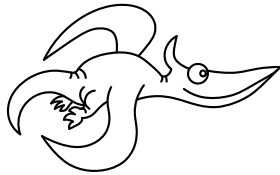


**Milí řešitelé!**

Posíláme vám zadání úloh předposlední série. Snad aspoň jedna úloha se vám zalíbí. Úspěšní řešitelé loňského ročníku od nás také jako odměnu dostávají ročenku 19. ročníku.

V úvodu letáku bychom také chtěli vyzvednout a pochválit skvělé výkony našich řešitelů v celostátním kole Fyzikální olympiády. Konkrétně se jedná o *Pavla Motlocha*, *Dalimila Mazáče*, *Jana Hermanna*, *Lukáše Ledvinu*, *Jakuba Bendu* a další. Doufáme, že vám řešení našeho semináře alespoň částečně pomohlo k tomuto úspěchu.

*Honza Prachař*

**Zadání V. série**

*Termín odeslání: 16. dubna 2007*

**Úloha V.1 ... smrt klavíristy**

Z okna výškové budovy vypadl klavír i s klavíristou, který po celou dobu pádu hrál zděšené A. O  $k$  pater pod tímto oknem odpočíval nebohý umývač oken. Jak velké je  $k$ , jestliže poslední, co umývač slyšel, bylo Ais, tedy tón o půltón vyšší? Rychlost zvuku v daném vzduchu je  $347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , výška jednoho patra je 3,1 m.

**Úloha V.2 ... kapitán Kork opět zasahuje**

Deník kapitána Korka: „Hvězdný čas 51824,2. Budoucnost hvězdné flotily je znovu ohrožena. Romulani se nás pokoušejí zničit. Zaútočila na nás jejich nová bitevní loď typu Karusel s laserovým otáčivým dělem. Doktor Spok rozhodl, že není možno se s nimi utkat a musíme zaujmout výhodnější postavení co nejdále od nepřítele. Náš palubní vědecký pracovník bohužel ale zrovna spí a my ho nechceme budit. Jsme zřejmě odsouzeni k záhubě...“

Poradte kapitánovi, jaký manévr má provést, aby unikl jisté zkáze. Hvězdná loď Enterprise má tvar koule o poloměru  $R$ , na začátku je ve vzdálenosti  $r_0$ . Dělo Karuselu se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega$  a střílí vždy do míst, kde jeho laserový senzor zjistí přítomnost Enterprise. Jakou nejmenší rychlostí se může Enterprise pohybovat, aby Karuselu ještě unikla?

**Úloha V.3 ... odporová řada**

Vžijte se do role ředitele firmy, která chce jako první na světě začít vyrábět rezistory pro všeobecné použití. Na základě průzkumu trhu bylo zjištěno, že poptávka po rezistorech je rovnoměrně rozdělena v rozmezí  $1 \Omega$ – $10 \text{ M}\Omega$ . Z technických důvodů však můžete vyrábět pouze konečné množství, řekněme 169, různých rezistorů.

Pokud zákazník požaduje rezistor s hodnotou  $R_p$  a vy mu nabídnete rezistor s hodnotou  $R_n$ , bude „míra jeho nespokojenosti“ dána vztahem  $(1 - R_p/R_n)^2$ . Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla střední nespokojenost všech zákazníků minimální. Pro jednoduchost řekněme, že první a poslední rezistor z vaší nabídky musí mít hodnoty  $1 \Omega$  a  $10 \text{ M}\Omega$ .

**Úloha V.4 ... exhumace dárečku od Buffala**

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit,“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v 9/10 výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte.

Do jaké výšky by se musel Buffalo trefit, aby petrolej stříkal nejdále?

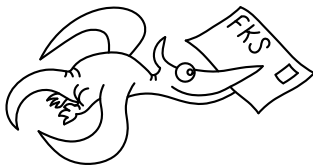
**Úloha V.P ... co je to za okna?**

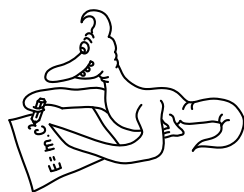
Nedávno si nechal jeden z organizátorů doma vyměnit okna. Místo starých dřevěných přišla nová plastová s dvojitými skly. Okna se dodávají v několika variantách podle toho, jestli je prostor mezi skly evakuován anebo naplněn některým ze vzácných plynů. Navrhněte způsob, jak zjistit, kterou variantu organizátorovi dodali, ovšem bez trvalých následků na oknech.

**Úloha V.E ... levotočivý svět**

Změřte optickou aktivitu roztoku glukózy v závislosti na jeho koncentraci. Optická aktivita je stáčení roviny lineárně polarizovaného světla při průchodu danou látkou. Úhel otočení je přímo úměrný délce dráhy, kterou paprsek v látce urazil, a závisí také na vlnové délce světla. Pokuste se zjistit/vymyslet/vzpomenout, čím je optická aktivita na molekulární úrovni způsobena.

Měření optické aktivity se používá k zjištění koncentrace cukru v roztocích. Je tato metoda spolehlivá? Má každý cukr stejnou optickou aktivitu?

