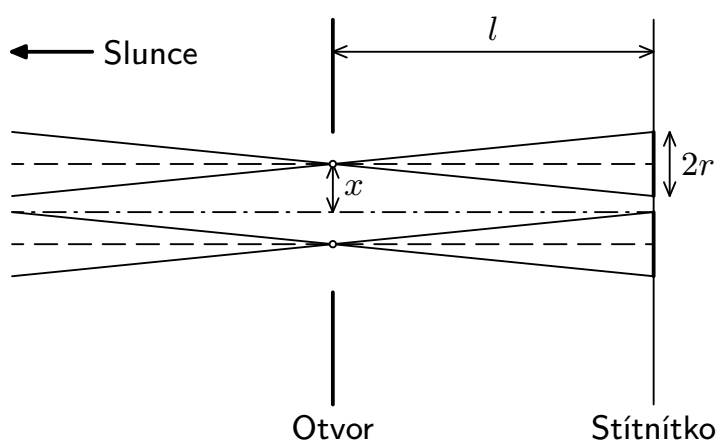
jano@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... sluneční prasátko (4 body; průměr 1,73; řešilo 15 studentů)

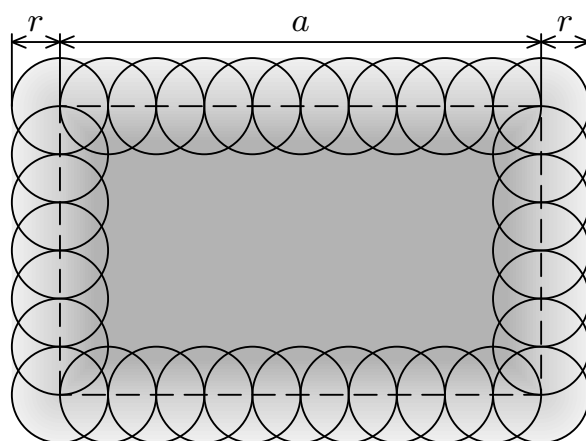
Za slunečných dní je oblíbenou zábavou vrhat obdélníkovým zrcátkem sluneční prasátka. Možná jste si všimli, že někdy má prasátko lichoběžníkový tvar a jindy tvar elipsy. Za jakých okolností nastává každá varianta? Pokud možno svou podmínku zformulujte kvantitativně.

Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.

Stejně sluneční prasátko, jaké umíme vyrobit zrcátkem, vznikne za stěnou, ve které je otvor stejné geometrie, jako má průmět plochy zrcátka do směru kolmého na sluneční paprsky. To je důsledek zákona lomu, podle kterého je úhel dopadu roven úhlu odrazu. Pro jednoduchost uvažujme, že průmět má tvar obdélníku, fyzikální podstatě jevu nijak neublížíme.



Obr. 13. Zobrazení Slunce obdélníkovým otvorem



Obr. 14. Konstrukce obrazu Slunce vytvořeného obdélníkovým otvorem

Výsledný obraz Slunce na stínítku vytvořený obdélníkovým otvorem můžeme složit z obrazů vytvořených jednotlivými body otvoru. Označme R poloměr Slunce, L vzdálenost Země od Slunce a l vzdálenost obrazu od otvoru. Každý bod vzdálený o x od osy otvoru zobrazí Slunce na stínítko jako kroužek o poloměru $r = R/L \cdot l$ (viz obr. 13) se středem ve vzdálenosti x od osy otvoru, neboť Slunce je velice daleko od Země ve srovnání se vzdáleností obrazu od otvoru $L \gg l$. Superpozicí takových kroužků vznikne ovál stejných rozměrů, jako má otvor zvětšených o hodnotu r . Můžeme ho geometricky zkonstruovat následovně. V každém krajním bodě otvoru zkonstruujeme kružnici o poloměru r , obálka takovýchto kružnic je potom onen ovál (viz obr. 14). Intenzita světla směrem k okrajům oválu bude klesat.

Zaoblení oválu má tedy poloměr křivosti r . Pokud je obraz blízko otvoru, je l malé a ovál bude vypadat téměř jako otvor, tj. bude mít tvar obdélníku. Při velké vzdálenosti obrazu od otvoru je l velice velké, tudíž i poloměr křivosti r . Obraz se nám bude jevit jako mírně zdeformovaná kružnice – elipsa.

Zformulujme podmínku k určení charakteristické vzdálenosti l_0 , kdy přechází obdélník v elipsu. Tehdy je poloměr křivosti r roven rozměru otvoru, označme ho a . Podmínka tedy zní

$$l_0 \approx \frac{La}{R}.$$

Stejnou podmínku bychom dostali, pokud by Slunce mělo mít stejnou úhlovou velikost jako otvor při sledování z místa obrazu

$$\frac{a}{l_0} \approx \frac{R}{L}.$$

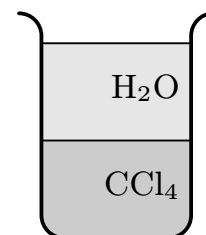
Většinu řešitelů se nepovedlo ani uvést správné pozorování, že prasátko má tvar obdélníku při blízké vzdálenosti stěny od zrcátka a tvar elipsy při daleké vzdálenosti stěny od zrcátka. Při správném pozorování nebylo pro řešitele vysvětlení příčiny problémem.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.P ... podivný bod varu (4 body; průměr 1,65; řešilo 20 studentů)

Do nádoby nalijeme dvě kapaliny, vodu a tetrachlormetan. Tyto dvě kapaliny se mezi sebou nemísí. Teplota varu vody je 100°C , teplota varu tetrachlormetanu je asi 77°C . Pokud bychom však tento systém zahřívali, dočkali bychom se překvapení. K varu (vzniku bublin) totiž dochází již při asi 66°C . Vysvětlete zdánlivou podivnost.



Obr. 15

Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.

Voda na povrchu každé kapaliny se vypařuje a molekuly unikají z kapaliny. Je jedno, kam se snaží kapalina vypařovat; jestliže jí to dovolíme, vypařovat se bude. Na rozhraní dvou kapalin se může snažit vypařovat do druhé kapaliny. Stejně tak druhá kapalina do první.

Podstatné na řešení problému je, že tyto dvě kapaliny (a také plyny z nich vzniklé) spolu nereagují a jsou oddělené. Pak můžeme použít zákon Daltonův, který říká, že tlak dvou nereagujících plynů je dán součtem parciálních tlaků těchto plynů. Potom tlak par na rozhraní H_2O a CCl_4 (např. v bublince, která svým povrchem zasahuje jak do vody tak do tetrachlormetanu) je dán součtem parciálních tlaků nasycených par při dané teplotě.