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)



## Řešení III. série

### Úloha III.1 ... obložený létající talíř (4 body; průměr 3,37; řešilo 27 studentů)

Na zámořském parníku připravuje pro posádku jídlo kuchař Thomas. Na podávání talířů má šikovní zařízení. Pružinový držák udržuje vrchní talíř pořád ve stejné výšce. Vzdálenost mezi talíři je 1 cm. A protože je moře bouřlivé, sloupec 25 talířů pěkně kmitá. Jaká je frekvence těch kmitů?  
Úloha je nápad Jana Hradila.

Úvodem popišme, jak celé složité zařízení vypadá. Jde o pružinový oscilátor, na jehož horním konci jsou umístěny talíře. Jestliže je loď v klidu a nehoupá se, celý tento mechanismus má za úkol udržovat nejsvrchnější talíř stále ve stejné výši bez ohledu na celkový počet talířů. Je zřejmé, že pružina musí být dostatečně dlouhá, aby byla schopna i poslední (nejspodnější) talíř vyzvednout do patřičné výšky.

Z předchozího odstavce snadno usoudíme, že odebráním jednoho talíře se pružina roztáhne právě o jeho výšku  $y$ . Přitom síla, která pružinu stlačovala, se zmenší o tíhovou sílu působící na talíř, tedy  $mg$ . Dále označme tuhost pružiny písmenem  $k$ . Potom rovnice rovnováhy této dílčí tíhové síly a síly pružnosti má tvar  $mg = ky$ , odkud snadno vyjádříme tuhost pružiny  $k = mg/y$ .

Úhlová frekvence vlastních kmitů pružinového oscilátoru je dána vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{Nm}},$$

kde  $N$  je počet talířů a součin  $Nm$  jejich celková hmotnost. Po dosazení a drobné úpravě již snadno zjistíme, že

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Ny}},$$

odkud je patrné, že výsledek není na hmotnosti talířů vůbec závislý. Frekvence kmitů následně vychází

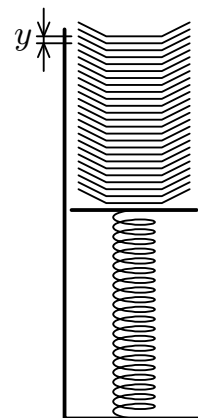
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{Ny}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{25 \cdot 0,01}} \text{ Hz} \approx 1,0 \text{ Hz}.$$

Pokud si navíc povšimneme, že  $\sqrt{g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} \approx \pi$ , můžeme celý výsledek pro zadané hodnoty určit z hlavy.

Jestliže nyní vypluje loď i s kuchařem Thomasem na širé moře, bude sloupec pětadvaceti talířů kmitat s vlastní frekvencí 1 Hz. V úloze totiž nešlo o to, aby zmíněné zařízení vyrovnávalo houpání lodi, které jsme proto mohli z našich úvah vypustit.

**Tomáš Jirotko**

byrot@fykos.mff.cuni.cz



Obr. 1.  
Zařízení na podávání talířů.

**Úloha III.2 ... přistání na Titanu** (5 bodů; průměr 3,10; řešilo 20 studentů)

V pátek 14. ledna 2005 na povrchu Titanu hladce přistála sonda Huygens, pojmenovaná po objeviteli Titanu. Mateřská sonda Cassini ji nesla k Saturnu 7 let. Jedná se dosud o nejvzdálenější přistání umělé sondy v dějinách.

Přistávací modul o čisté hmotnosti (bez paliva)  $m$ , vybavený reaktivním motorem, se vznášel v klidu nad povrchem měsíce (gravitační zrychlení je zde  $g$ ). Měl k dispozici palivo o hmotnosti  $M_0 - m$  a zásobu energie o velikosti  $E_0$ , kterou využíval k urychlování paliva (rychlost a množství paliva vypuzovaného z motoru lze libovolně měnit). Jaká je maximální doba, po kterou se sonda mohla vznášet v konstantní výšce? Poradte řídicímu středisku, jakým způsobem by mělo naprogramovat rychlost a množství vypuzovaného paliva, aby této maximální doby dosáhli.

Úlohu vymyslel Marek Pechal.

Označme okamžitou hmotnost paliva vypuzovaného z modulu za jednotku času jako  $\mu$ , velikost jeho okamžité rychlosti pak  $v$ . Je-li v čase  $t$  hmotnost modulu i s palivem rovna  $M$  a modul se nehybně vznáší, je jeho hybnost nulová. V čase  $t + dt$  bude hybnost soustavy modul-palivo rovna  $\mu v dt$ , protože během doby  $dt$  bylo vypuzeno palivo o hmotnosti  $\mu dt$  rychlostí  $v$  a modul je (podle předpokladů) stále nehybný. Změna hybnosti soustavy je tedy rovna  $\mu v dt$ , to se však má podle Newtonova druhého pohybového zákona rovnat impulsu působící síly, tj.  $Mg dt$ . Srovnáním pak dostaneme

$$\mu v = Mg.$$

Protože nás zajímá, jak se spotřebovává palivo a energie, bylo by vhodnější mít místo okamžité rychlosti paliva ve vzorci okamžitý výkon, tedy energii spotřebovávanou na jeho urychlování za jednotku času. Tu označme obvyklým způsobem jako  $P$ . Snadno nahlédneme, že platí  $P = \frac{1}{2}\mu v^2$ . Vyjádříme-li odtud  $v$ , pak dosazením do předchozí rovnice dostáváme

$$\sqrt{2P\mu} = Mg.$$

Pro dosažení maximální možné doby vznášení je nejvýhodnější, když modul spotřebuje veškerou zásobu paliva i energie. Pokud by totiž na konci procesu zbylo nějaké palivo a nezbyla žádná energie, mohli bychom vybrat nějaký časový interval v průběhu vznášení, v němž bychom poněkud zvýšili množství paliva vypouštěného za sekundu (avšak tak, aby stále ještě nějaké na konci zbylo). Potom bychom ovšem pro zachování konstantního tahu motoru museli během tohoto okamžiku o trochu snížit výkon  $P$ , a tak bychom uspořili energii, která by spolu se zbytkem paliva umožnila prodloužit dobu vznášení.

Jednou z možností, jak popsat průběh procesu, by tedy mohlo být udání závislosti množství zbylé energie na hmotnosti modulu (nebo naopak, to však v dalším postupu příliš nehraje roli), tedy určité funkce  $E(M)$ , pro kterou platí  $E(M_0) = E_0$  a  $E(m) = 0$  a která musí být zřejmě rostoucí. Dá se ze znalosti průběhu této funkce určit celková doba vznášení  $T$ ? Vskutku ano, a to následujícím způsobem. Provedeme-li derivaci  $E(M)$  podle času (časové derivace budeme značit tečkami), dostaneme pomocí pravidla o derivaci složené funkce  $E'(M)\dot{M}$ . Derivace zbylé energie podle času je však zřejmě rovna záporně vzatému  $P$ , stejně tak jako časová derivace hmotnosti modulu podle času je až na záporné znaménko rovna  $\mu$ . Dostaneme tak rovnost  $P = -E'(M)\mu$ . Dosazením do výše odvozené podmínky vznášení s ohledem na rovnost  $\mu = -\dot{M}$  pak získáme

$$-\sqrt{2E'(M)} \frac{dM}{dt} = Mg. \quad (1)$$

Metodou separace proměnných dostaneme pro dobu vznášení (v podstatě jen mechanicky osamostatníme  $dt$  a vložíme integrační znaménka na obě strany rovnosti)

$$-\int_{M_0}^m \frac{\sqrt{2E'(M)}}{Mg} dM = \int_0^T dt \quad \Rightarrow \quad T = \int_m^{M_0} \frac{\sqrt{2E'(M)}}{Mg} dM.$$

Snažíme se tedy maximalizovat určitý integrál volbou vhodné funkce  $E(M)$ , splňující navíc jisté podmínky, které jsme již uvedli. Zřejmě můžeme při hledání extrému směle zahodit multiplikační konstanty a hledat tak pouze maximum integrálu

$$\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M)}}{M} dM. \quad (2)$$

Úloha, kdy hledáme funkci, pro kterou nějaký integrální výraz nabývá extrémní hodnoty, je asi pro většinu z vás nanejvýš podezřelá. Na střední škole nic takového nepotkáte, ačkoliv jde o velmi užitečný typ úloh.<sup>1</sup> Vzhledem k nesmírné užitečnosti tohoto postupu mi snad ti, kdo jej znají třeba z Feynmanových přednášek, odpustí drobné opakování.

Takovéto úlohy se řeší v principu podobně jako hledání extrému funkce. To, že jsme našli extrém, zjistíme tak, že pokud se o kousek pohneme libovolným směrem, hodnota funkce se „více méně“ nezmění. My budeme s naší funkcí také malinko hýbat (variovat ji) přičítáním nějaké poměrně libovolně zvolené malé funkce a budeme sledovat, jak se mění hodnota integrálu.

Dosaďme tedy do našeho integrálu místo  $E(M)$  součet  $E(M) + \eta(M)$ , kde  $\eta(M)$  bude ona malá funkce. Dostaneme tak

$$\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M) + \eta'(M)}}{M} dM.$$

Protože funkci  $f(x)$  můžeme v okolí zvoleného bodu  $x_0$  poměrně dobře aproximovat výrazem  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  (je to jako nahradit graf funkce jeho tečnou v bodě  $x_0$ ), dostaneme odtud pro  $\sqrt{E'(M) + \eta'(M)}$  přibližný výraz  $\sqrt{E'(M) + \eta'(M)}/2\sqrt{E'(M)}$ .

Změna hodnoty integrálu způsobená přičtením naší malé funkce je tedy přibližně rovna

$$\int_m^{M_0} \frac{\eta'(M)}{2M\sqrt{E'(M)}} dM.$$

Integrace per partes pak dává

$$\left[ \frac{\eta(M)}{2M\sqrt{E'(M)}} \right]_m^{M_0} - \int_m^{M_0} \eta(M) \frac{d}{dM} \left( \frac{1}{2M\sqrt{E'(M)}} \right) dM.$$

Všimněme si však, že hodnoty  $E(M)$  jsou v bodech  $m$  a  $M_0$  pevně dané a funkce  $\eta(M)$  v nich tedy musí být nulová. To ovšem vynuluje první člen v tomto výrazu.