Celkový tlak na rozhraní bude roven atmosférickému tlaku zvětšenému o hydrostatický tlak vodního sloupce (10 cm vodního sloupce přispívá k tlaku 1 kPa). Hydrostatický tlak tedy zanedbejme.

Tlak nasycených par CCl_4 je při teplotě 77°C roven atmosférickému tlaku 101 kPa. Při této teplotě totiž začíná kapalina vřít. Tlak nasycených par vody při teplotě 66°C je dle tabulek kolem 30 kPa. Pak, protože směs začíná vřít při 66°C a součet tlaků na rozhraní musí dát atmosférický tlak, bude tlak nasycených par CCl_4 pouze 70 kPa. A to je tlak potřebný k tomu, aby začal CCl_4 vřít při teplotě 66°C .

A proč tedy nesmícháme tisíc různých kapalin dohromady? Pak bude tlak, při kterém budou kapaliny vřít, mnohem menší. Problém je, že je už nemůžeme mít od sebe oddělené, ale musíme je smíchat. Nevznikne tedy rozhraní dvou kapalin. Vypařování směsi dvou kapalin pak musíme počítat pomocí zákonů termodynamiky. Výsledná teplota bude někde mezi teplotami varu jedné a druhé kapaliny.

Pavol Habuda

bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. E ... poznej své tělo (6 bodů; průměr 5,20; řešilo 15 studentů)

Na závěr ročníku pro vás máme jednoduchou experimentální úlohu. Z následujících tělních tekutin si vyberte alespoň dvě a změřte alespoň jednu jejich fyzikální vlastnost (hustotu, viskozitu, elektrickou vodivost, index lomu, teplotu varu, ...) – sliny, krev, moč, pot, slzy, žaludeční šťávy, míza.

V této úloze se řiďte heslem čím více, tím lépe.

Tuto hovadskou úlohu vymysleli Jarda s Honzou po ICQ těsně před tiskem série.

Konečně zajímavá experimentálka! Bohužel mnoho z vás její přínos k světovému vědění neocenilo. Ale našli se i tací, kteří ve jménu vědy byli ochotni nasadit i vlastní tělo. A ti si zaslouží uznání.

Jelikož se nejednalo o klasickou experimentální úlohu, bude i autorské řešení poněkud netradiční, protože nám přišlo škoda si nechat zajímavé a mnohdy šokující výsledky pro sebe.

Hustota

Tuto veličinu bylo asi nejjednodušší změřit. Možností bylo více, ale většinou jste změřili hmotnost vzorku daného objemu a podle vztahu $\rho = m/V$ určili hustotu. Při měření slin nedošlo k výraznějšímu překvapení. Většinou vyšla hustota o trochu větší než hustota vody. Např. sliny *Jakuba Bendy* měly hustotu $1032 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Pavla Motlocha* $1021 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Lukáš Cimpl* dospěl k hodnotě $1015 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ stejně jako *Lukáš Vítovec*. Poslední jmenovaný kromě těchto „odstálých slin“ změřil i hustotu slin čerstvých, jež byla $650 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Z toho je vidět, že slintáme často i vzduch.

U moči byla situace obdobná. *Iva Kocourková* naměřila hodnotu $1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Daniel Šimsa* $1007 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. *Ondrej Bogár* a *Katka Baxová* měřili společně a došli k podobným výsledkům $1015 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, resp. $1018 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. K zajímavé hodnotě dospěl *Peter Vanya*. U normální moči došel k hodnotě $1009 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ podobně jako ostatní, ovšem povedlo se mu „načapovat“ i žlutou moč, jejíž hustota byla $1192 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. To by značilo velké množství rozpuštěných látek.

Naštěstí velká část experimentátorů neváhala si pustit žilou, takže i hustotu krve máme dobře zmapovanou. *Pavel Motloch* uvádí hodnotu $1052 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Lukáš Cimpl* $1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Specialistka na měření s krví *Iva Kocourková* dospěla k výsledku $1080 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Juraj Hartman a *Peter Vanya* změřili také hustotu spermatu. Zde vyšly naprosto rozdílné hodnoty, prvním 685 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a druhému 2142 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. O tom, proč se výsledky tak dramaticky lišily, můžeme pouze spekulovat.

Index lomu

Při měření indexu lomu jste většinou svítily na daný vzorek a měřili jste odchylku paprsku. Z toho již šla snadno vypočítat potřebná hodnota. Pro porovnání: index lomu vody je 1,3. Naměřené hodnoty pro sliny a moč se dosti liší. *Jakubu Bendovi* vyšla pro obě tekutiny hodnota 1,1, ale sám uvádí, že to bude asi málo. *Jan Jelínek* došel k výsledku 1,2 u slin a 1,4 u moči. Duo *Baxová–Bogár* došli ke stejným výsledkům 1,36. *Peter Vanya* měřil i moč s výsledkem 1,35 u normální a 1,45 u žluté, *Marku Nečadovi* vyšlo taktéž 1,35.

pH

Zde bylo měření jednoduché pomocí lakmusového papírku či nějakého modernějšího prostředku. Jinak to bohužel nešlo. Všichni se shodli, že největší pH má krev (*Lukáš Cimpl* 7,2, *Pavel Motloch* 7,4), následuje moč (*Lukáš Cimpl* 6,7, *Pavel Motloch* 7,2) a nejmenší pH mají sliny (*Lukáš Cimpl* 6,7, *Pavel Motloch* 6,7). Nicméně se to moc neliší od neutrálního pH 7. Krevní plazma měřil *Lukáš Vítovec* a vyšlo mu 7,4.

Povrchové napětí

Povrchové napětí jste měřili pomocí odkapávání kapek z kapiláry, poté bylo z hmotnosti kapky možné určit hledanou hodnotu. Pro vodu máme tabulkovou hodnotu $73 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. *Jakub Benda* naměřil pro sliny hodnotu $72 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ a pro moč $65 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Moč a sliny *Jakuba Michálka* mají o poznání menší povrchové napětí, konkrétně $46 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, resp. $42 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Naopak rekordman v této kategorii je *Juraj Hartman*, jehož moč má povrchové napětí $119 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Krev měřila *Iva Kocourková*, jež dospěla k hodnotě $70 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Další veličiny

Viskozitu měřil *Lukáš Cimpl* a vyšlo mu, že největší má krev následovaná slinami a močí. Stejnou veličinu měřil pečlivě u slin *Martin Formánek* a s prvně jmenovaným byl celkem ve shodě. *Peter Vanya* měřil teplotu varu potu a vyšla mu hodnota 93°C . Měrný odpor krve měřila *Iva Kocourková*, vyšlo jí $2 \Omega\cdot\text{m}$. Stejnou veličinu měřil *Jakub Benda* pro sliny a moč s výsledky $53 \Omega\cdot\text{m}$, resp. $44 \Omega\cdot\text{m}$. Pro srovnání voda má $2 \cdot 10^5 \Omega\cdot\text{m}$, takže tělní tekutiny jsou oproti ní velmi dobře vodivé. No, a poslední měřenou veličinou byla měrná tepelná kapacita, opět *Jakub Benda* s výsledky $4400 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ u slin a $4220 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ u moči, takže ne moc odlišnými od vody.