Hledáme-li extrém původně uvažovaného integrálu (2), musí být jeho změna jistým způsobem malá bez ohledu na volbu funkce  $\eta(M)$ . Není nic přímočařejšího, než zkusit, zda někdy

<sup>1)</sup> Kdo někdy nechtěl vědět, proč ze všech křivek dané délky ohraničuje největší plochu právě kružnice?

tato změna (v přiblíženích, která jsme provedli) nebude dokonce nulová. Všímavější jistě zaregistrují, že se tak skutečně stane, pokud bude výraz pod integrálem v odvozeném vyjádření změny identicky nulový. Protože jsme však funkci  $\eta(M)$  mohli zvolit tak, že sama není nulová nikde (samozřejmě kromě obou krajních bodů), musí být

$$\frac{d}{dM} \left( \frac{1}{2M\sqrt{E'(M)}} \right) = 0.$$

To už je obyčejná diferenciální rovnice, jejímž integrováním a úpravou dostaneme nejprve

$$\frac{1}{M^2 C^2} = E'(M)$$

a následně pak

$$E(M) = A - \frac{1}{MC^2}.$$

Integrační konstanty  $A$  a  $C$  zvolíme tak, aby bylo  $E(M_0) = E_0$  a  $E(m) = 0$ . Dostaneme pak hledanou funkci

$$E(M) = \frac{E_0 M_0}{M_0 - m} \left( 1 - \frac{m}{M} \right), \quad (3)$$

$$E'(M) = \frac{E_0 M_0 m}{(M_0 - m)M^2}. \quad (4)$$

Nakonec vypočítáme závislost všech podstatných veličin na čase. Dosazením (4) do (1) a úpravou získáme

$$\dot{M} = -M^2 g \sqrt{\frac{M_0 - m}{2E_0 M_0 m}}.$$

Tuto rovnici dořešíme separací proměnných

$$\frac{1}{M(t)} = \frac{1}{M_0} + tg \sqrt{\frac{M_0 - m}{2E_0 M_0 m}}. \quad (5)$$

Odtud také můžeme dostat dobu  $T$  položením  $M = m$ .

$$T = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2E_0(M_0 - m)}{M_0 m}}. \quad (6)$$

Dosazením (5) do (3) získáme

$$E(t) = E_0 - tg \sqrt{\frac{mM_0 E_0}{2(M_0 - m)}}.$$

Zderivováním podle času najdeme vztah pro veličiny  $P$  a  $\mu$ .

$$P(t) = \frac{E_0}{T}, \quad \mu(t) = \frac{Tg^2 M_0^2}{2E_0} \frac{1}{(1 + tTg^2 M_0/2E_0)^2}. \quad (7)$$

Využitím vztahu  $P = \frac{1}{2}\mu v^2$  dostaneme

$$v(t) = \frac{2E_0}{TgM_0} + gt. \quad (8)$$

Vztahy (5) až (8) dávají všechny podstatné informace o ideálním průběhu vznášení modulu, které jsme hledali.

Jistě jste si všimli, že jsme nedokazovali, že pro nalezenou funkci uvažovaný integrál (tedy doba vznášení) nabývá skutečně maximální hodnoty. Intuitivně můžeme tento názor podepřít faktem, že hodnota integrálu (2) je shora omezená<sup>2)</sup>, a tedy by měl být jediný nalezený extrém maximem. Matematicky zcela správný důkaz by byl pravděpodobně docela zdoluhavý. Tento problém ve svém originálním řešení (založeném ovšem na poněkud odlišném principu, než jaký zde byl popsán) velice hezky vyřešil *Tomáš Tintěra*.

**Marek Pechal**

marek@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III.3 ... vzdálenost vizuální dvojhvězdy (4 body; průměr 3,15; řešilo 27 studentů)

Z redukovaných hvězdných spekter složek dvojhvězdy (podle přítomných spektrálních čar, z nichž žádná v tomto případě nemění svou polohu v čase) jsme určili spektrální třídy obou hvězd a následně odhadli jejich hmotnosti na 2 a 3 hmotnosti Slunce. Z pozorování dalekohledem s ohniskovou vzdáleností 3 m víme, že složky skutečně obíhají v neměnné vzdálenosti 5 úhlových minut od sebe jednou za 50 let.

Dokážete z těchto informací určit vzdálenost dvojhvězdy od Slunce? Pokud ano, uveďte, jak jste jednotlivé informace použili, anebo nepoužili, a výsledek vhodně zaokrouhlete. Také okomentujte, jaký vliv na něj má nepřesná znalost údajů, zejména hmotností.