Závěrem

Získané hodnoty jsou mimořádně zajímavé a jejich přínos světové vědě bude jistě ještě po dlouhá léta nedoceněn. Chtěl bych tedy aspoň ocenit všechny experimentátory, kteří neváhali a i přes nedůvěřivé pohledy přihlízejících vařili moč či vážili sliny. Jejich dílo nebude zapomenuto.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. S ... kritická teplota (8 bodů; průměr 4,50; řešilo 6 studentů)

- Kvalitativně popište, jak se chová tepelná kapacita Isingova modelu s nulovým vnějším magnetickým polem v okolí kritické teploty.
- Podobným postupem, jako jsme vypočítali chování magnetizace m v okolí kritického bodu, určete chování susceptibility χ ($\lim_{B \rightarrow 0} \partial m / \partial B$) a závislost magnetizace na magnetickém poli při kritické teplotě.
- Ukažte, že model mřížového plynu vede ke kondenzaci, a určete kritickou teplotu.
- Prozkoumejte model binární slitiny.

Zadal autor seriálu Matouš Ringel.

- Ke správnému kvalitativnímu řešení si stačilo uvědomit, že energie při nulovém vnějším poli v přiblížení středního pole závisí pouze na magnetizaci m . Nad kritickou teplotou je magnetizace nulová a vnitřní energie se nemění. Zato pod kritickou teplotou ano, ale pouze pomalu, neboť i m se mění pomalu. Tepelná kapacita tedy rozhodně nemůže divergovat a pouze skočí z nulové na nenulovou hodnotu.

Pro jistotu provedeme i výpočet. K určení chování tepelné kapacity potřebujeme znát chování vnitřní energie. Energii určité konfigurace spinů známe ze seriálu

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - B \sum_i s_i;$$

magnetické pole B dále položíme rovno nule. Jak víme ze seriálu, model s těmito energiemi lze aproximovat modelem středního pole, kde interakci sousedních spinů nahradíme interakcí každého spinu zvlášť s jakýmsi umělým magnetickým polem. V této aproximaci pro energii platí vzorec (viz seriál) $E = -Jqm \sum_i s_i$, kde m je střední hodnota magnetizace jednoho spinu, $m = \langle s_i \rangle$. Vnitřní energii jsme dříve definovali jako střední hodnotu energie E , již můžeme snadno vypočítat

$$U = \langle E \rangle = -Jqm \langle \sum_i s_i \rangle = -Jqm \sum_i \langle s_i \rangle = -Jqm \cdot Nm = -NJq \cdot m^2.$$

Nad kritickou teplotou je ovšem střední magnetizace m nulová, proč i vnitřní energie musí být v této aproximaci nulová. V oblasti těsně pod kritickou teplotou jsme v seriálu odvodili závislost $m = \varepsilon^{1/2} \cdot \sqrt{3}$, kde $\varepsilon = (T_C - T)/T_C$. Vnitřní energie tedy závisí lineárně na teplotě, čili tepelná kapacita vychází konstantní a nenulová. Tepelná kapacita tedy v kritické teplotě vykazuje skok, nediverguje.

Nakonec jsme si nechali malé překvapení. Tepelná kapacita totiž ve skutečnosti diverguje, a to logaritmicky. To je v rozporu s teorií středního pole. Příčinu rozporu snadno identifikujeme. Při použití středního pole jsme zanedbali korelace mezi sousedními spiny, tj. veličinu $\langle s_i \cdot s_j \rangle$. Nahradili jsme ji interakcí se středním polem, které je ovšem nenulové, pouze pokud střední hodnota spinu vychází nenulová. Nicméně korelace je obecně zcela jistě nenulová i tehdy, když střední hodnota je nulová, přispívá tedy k energii.

- b) Jako první krok řešení zde zopakujeme rovnici pro m ze seriálu $m = \tanh \beta(Jqm + B)$. V seriálu jsme dále použili aproximaci $\tanh x \approx x - x^3/3$. Navíc si vzpomeneme, že pro kritickou teplotu jsme našli $\beta_C Jq = 1$.

Nyní již můžeme snadno určit závislost susceptibility χ na teplotě. Z aproximace $\tanh x$ si vezmeme jenom první člen. Dostaneme tak rovnici $m = \beta(Jqm + B)$. Tuto rovnici jednoduše zderivujeme podle B

$$\frac{\partial m}{\partial B} = \beta Jq \frac{\partial m}{\partial B} + \beta,$$

odkud

$$\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial m}{\partial B} = \frac{\partial m}{\partial B} = \frac{\beta}{1 - \beta Jq} = \frac{1}{Jq} \frac{1}{1/\beta Jq - 1} = \frac{1}{Jq} \frac{1}{\beta_C/\beta - 1} = -\frac{1}{Jq} \cdot \varepsilon^{-1}.$$

Takto jsme zjistili, že susceptibilita diverguje, a to nepřímou úměrně vzdálenosti od kritického bodu. Pro úplnost dodejme, že přesné řešení dává místo minus jedničky hodnotu $-7/4$.

Podobně určíme závislost magnetizace na magnetickém poli při kritické teplotě. Jak se však ukáže, nestačí vzít pouze první člen z rozvoje $\tanh x$, neboť bychom dostali rovnici, již nelze splnit pro nenulové B . Druhá nejjednodušší možnost je vzít první dva členy, což také provedeme. Napíšeme rovnici pro m v kritickém bodě, tj. s $\beta Jq = 1$. Rovnice zní

$$m \approx \beta(Jqm + B) - \frac{1}{3}(\beta Jqm + \beta B)^3 = m + \beta B - \frac{1}{3}(m + \beta B)^3.$$

Při zanedbání členu s třetí mocninou bychom dostali rovnici $B = 0$, nyní jsme ovšem předpokládali pravý opak. Člen s třetí mocninou situaci zachrání, dostáváme rovnici

$$3\beta B = (m + \beta B)^3,$$

jež nám umožní určit relativní velikost členů m a βB . Předpokládáme, že pole B je slabé, tj. $\beta B \ll 1$. Odtud $(\beta B)^3 \ll \beta B$. Aby šla rovnice splnit, musí na pravé straně dominovat m , vůči kterému pak v závorce můžeme zanedbat βB . Závislost m na B nám pak vyjde

$$m = (3\beta B)^{1/3} \sim B^{1/3}.$$

Exaktním výpočtem bychom přišli k exponentu $1/15$ místo $1/3$.