*Při astronomickém pozorování vymyslel Pavel Brom.*

Hvězdy o hmotnostech  $M_1$  a  $M_2$  na sebe gravitačně působí. Víme, že spektrální čáry v čase nemění svoji polohu. Z toho můžeme odhalit, že se hvězdy pohybují v rovině kolmé na spojnici Země a těžiště soustavy dvojhvězdy. Je vhodné zdůraznit, že tato situace je velmi vzácná. Úhel, pod kterým je pozorujeme, se nemění, hvězdy se tedy budou pohybovat po kružnicích se středem v těžišti. Pro poloměry těchto kružnic platí  $M_1 r_1 = M_2 r_2$ . Z třetího Keplerova zákona v přesném znění vypočteme vzdálenost  $R$  mezi hvězdami. Vzdálenost dvojhvězdy od Slunce potom určíme pomocí goniometrických funkcí v trojúhelníku.

Postupujme podrobně a odvodme třetí Keplerův zákon. Na každou hvězdu působí gravitační síla a odstředivá síla. Obě síly musí být v rovnováze

$$\frac{\kappa M_1 M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_1 \omega^2 r_1, \quad \frac{\kappa M_1 M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_2 \omega^2 r_2,$$

<sup>2)</sup> Užijeme Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti, podle níž platí

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx,$$

tedy v našem případě

$$\left( \int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M)}}{M} dM \right)^2 \leq \int_m^{M_0} E'(M) dM \cdot \int_m^{M_0} \frac{1}{M^2} dM = E_0 \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{M_0} \right).$$

kde  $\omega = 2\pi/T$  a  $T = 50$  let. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$r_1^3 = \frac{\kappa M_2}{\omega^2 (1 + M_1/M_2)^2}, \quad r_2^3 = \frac{\kappa M_1}{\omega^2 (1 + M_2/M_1)^2}.$$

Dostáváme vzdálenost hvězd od sebe

$$R = r_1 + r_2 = \left( \frac{\kappa (M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

což je třetí Keplerův zákon v přesném znění.

Označíme-li  $\varphi$  úhel, který svírají složky dvojhvězdy při pozorování, platí pro vzdálenost  $x$  dvojhvězdy od Slunce

$$x = \frac{R/2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} \approx \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \approx \frac{R}{\varphi},$$

kde malý úhel  $\varphi$  je v radiánech. Po číselném dosazení vychází  $x = 2,4 \cdot 10^{12}$  km = 16 000 AU, což je šestnáctina vzdálenosti nejbližší hvězdy od Slunce. V našem zadání se vyskytla menší chyba. Úhlová vzdálenost měla být zadána jako 5 vteřin, nikoliv 5 minut. Po dosazení  $\varphi = 5''$  vyjde vzdálenost od Slunce  $x = 1,4 \cdot 10^{14}$  km = 15 ly.

V řešení jsme nepotřebovali údaj o ohniskové vzdálenosti dalekohledu. Z informace o spektrálních čarách jsme zjistili postavení dvojhvězdy vzhledem k Zemi. Z hmotností složek a periody oběhu jsme určili vzdálenost složek dvojhvězdy od sebe. Konečně vzdálenost dvojhvězdy od Slunce jsme stanovili ze znalosti o úhlové vzdálenosti jejích složek.

Hmotnost systému vystupuje ve vztahu pod třetí odmocninou. Tedy relativní chyba určení hmotnosti se na celkový výsledek přenáší z jedné třetiny. Ostatní veličiny (úhel a čas) jsme schopni měřit velmi přesně, takže se v celkové chybě také výrazně neprojeví.

Většina došlých řešení byla správná. Někteří řešitelé opomenuli diskutovat vliv chyby určení hmotností a téměř nikdo neuvedl, jak jednotlivé zadané informace použil/nepoužil při řešení úlohy.

**Zdeněk Kučka**

zdenek@fykos.mff.cuni.cz

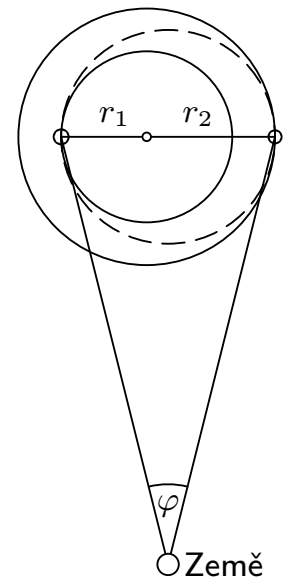
### Úloha III.4 ... topení Alberta Einsteina (5 bodů; průměr 3,50; řešilo 16 studentů)

Albert Einstein se v důchodovém věku (narozdíl od svých vrstevníků šťourajících se v zahrádce) zamýšlel nad různými paradoxními jevy. V zimě si všiml, že když ohřívá vodu v topení přímo ohněm, účinnost je velmi malá.

Napadlo ho vyzkoušet jiný postup. Vzít ideální tepelný stroj a použít kotel a venkovní vzduch jako teplou a studenou lázeň. Práci, kterou z tohoto stroje získá, pak vložit do jiného ideálního tepelného stroje, který bude odebírat teplo vzduchu a předávat jej vodě. Jestliže jsou teploty kotle, vody a vzduchu  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$ , jaká je účinnost ohřevu vody? Nedochozí náhodou k porušení druhého termodynamického zákona?

Úlohu navrhl Matouš Ringel.

Hned na začátku upozorním, že se v řešení nebudeme držet korektní znaménkové konvence, protože by se text pravděpodobně trochu zneřehlednil. Teplu i práci přisoudíme vždy kladné znaménko bez ohledu na to, zda je stroj získává či uvolňuje. Význam každé veličiny bude zřejmý z kontextu.



Obr. 2.  
Pozorování  
dvojhvězdy ze  
Země.



Popišme stručně situaci a zaveďme značení. Oheň předává kotli teplo  $Q_0$ . Stejně velké teplo  $Q_{\text{in},1}$  z kotle odebírá první tepelný stroj a teplota vody v kotli zůstává tudíž stálá. Část tohoto tepla  $Q_{\text{out},1}$  přejde do studené lázně (vzduchu) a zbytek přijatého tepla se přemění v práci  $W_{\text{out},1}$ . Můžeme tedy psát

$$Q_{\text{in},1} - Q_{\text{out},1} = W_{\text{out},1}.$$

Druhý stroj odebírá teplo  $Q_{\text{in},2}$  studené lázni (vzduchu) a přijímá práci  $W_{\text{in},2}$ . Získané teplo a práce se přemění v teplo  $Q_{\text{out},2}$ , které stroj odevzdá teplé lázni (vodě). Platí tedy

$$Q_{\text{in},2} + W_{\text{in},2} = Q_{\text{out},2}.$$

Zajímá nás, zda je  $Q_{\text{out},2}$  větší než  $Q_{\text{in},1}$  potažmo  $Q_0$ .

Účinnost prvního stroje je definována jako poměr vykonané práce  $W_{\text{out},1}$  a přijatého tepla  $Q_{\text{in},1}$ . Účinnost ideálního tepelného stroje (Carnotova cyklu) je dána pouze teplotami lázni a platí

$$\eta_1 = \frac{W_{\text{out},1}}{Q_{\text{in},1}} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}. \quad (9)$$

Druhý stroj je úplně stejný jako první, jen s tím rozdílem, že všechny děje probíhají v opačném smyslu a stroj pracuje jako tepelné čerpadlo. Opět můžeme definovat účinnost<sup>3</sup> stejným způsobem jako u prvního stroje. Nyní to bude poměr práce přijaté a tepla odevzdaného teplé lázni

$$\eta_2 = \frac{W_{\text{in},2}}{Q_{\text{out},2}} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}. \quad (10)$$

Dále víme, že veškerou práci, kterou první stroj vykoná, předá druhému stroji,

$$W_{\text{in},2} = W_{\text{out},1}. \quad (11)$$

Z rovnic (9), (10) a (11) již snadno vyjádříme požadované teplo  $Q_{\text{out},2}$ , které druhý stroj předá vodě v topení

$$Q_{\text{out},2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} Q_{\text{in},1}. \quad (12)$$

Celková účinnost našeho systému je tedy  $\eta = \eta_1/\eta_2$ . Podle (9) a (10) zřejmě platí  $\eta_1 > \eta_2$ , a můžeme tedy říct, že se složitější způsob ohřívání vyplatil.

Ověřme ještě, zda nedochází k porušení druhého termodynamického zákona. Jedna z jeho formulací říká, že není možné, aby teplo přecházelo z chladnějšího tělesa na teplejší bez vykonání dodatečné práce. V našem případě však první stroj pracuje zcela regulérně a „vyrábí“ práci, kterou odebírá druhý stroj pracující jako tepelné čerpadlo, a jistě tedy nedochází k samovolnému přechodu tepla z chladnějšího vzduchu do teplejší vody. Tepelného čerpadla se v současnosti čím dál hojněji využívá k vytápění domů. Nepoužívá se ovšem klasický tepelný stroj – využívá se podobného principu jako u běžné chladničky. Čerpadlem se prohání pracovní kapalina mezi studenou a teplou lázni, přičemž ve studené lázni je docíleno vypaření pracovní kapaliny a v teplé lázni její následné kondenzace, čímž se přenáší teplo a teplá lázeň se ohřívá na úkor studené.

*Marek Scholz*

`mara@fykos.mff.cuni.cz`

<sup>3)</sup> Máme na mysli účinnost Carnotova stroje. Účinnost tepelného čerpadla je převrácená hodnota  $1/\eta_2$ .

**Úloha III. P ... akrobat na lyžích** (4 body; průměr 3,56; řešilo 32 studentů)

Jistě znáte lyžařskou disciplínu akrobatické skoky. Lyžař po rozjezdu z kopce najíždí na můstek a skáče do vzduchu. Před dopadem zvládne skokan provést několik vrutů a salt. Vysvětlete, jak to lyžař dělá – co musí udělat, aby se začal otáčet tak, jak chce. Jak vyvrátíte tvrzení, že podle zákona zachování momentu hybnosti se musí skokan po celou dobu skoku otáčet kolem stejné osy a stejnou rychlostí?