- c) Model mřížového plynu je definován energií $E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i \cdot n_j$. V textu seriálu jsme naznačili, že se tento model dá převést na model Isingův. V něm pracujeme s proměnnými $s_i = \pm 1$, zatímco zde máme $n_i = 0, 1$. Samozřejmým klíčem k řešení je přepsat si n_i pomocí s_i

$$n_i = \frac{1}{2}(1 + s_i).$$

Energii pak přepíšeme na

$$\begin{aligned} E &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i \cdot n_j = -\frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i + 1) \cdot (s_j + 1) = \\ &= -\frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - \frac{1}{2}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i - \frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} 1. \end{aligned}$$

Přitom poslední člen (suma jedniček přes všechny sousedy) je konstanta úměrná qN (N je počet buněk) a můžeme ji vypustit; změníme tím pouze polohu počátku energie, což vždy můžeme. V předposlední sumě $\sum_{\langle i,j \rangle} s_i$ sčítance závisí pouze na indexu i , můžeme proto přesčítat přes všechny sousedy uzlu i ; těch je právě q . Přitom však každý pár sousedů započítáme dvakrát, sumu proto musíme podělit dvěma. Celkem dostaneme

$$E = -\frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - \frac{1}{4}qJ \sum_i s_i.$$

To je energie Isingova modelu s vazbovou konstantou $\tilde{J} = J/4$ v magnetickém poli $\tilde{B} = qJ/4$.

Úkolem bylo ještě určit kritickou teplotu, nad kterou nastává kondenzace. Jak však pečliví řešitelé zjistili, šlo o chyták. Např. již v přiblížení středního pole z rovnice pro magnetizaci $m = \tanh \beta(\tilde{J}qm + \tilde{B})$ vidíme, že m je při nenulovém \tilde{B} nenulové při libovolné teplotě a mění se pozvolně – k fázovému přechodu tedy nedochází. Střední obsazení buňky můžeme z m zjistit transformací $\langle n \rangle = (1 + m)/2$. Ježto \tilde{B} je kladné, je kladné i m , tedy střední obsazení buňky je vždy větší než $1/2$.

Popsané řešení je ovšem fyzikálně špatné, neboť nerespektuje konstantní počet částic plynu umístěného v daném objemu. Abychom dostali fyzikálně správný výsledek, je třeba správným způsobem vzít v úvahu proměnný počet částic. Lze postupovat stejně jako v pátém dílu seriálu. Tam jsme našli, že partiční suma systému s proměnným počtem částic je dána v zásadě tím samým vzorcem jako při konstantním počtu částic, avšak s novými energetickými hladinami $E_i - \mu$, kde μ je chemický potenciál (důrazně doporučuji nalistovat si inkriminované místo v pátém dílu). Modifikace získaných vztahů však nebude velká. Do energie nám přibude veličina $-\mu P$, kde P je počet částic v dané konfiguraci. Ten je ovšem roven $\sum n_i$ a vede ke změně magnetického pole \tilde{B} . Model se pak chová stejně jako Isingův model s polem $\bar{B} = \tilde{B} + \mu/2$. Správný počet částic lze nastavit vhodnou volbou chemického potenciálu μ . Vidíme, že díky přípustnosti $\bar{B} = 0$ může při vhodných podmínkách nastat fázový přechod.

V reálné situaci částic v nádobě umístěné v gravitačním poli přibude další nový jev. Těžší (kondenzovaná) fáze se totiž bude soustřeďovat v spodní části nádoby a naopak. Uprostřed nádoby vznikne fázové rozhraní. Pokusíme se popsat rovnovážný stav.

Podmínkou rovnovážné koexistence dvou fází je rovnost jejich chemických potenciálů $\mu_1 = \mu_2$. To zde dokazovat nebudeme, něco si přeci musíte nechat na později, abyste se na vysoké škole vůbec dozvěděli něco nového. Rovnice pro střední magnetizaci v přiblížení středního pole zní

$$m = \operatorname{tgh} \beta(\tilde{J}qm + (\tilde{B} + \mu/2)).$$

Tato rovnice má obecně právě jedno řešení (nakreslete si přímkou a posunutý tgh). Právě v jednom případě, když $\mu = -2\tilde{B}$ a zároveň $\beta\tilde{J}q > 1$ (pod kritickou teplotou), však existují řešení dvě ($\pm m$). Předpokládejme, že na začátku je teplota nižší než kritická a v nádobě máme dvě prostorově oddělené fáze v rovnováze. Zmiňovaná dvě řešení odpovídají stejnému chemickému potenciálu, mohou proto popisovat dvě koexistující fáze. Střední počet částic v jedné buňce (je to veličina úměrná hustotě, takže si ji také tak označíme) je dán vztahem $\varrho = \langle n \rangle = (1+m)/2$. Zápornému m odpovídá málo koncentrovaná fáze – pára – kladnému m naopak kondenzovaná fáze – kapalina.

Pokud budeme teplotu zvětšovat, bude se měnit m , tedy i ϱ , a to až do hodnot $m = 0$, $\varrho = 1/2$. Přitom chemický potenciál zůstává konstantní; konstantní počet částic se udržuje vhodným posouváním fázového rozhraní (změnou poměru množství páry a kapaliny). Jakmile dojdeme do krajního bodu $m = 0$, $\varrho = 1/2$, nebude již žádný rozdíl mezi fázemi a při dalším zvětšování teploty již bude existovat pouze jedna fáze, přičemž konstantní počet částic se nadále udržuje vhodnou volbou μ . Tento krajní bod se nazývá kritickým bodem a znáte jej ze školy.

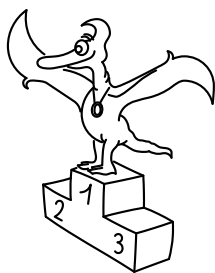
Obyčejná voda v kritickém bodě má skutečně zajímavé vlastnosti. Její tepelná kapacita diverguje. Divergence korelační délky mezi částicemi (zmiňovaná v seriálu) vede k jevu nazvanému kritická opalescence – voda se v blízkosti kritického bodu mléčně zakalí až do neprůhlednosti. To potvrzuje naše předchozí vývody.

- d) Energie modelu binární slitiny je dána následujícím předpisem. Jestliže spolu sousedí dva atomy A, přispívají k energii hodnotou E_{AA} , pokud dva atomy B, přispívají E_{BB} . Pokud sousedí atom A s atomem B, k energii přispěje energie E_{AB} . Zopakujeme ideu předchozího příkladu a pokusíme se tento model přepsat na model Isingův. Spin 1 nechť znamená atom B a spin -1 nechť znamená atom A. Přepis najdeme jednoduše tak, že sestrojíme kombinace dvojic spinu takové, že jsou nenulové, právě když nastává právě jedna z možností sousedění. Tak například kombinace $(s_i + 1)(s_j + 1)$ je nenulová, pouze když $s_i = s_j = 1$, tedy když spolu sousedí dva atomy B. Podobně $(s_i - 1)(s_j - 1)$ vypadne, pokud spolu nesousedí dva atomy A. Nakonec kombinace $(s_i - 1)(s_j + 1) + (s_i + 1)(s_j - 1)$ bude nulová, pokud budou sousedé stejného typu. Zde jsme museli vzít symetrickou kombinaci, protože jsou přípustné varianty AB i BA. Z těchto primitiv pak snadno sestrojíme výraz pro energii

$$E = \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\frac{1}{4} E_{AA} (s_i - 1)(s_j - 1) + \frac{1}{4} E_{BB} (s_i + 1)(s_j + 1) - \frac{1}{4} E_{AB} ((s_i - 1)(s_j + 1) + (s_i + 1)(s_j - 1)) \right].$$

Pouhým přeuspořádáním členů převedeme tuto energii na Isingův tvar, čímž jsme úlohu vyřešili, neboť chování Isinga známe.

Matouš Ringel



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	5	4	3	8	5	32	100	163
1. <i>Marek Pechal</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	4	4	5	5	3	7	7	35	99	162
2. <i>Tomáš Bednárik</i>	Masarykovo G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	85	111
3. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	3	3	0	1	2	5	–	14	64	85
4. <i>Lukáš Strítěský</i>	Masarykovo G Vsetín	–	4	0	3	–	–	–	7	78	68
5. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	63	64
6. <i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	–	–	–	–	–	4	–	4	73	61
7.–8. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	64	58
<i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	70	58
9. <i>Vojtěch Molda</i>	Masarykovo G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	65	56
10. <i>Roman Derco</i>	G dukl. hrdinů, Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	74	48
11. <i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	–	–	–	–	–	–	–	0	76	44
12. <i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	3	–	2	3	3	–	14	67	41
13. <i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	60	39
14. <i>Miroslav Hrubý</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	62	38
15. <i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	69	36
16. <i>Jan Bednář</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	3	3	–	6	67	32
17. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	71	29
18.–19. <i>Zuzana Pôbišová</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	0	65	24
<i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	59	24
20. <i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	75	21
21. <i>Ján Mikuláš</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	80	20
22. <i>Rushil Goel</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	76	16
23. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	0	60	12
24.–25. <i>František Přibyl</i>	G Milevsko	1	2	0	1	2	3	1	10	31	10
<i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
26. <i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
27.–28. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
<i>Jakub Klener</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
29.–30. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	33	4
<i>Ladislav Štěpánek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
31. <i>Darja Suchá</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie třetích ročníků

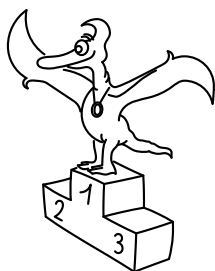
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	5	4	3	8	5	32	100	163
1. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	2	3	5	4	3	2	3	22	86	140
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	3	3	0	3	3	3	3	18	73	115
3. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	3	4	–	2	3	7	6	25	80	106
4. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	3	3	0	4	3	4	–	17	70	95
5. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	2	4	–	2	–	4	–	12	69	82
6.–7. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	64	81
<i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	1	3	–	3	2	2	–	11	56	81
8. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	71	67
9. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové Brno	–	–	–	3	4	6	–	13	71	62
10. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	84	57
11. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové Brno	2	–	–	–	–	2	–	4	60	52
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	63	51
13. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	2	–	3	–	7	60	48
14. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	62	44
15. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	34
16. <i>Jakub Prouza</i>	SPŠ Hronov	2	3	–	–	–	–	–	5	54	29
17. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	38	26
18. <i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	44	24
19. <i>Martin Štys</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	38	23
20. <i>Jakub Vodňanský</i>	G Broumov	3	2	–	–	2	3	–	10	52	22
21. <i>Lukáš Novotný</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	86	18
22.–23. <i>František Batysta</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	100	17
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	68	17
24. <i>Matěj Korvas</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	48	14
25.–26. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	0	31	10
<i>Jan Stránský</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	45	10
27. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	89	8
28. <i>Ján Hreha</i>	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	0	46	6
29.–31. <i>Hana Lesáková</i>	G Konstantinova Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
<i>Jakub Loucký</i>	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
<i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	4	–	–	–	4	100	4
32.–33. <i>Petr Dvořák</i>	G Makovského, N. Město n.M.	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	5	4	3	8	5	32	100	163
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	5	3	4	5	5	28	91	149
2. <i>Lukáš Vítovec</i>	PČG Karlovy Vary	3	3	0	–	2	4	–	12	62	88
3.–4. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	63	64
<i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	4	3	–	4	–	6	–	17	79	64
5. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	2	3	0	2	2	–	–	9	60	61
6. <i>Juraj Hartman</i>	G Náchod	2	3	0	2	3	–	–	10	71	57
7. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	5	–	5	72	56
8. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	3	3	0	–	2	3	–	11	56	55
9. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	73	41
10.–12. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	2	3	–	2	2	–	–	9	55	40
<i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	–	–	–	–	4	–	7	42	40
<i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	2	3	0	2	3	3	–	13	36	40
13. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	53	28
14. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	93	27
15.–16. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	51	19
<i>Jiří Sedlák</i>	G Boskovice	–	–	–	–	2	4	–	6	45	19
17. <i>Matěj Bitnar</i>	SPŠ Hronov	–	0	–	–	3	–	–	3	33	13
18. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	0	39	12
19. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
20. <i>Petra Navrátilová</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	5
21.–22. <i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
<i>Michaela Kubinová</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
23.–25. <i>Vlastimil Daníček</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
<i>Lucie Kadrmanová</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	33	3
<i>Vojtěch Špulák</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	23	3
26. <i>Martin Flíger</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 4	2 3	3 5	4 4	P 3	E 8	S 5	V 32	% 100	Σ 163
1. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	4	2	–	1	2	3	2	14	39	51
2. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	2	3	3	–	10	57	43
3.–4. <i>Alžběta Černeková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	2	0	–	3	–	–	7	49	33
<i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	3	–	–	3	2	–	8	40	33
5. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	3	–	–	–	–	–	–	3	52	28
6. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	3	–	–	–	1	–	4	38	19
7. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	56	15
8. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	75	12
9.–10. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
<i>Lukáš Vrablic</i>	SPŠ Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	23	10
11.–13. <i>Vojtěch Kaluža</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
<i>Jan Mertlík</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	13	4
<i>Richard Urban</i>		–	1	–	–	2	1	–	4	29	4
14.–17. <i>Ondřej Chvostek</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
<i>Petr Kaděra</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
<i>Jakub Moškoř</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
<i>Jiří Novák</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	10	3
18. <i>Ondřej Masný</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
19. <i>Martin Konečný</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	0	0