*Problém vrtal hlavou Honzovi Prachařovi při sledování zimní olympiády.*

Vskutku jde o problémovou úlohu, takže toho moc nevypočítáme a budeme spíše kvalitativně uvažovat. Uděláme malou analýzu toho, jak se věci (i lidé) pohybují a proč. Jak to tedy lyžař dělá? Co musí udělat, aby se otáčel tak, jak chce? Je to velmi obtížná otázka, protože přísně vzato se lyžař neotáčí – jeho pohyb je mnohem komplikovanější. Rozeberme proto nejdříve některé jednodušší případy.

Představme si následující situaci.<sup>4</sup> Hledíme na mírný zasněžený kopeček, nad hlavou máme modrou oblohu. Najednou se od kopečku odráží lyžař a vylétá do vzduchu. Už při odrazu se nakloní dopředu, takže odrazem získává moment hybnosti vzhledem k těžišti (otáčí se ve směru pohybu). Ruce má rozpažené a v okamžiku skoku je pro lepší odraz vzpaží. Aby za kopcem dopadl opět na lyže, musí se nějak otočit, ale běda! Lyžař má jen malou úhlovou rychlost, takže pravděpodobně neuspěje a nejspíš spadne na nos. Lyžař proto musí udělat něco, aby svou úhlovou rychlost zvětšil a dostal se do správné polohy při dopadu. Lyžař v nejvyšším bodě přitáhne ruce k tělu a taky nohy k zadku. Skutečně to pomáhá, začne se rychleji otáčet, a když už je blízko správné vertikální orientace, opět ruce a nohy roztáhne, otáčení se zpomalí. Při dopadu může lyžař pružit nohama a také rukama (dopad zmírní při prudkém švih rukama dolů). Podstata je tedy jednoduchá – ve správný čas se stáhnout, zrychlit rotaci a ve druhý správný okamžik se zase roztáhnout. Právěho FYKOSáka ovšem takovéto vysvětlení nemůže uspokojit. Proč se lyžař začne otáčet rychleji, když přitáhne ruce a nohy k tělu, a naopak pomaleji, když je roztáhne?

Mějme těleso, které se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy stálého směru procházející hmotným středem vůči níž má moment setrvačnosti  $J$ . Ze školy znáte druhou impulzovou větu ve tvaru  $M = J\Delta\omega/\Delta t$ ; ten platí, pokud  $J$  je konstantní a mění se jen úhlová rychlost. Pokud se mění také  $J$ , správný vztah zní

$$M = \frac{\Delta(J\omega)}{\Delta t}.$$

Platí tedy, že moment hybnosti  $J\omega$  tělesa, na něž nepůsobí žádné momenty sil vzhledem k ose otáčení, je konstantní.

Lyžař je rovněž těleso, ale nikoliv tuhé. Otáčí se pořád ve stejné rovině a jediná síla, která na něj působí, je tíhová síla, která má působiště v těžišti, a má tedy nulový moment vzhledem k ose rotace. Pokud chce lyžař zvýšit svoji rychlost otáčení, zmenší svůj moment setrvačnosti  $J$ ; úhlová rychlost se pak musí ve stejném poměru zvýšit, aby byl moment hybnosti  $L = J\omega$  konstantní.

V diskutovaném skoku lyžař rotoval pořád kolem stejné osy, kolmé na rovinu pohybu. V takovém případě je vektor úhlové rychlosti rovnoběžný s vektorem momentu hybnosti  $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$ .

Další situace vypadá takto – lyžař při jízdě v boulích najíždí na můstek, při odrazu se natočí, letí, rotuje kolem podélné osy svého těla. Pak roztáhne nohy s lyžemi co nejvíce do

<sup>4</sup>) Situaci najdete na stránce <http://www.fotosearch.com/EYW806/ev02127/> jako video sekvenci.

stran, jeho rotace se zpomalí (už víme proč), to aby vypadal co nejlíp a nejneuvěřitelněji v nejvyšším bodě, před dopadem nohy vrátí dolů, zrychlí svou rotaci a efektně dosedne na svah.

Zajímavější je případ, kdy se lyžař odrazí tak, že získá rotaci kolem obecné osy procházející jeho tělem. Existují totiž skoky, při kterých zůstává téměř rozum stát, kdy akrobat rotuje kolem proměnné osy, proměnnou rychlostí a v proměnném tvaru (např. trojitě salto s pěti vruty Aleše Valenty). Jak je to možné? Neodporuje to náhodou zákonu zachování momentu hybnosti? Ten tvrdí, že vektor  $\mathbf{L}$  je během pohybu ve vzduchu konstantní, pokud celkový momenty vnějších sil působících na lyžaře je nulový. Podmínka zákona je splněna, neboť tíhová síla (jediná vnější síla) má nulový moment vzhledem k ose procházející těžištěm. Jak však může být  $\mathbf{L}$  konstantní, když  $\boldsymbol{\omega}$  mění jak velikost, tak směr? Jsou proto dva základní důvody.