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	5	4	4	6	8	37	100	200
1. <i>Marek Pechal</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	99	162
2. <i>Tomáš Bednářík</i>	Masarykovo G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	85	111
3. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	64	85
4. <i>Lukáš Strítecký</i>	Masarykovo G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	78	68
5. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	63	64
6. <i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	–	–	–	–	–	–	–	0	73	61
7.–8. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	64	58
<i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	70	58
9. <i>Vojtěch Molda</i>	Masarykovo G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	65	56
10. <i>Roman Derco</i>	G dukl. hrdinův, Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	74	48
11. <i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	–	–	–	–	–	–	–	0	76	44
12. <i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	67	41
13. <i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	60	39
14. <i>Miroslav Hrubý</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	62	38
15. <i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	69	36
16. <i>Jan Bednář</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	67	32
17. <i>Petr Bezi Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	71	29
18.–19. <i>Zuzana Pôbišová</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	0	65	24
<i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	59	24
20. <i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	75	21
21. <i>Ján Mikuláš</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	80	20
22. <i>František Příbyl</i>	G Milevsko	3	–	–	2	2	–	–	7	38	17
23. <i>Rushil Goel</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	76	16
24. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	0	60	12
25. <i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
26. <i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
27.–28. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
<i>Jakub Klener</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
29.–30. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	33	4
<i>Ladislav Štěpánek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
31. <i>Darja Suchá</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie třetích ročníků

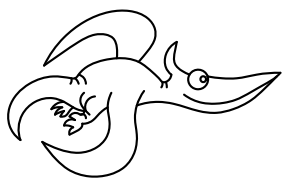
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	5	4	4	6	8	37	100	200
1. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	5	6	3	4	4	6	7	35	88	175
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	5	1	4	1	2	8	5	26	72	141
3. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	3	–	3	–	4	5	6	21	79	127
4. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	2	2	1	3	–	8	67	103
5. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	2	4	1	0	3	5	3	18	55	99
6. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	5	–	3	–	–	–	–	8	70	90
7. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	64	81
8. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové Brno	5	1	–	–	0	–	–	6	67	68
9. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	71	67
10.–11. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	3	4	–	9	60	57
<i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	84	57
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	1	–	3	–	–	–	–	4	60	55
13. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové Brno	1	–	–	–	–	–	–	1	58	53
14. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	62	44
15. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	3	1	–	0	2	3	–	9	38	35
16. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	34
17. <i>Jakub Prouza</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	54	29
18. <i>Martin Štys</i>	SPŠ Hronov	1	0	1	0	0	–	–	2	30	25
19. <i>Jana Przccková</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	44	24
20. <i>Jakub Vodňanský</i>	G Broumov	–	–	–	–	–	–	–	0	52	22
21. <i>Lukáš Novotný</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	86	18
22.–23. <i>František Batysta</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	100	17
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	68	17
24. <i>Matěj Korvas</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	48	14
25.–26. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	0	31	10
<i>Jan Stránský</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	45	10
27.–28. <i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	4	3	–	–	0	–	–	7	50	9
<i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	5	–	–	–	–	–	–	5	100	9
29. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	89	8
30. <i>Ján Hreha</i>	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	0	46	6
31.–32. <i>Hana Lesáková</i>	G Konstantinova Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
<i>Jakub Loucký</i>	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
33. <i>Petr Dvořák</i>	G Makovského, N. Město n.M.	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	5	4	4	6	8	37	100	200
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	5	6	2	5	2	6	4	30	90	179
2. <i>Lukáš Vítovec</i>	PČG Karlovy Vary	4	3	3	3	1	5	–	19	63	107
3.–4. <i>Juraj Hartman</i>	G Náchod	2	1	2	2	–	6	–	13	67	70
<i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	1	–	–	–	–	5	–	6	76	70
5. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	63	64
6. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	–	–	–	–	–	7	–	7	59	62
7. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	60	61
8. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	5	5	–	4	1	–	2	17	71	58
9. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	72	56
10. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	–	2	–	0	–	–	5	41	45
11. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	2	–	–	–	1	–	–	3	36	43
12. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	55	40
13. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	53	28
14. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	93	27
15. <i>Jiří Sedlák</i>	G Boskovice	2	0	–	–	–	–	–	2	40	21
16. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	51	19
17. <i>Matěj Bitnar</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	33	13
18. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	0	39	12
19. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
20. <i>Petra Navrátilová</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	5
21.–22. <i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
<i>Michaela Kubinová</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
23.–25. <i>Vlastimil Daníček</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
<i>Lucie Kadrmanová</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	33	3
<i>Vojtěch Špulák</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	23	3
26. <i>David Navrkal</i>	EkoG Labská Brno	2	–	–	–	–	–	–	2	40	2
27. <i>Martin Flíger</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 5	2 5	3 5	4 4	P 4	E 6	S 8	VI 37	% 100	Σ 200
1. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	3	0	–	0	4	5	–	12	41	63
2. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	1	–	–	–	2	4	–	7	56	50
3. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	2	0	6	–	10	43	43
4. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	3	2	2	1	–	–	–	8	49	36
5. <i>Alžběta Černeková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	49	33
6. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	1	–	–	1	37	20
7. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	56	15
8. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	75	12
9.–10. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
<i>Lukáš Vrablic</i>	SPŠ Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	23	10
11.–13. <i>Vojtěch Kaluža</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
<i>Jan Mertlík</i>	SPŠ Hronov	–	0	–	0	–	–	–	0	10	4
<i>Richard Urban</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	29	4
14.–17. <i>Ondřej Chvostek</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
<i>Petr Kaděra</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
<i>Jakub Moškoř</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
<i>Jiří Novák</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	10	3
18. <i>Ondřej Masný</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
19. <i>Martin Konečný</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	0	0



Zadání I. série



Termín odeslání: 16. října 2006

Hluboký vesmír, 2223

Federace dostala zprávu, že v sektoru 0056 dochází ke shlukování tajemné hmoty s podivuhodnými vlastnostmi. Hmota je temná, neboť vůbec neinteraguje s elektromagnetickým zářením, její částice interagují pouze gravitačně. Federace tudíž vyslala malou dvojčlennou vědeckou loď na průzkum. Během cesty se však porouchal počítač a loď narazila do asteroidu, což ji vychýlilo z kurzu.

Posádce se povedlo nouzově přistát na neznámé planetě třídy M. Během samovolného pádu se zahříval trup lodi vlivem kontaktu s atmosférou. Z rychlosti pádu určila posádka gravitační zrychlení na planetě $0,5g$.

Planetu pokrývali hlavně lesy s neuvěřitelně vysokými stromy. Trikorderový scan určil, že se velmi podobají listnatým stromům na Zemi a dosahují největší možné výšky. Ačkoli se chlubily listím, měly stejné šišky jako pozemské jehličnany, včetně struktury a funkce.

Při dalším průzkumu planety narazili na humanoidy, kteří obývali stromy a mohli by je transportovat do horních pater lesa, odkud by šel poslat nouzový signál. Tamější humanoidi používali k vysílání signálů barevné kamínky, které propouští světla různých barev, a když se světla jednotlivých kamínků zkombinují, dávají další barvy.

Po vyslání signálu z výšky stromu brzy dorazila vesmírná loď USS Odyssey a vyzvedla trosečníky. Ti pak do 16. října 2006 poslali závěry z mise velitelství hvězdné flotily na Zemi.

Úloha I. 1 ... tajemná hmota

Tajemná hmota je homogenní a izotropní oblak plynu na počátku v naprostém klidu. Tento oblak o celkové hmotnosti M má přesně tvar koule. Zjistěte, jak se (lokálně) v objemu oblaku bude měnit hustota při gravitačním kolapsu. Okomentujte rychlost hroucení v okamžiku, kdy bude všechna hmota těsně před shroucením do jednoho bodu.

Úloha I. 2 ... srážka s asteroidem

Určete, jaký úhel po srážce svírala trajektorie asteroidu a vědecké lodi. Před srážkou byl kulový asteroid v klidu a měl stejnou hmotnost jako loď. Uvažte, že loď chrání štíty, které mají kulový tvar.

Úloha I. 3 ... míchání barev kamínků

Vysvětlete, proč zkombinováním světél ze dvou barevných kamínků dostanou vědci jinou barvu, než když přímo smíchají dvě barvy, které kamínky mají.

Úloha I. 4 ... kapitánův deník

Přispějte něčím zajímavým do deníku vědecké výpravy (obrázkem či jiným uměleckým výtvořem, dobrodružnou příhodou v délce denního hlášení, fyzikálním pozorováním, ...).

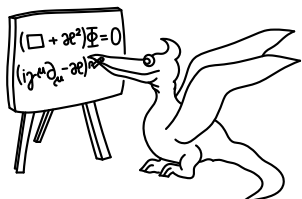
Úloha I. P ... výška stromů

Odhadněte výšku stromů na planetě. Uvažte všechna možná hlediska, která mohou výšku stromů ovlivnit.

Úloha I. E ... sbírání šišek

Počet spirál tvořených šupinami šišek vycházejících od špičky není libovolný, nýbrž nabývá hodnot 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... To jsou členy tzv. Fibonacciho posloupnosti, v níž další člen získáme sečtením předchozích dvou, přičemž první dva členy posloupnosti jsou 1 a 1. Jako každé pravidlo má však i toto své výjimky. Někdy se totiž stane, že počet spirál je roven 1, 3, 4, 7, 11, ..., tedy prvku Lucasovy posloupnosti. Získáme ji stejným postupem jako Fibonacciho, začínáme ale s 1 a 3.

Vaším úkolem je zjistit, jak často a za jakých podmínek se tato anomálie vyskytuje na Zemi.⁸ Prozkoumejte závislost na co nejvíce různých parametrech (např. roste-li strom v lese či volně).



Seriál o kvantové fyzice

Kapitola 1: Historický úvod

Co je to kvantová fyzika

To je otázka spíše filozofická než fyzikální. Nicméně se dá ve zkratce říci, že kvantová fyzika popisuje svět okolo nás, a to řečí teorie pravděpodobnosti. Klasická (nekvantová) fyzika umí předpovědět, jak dopadnou různé fyzikální jevy. Například pokud vyhodíme míč do vzduchu, předpoví, že spadne na zem, a je schopna vypočítat, kdy a kde se to stane. Prakticky všechny fyzikální jevy v našem životě je schopna klasická fyzika popsat. Nicméně pokud se obrátíme do nitra hmoty, zjistíme, že pravidla, která platí v našem světě, zde už platit přestávají. A to je přesně svět, kde dominuje kvantová fyzika. Stručně řečeno, nic zde nelze říci určitě. Lze pouze říci, s jakou pravděpodobností se to či ono stane.

Kvantová fyzika je tou správnou teorií, nicméně v běžném životě se většinou s jejími důsledky nesetkáváme. To je zapříčiněno tím, že kvantové jevy jsou dobře pozorovatelné v mikroskopickém světě a čím víc jdeme do větších rozměrů, tím méně se projevují. Proto kvantová teorie na velkých rozměrech efektivně přechází v teorii klasickou.

Stručně si povězte, jak to všechno začalo.

Fyzika na scestí

Fyzikální představy o světě se vyvíjely od nepaměti, za počátek klasické fyziky je nicméně považována kniha Isaaca Newtona *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* z roku 1686. Pro dalších 200 let se stala newtonovská fyzika základním kamenem, na níž byly stavěny nové teorie. Druhá polovina 19. století však znamenala drastickou změnu. Zlepšování experimentálních metod a nové často nečekané výsledky měření vedly teoretiky k vyvíjení činnosti. Nové představy týkající se elektromagnetismu a termodynamiky vyvolaly jistou atmosféru nejistoty, kdy do té doby základní principy fyziky (jako třeba 2. termodynamický zákon) byly často zpochybňovány. Tento proces trvající několik desítek let, byť vycházel z důkladné znalosti zákonů klasické fyziky, nakonec vedl ke zrodu teorie nové – obecnější.

⁸⁾ Podrobnější informace najdete na <http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~zdebl9am/phyllot.pdf>.

Planckova hypotéza

Za počátek kvantové teorie je považována Planckova hypotéza záření černého tělesa. V podstatě jde o to, jaká je intenzita elektromagnetického záření, které vyzařují objekty na určité frekvenci. Na konci 19. století odvodil německý fyzik Wilhelm Wien výraz⁹, který sice souhlasil s experimentem, ale neměl žádné teoretické opodstatnění. Max Planck v roce 1899 Wienův vztah na základě termodynamických zákonů dokázal a pokračoval ve svém snažení dále, neboť na základě měření byly přece jenom nalezeny jisté odchylky. V roce 1900 publikovali Strutt a Rayleigh práci, v níž na základě klasické teorie odvodili jiný vztah pro vyzařování, který neodpovídal experimentu na vysokých frekvencích¹⁰, na nízkých nicméně slavil úspěch. Planck však tuto krátkou práci ignoroval. Generoval si obecné vztahy, které vyhovovaly podmínkám termodynamiky a elektrodynamiky, až se mu jeden z nich zalíbil. Tento vztah nejlépe souhlasil s pozorováním, nicméně žádné teoretické odůvodnění neměl. Planck se totiž po dlouhých bezvýsledných výpočtech uchýlil k zoufalému ničím neopodstatněnému kroku. Přidal do teorie předpoklad, že energie celého vyzařovacího systému je kvantována, tj. nemůže nabývat libovolné hodnoty, ale pouze určitých dovolených. Pak už mu kýžená formulka skutečně vyšla. Sám Planck píše:

„Byl to akt zoufalství ... čistě formální předpoklad, jemuž jsem nevěnoval příliš úvah kromě toho, že jsem za každou cenu musel dostat kladný výsledek.“

Tím kladným výsledkem samozřejmě myslel svůj vzoreček. Planck si vážnost svého předpokladu zjevně neuvědomoval. Až Albert Einstein pochopil dalekosáhlé důsledky Planckovy hypotézy. Právě on ji jako první aplikoval na kvantování energie jedné částice, a to ve své práci o fotoelektrickém jevu z roku 1905. Einstein vysvětlil jev, který byl prvně pozorován již o 6 let dříve. Pokud necháme dopadat elektromagnetické záření na povrch kovu, začnou se z něj emitovat elektrony. Podstatné je, že se počet elektronů nezvětší, pokud zvýšíme frekvenci záření (tj. zvětšíme energii vyslanou zářičem). Einstein přišel na to, že elektron je z atomu vyražen, pokud přijme kvantum energie (dostatečně velké k vyproštění elektronu ze spár atomu). Kvantum energie má hodnotu $\hbar\omega$, kde ω je úhlová frekvence záření a \hbar redukovaná Planckova konstanta $\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s. Zvyšováním této energie se bude zvětšovat rychlost vylétávajících elektronů, nikoliv však jejich počet. Ten je totiž určen počtem dopadajících kvant (jeden elektron přijme jedno kvantum). Tato kvanta energie $\hbar\omega$ dostala později název *fotony*.

Bohr a atomy

Již koncem 19. století byla pozorována spektra jednotlivých atomů (tj. závislost intenzity záření, které tyto atomy vyzařují, na frekvenci). Spolu s pokusy o vysvětlení tohoto jevu přicházely i nové představy o tom, jak vlastně atom vypadá. V roce 1911 do toho vstoupil svým slavným pokusem Ernest Rutherford, který experimentálně dokázal existenci jádra atomů. Zdálo se tedy, že správná představa odpovídá solárnímu systému, tj. okolo kladně nabitého jádra obíhají záporně nabitě elektrony, a to přibližně po kružnicích. Nicméně tato představa nevyhovovala nejen experimentálním pozorováním, ale narážela i na tehdy známé fyzikální zákony. Šlo o to, že v tomto modelu může elektron vyzářit libovolné množství energie (tedy foton o libovolné frekvenci), snížit tím svou energii a přejít na jinou energetickou hladinu (tj. přiblížit

⁹⁾ Vztah mezi vlnovou délkou s maximální intenzitou vyzařování a teplotou $\lambda_{\max} = b/T$.

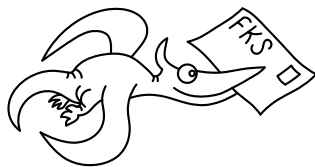
¹⁰⁾ Průšvih klasické teorie, na který tento vztah ukázal, byl ten, že celková energie vyzařování vycházela nekonečná – tzv. *ultrafialová katastrofa*.

se tak blíž jádru). To by však znamenalo, že bychom měli pozorovat záření všech atomů na všech frekvencích. To se ale nedělo, pozorovány byly u jednotlivých atomů jen konkrétní spektrální čáry. To znamenalo, že atomy vyzařují jen fotony několika konkrétních frekvencí. Druhá nepříjemnost souvisela se zrychleným pohybem nabitých částic v elektromagnetickém poli (to přesně elektrony v atomu byly). Takové elektrony by totiž měly vyzařovat energii a za krátký čas¹¹ ji vyzářit tolik, že by „spadly“ do jádra. Ani tento atomový kolaps nebyl samozřejmě pozorován. V roce 1912 publikoval Niels Bohr svou představu, že elektrony mohou v atomech obíhat jen po přesně určených drahách. Tyto stavy jsou stacionární, elektrony v nich samy od sebe fotony neemitují.

Úloha I. S ... Bohrova hypotéza

V této úloze se budeme zabývat atomem vodíku, který je tvořen velice hmotným jádrem s nábojem e a lehkým elektronem o hmotnosti m s nábojem $-e$, který kolem jádra obíhá pro kruhové trajektorii.

- Určete, jak na základě klasické fyziky závisí vzdálenost elektronu od jádra atomu na jeho celkové (kinetické a potenciální) energii E .
- Přijměme Bohrovu hypotézu, že moment hybnosti elektronu je kvantován, tzn. může nabývat jen hodnoty $L = n\hbar$, kde n je přirozené číslo. V jaké vzdálenosti potom může elektron kolem jádra atomu obíhat?
- Určete frekvenci fotonu, který elektron vyzáří, pokud přejde z n -té do m -té povolené vzdálenosti od jádra.



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

¹¹⁾ Jedná se řádově o pikosekundy.

Fyzikální korespondenční seminář MFF UK



FYKOS

jubilejní 20. ročník

Zajímavé fyzikální úlohy a problémy, snadné i obtížné

Dvě týdenní soustředění pro úspěšné řešitele

Exkurze do českých fyzikálních laboratoří



Cenné zkušenosti
do života

Atraktivní ceny

Neobyčejné zpestření
každodenní školní výuky

Napínavý sedmidílný
seriál o kvantové fyzice

FYKOS je seminář
s mezinárodní účastí

Přímý kontakt
s univerzitním prostředím

Zájezd na zajímavé místo v Česku

Oslavte 20. narozeniny FYKOSu řešením našich úloh!

<http://fykos.mff.cuni.cz>