1. Už pro volné tuhé těleso se zjistilo, že moment hybnosti vždy nemíří stejným směrem jako úhlová rychlost. Úhlová rychlost se mění jak v prostoru, tak vůči tělesu.<sup>5</sup> Akrobat toho může využít a počkat, až bude ve správné poloze, a pak udělat nějaký pohyb (např. nohama nebo rukama).
2. Člověk není tuhé těleso. Pokud chce, může změnit svoji konfiguraci, a díky tomu je dokonce možné, aby člověk změnil svou orientaci v prostoru bez toho, aby nějaký moment hybnosti měl! Představte si, že jste právě v nejvyšším bodě výskoku ve vzduchu, bez jakéhokoliv momentu hybnosti čili bez otáčení, a chcete se otočit o  $180^\circ$ . Jak to uděláte? Že to nejde? A co kdybyste zkusili otáčet oběma upaženými rukama ve stejném směru? Otočíte se v opačném směru!<sup>6</sup>

Lidské tělo tedy není tuhé těleso a i díky tomu je možné s ním provádět nejrůznější akrobatické výkony. Každý akrobat se může otáčet, jak chce, pokud je moment hybnosti stále stejný. Jednoduchý příklad – představme si vzpřímeného akrobata ve vzduchu, jak rotuje kolem své podélné osy  $z$ . Vektor momentu hybnosti míří stejným směrem. Pokud však udělá správnou sérii pohybů, může dostat své tělo do roviny  $xy$  kolmé na vektor momentu hybnosti. Osa rotace je na konci stejná (při změně nebyla); moment setrvačnosti a úhlová rychlost se změnily ve stejném poměru. Problémem pak už je se jen naučit tu „správnou sérii pohybů“, což určitě není triviální a vyžaduje trénink.

Akrobati na lyžích skáčou kombinaci salt (rotace kolem vodorovné osy) a vrutů (rotace kolem podélné osy těla). Tu první získává lyžař správným odrazem a koriguje ji natáhnutím anebo stažením rukou a nohou. Tu druhou získává lyžař taky při odrazu, pomáhá si ale rukama – švihne s nima při odrazu a dál tuto rotaci ovlivňuje pohybem rukou. Celou souhru pohybů je těžké pochopit, natož pak popsát. Podívejte se na vlastní oči, jak to Aleš Valenta dělá<sup>7</sup>.

Někteří řešitelé si uvědomili, že na akrobata vlastně působí vzduch, a tedy moment hybnosti se nezachovává. Striktně vzato ano, ale v každé reálné situaci působí velké množství vlivů a musíme si uvědomit, zda jsou podstatné. Pokud se podíváte na takový skok, jistě dojdete k závěru, že tak rychlou rotaci (a tak velké změny) nemohou být vyvolány jen odporem vzduchu. Podstatný je tu právě vklad akrobata – rozjezd, skok a celková koordinace pohybů.

Vyskytl se také často názor, že akrobat dokáže měnit svou úhlovou rychlost, protože jeho rotační energie získaná odrazem  $J\omega^2/2$  je konstantní. To však není pravda, při zmenšení mo-

<sup>5)</sup> Koho zajímají tyto a jiné vlastnosti tuhého tělesa, doporučuji Feynmanovy přednášky z fyziky I.

<sup>6)</sup> Za tento nápad děkuji Tomáši Bzduškoví.

<sup>7)</sup> <http://www.youtube.com/watch?v=Io2W-kGONws>

mentu setrvačnosti lyžař překonává odstředivou sílu a jeho práce se spotřebuje na zvýšení jeho rotační energie.

Při zamýšlení se nad touto úlohou jsem klikl taky na zajímavý odkaz<sup>8</sup>. Na videu je hezky ukázáno, že co se pohybových možností týče, člověk neuznává žádné meze.

*Ján Lalinský*

*jano@fykos.mff.cuni.cz*

### Úloha III.E ... Planckova konstanta (8 bodů; průměr 5,33; řešilo 24 studentů)

Navrhněte a dostatečně teoreticky zdůvodněte metody k experimentálnímu určení Planckovy konstanty, které se dají realizovat doma, příp. s vybavením ve školní laboratoři, a alespoň jednu z nich proveďte. Všechny veličiny, které je možné experimentálně určit (zvažte užití statistiky), co nejpřesněji změřte a správně vyhodnotte velikost této fundamentální konstanty s příslušnou experimentální chybou.

Nápověda: LED dioda s ochranným rezistorem stojí cca 5 Kč.

*Experiment k seriálu navrhl Pavel Brom.*

Experimentální určení fundamentální konstanty, jakou je Planckova konstanta, je obecně obtížné a v řešení se nevyhneme složité diskusi výsledků měření. Hlavní motivací k zařazení úlohy bylo téma seriálu, které nám na odlehčené úrovni dovolí vysvětlit potřebnou teorii. Uplatníme metodu doporučenou v zadání (užití LED diody), a proto se nejprve věnujme teorii polovodičů<sup>9</sup>.

#### Teorie

Elektrony v atomech vyhovují Pauliho vylučovacímu principu – žádné dva elektrony se stejným spinem nemohou mít stejnou energii (přesněji stejná kvantová čísla). A tak elektrony obsazují energetické hladiny postupně od té nejnižší. Při nulové teplotě žádnou hladinu nevynechají, až po určitou energetickou mez jsou všechny hladiny zaplněné nad ní jsou hladiny neobsazené.

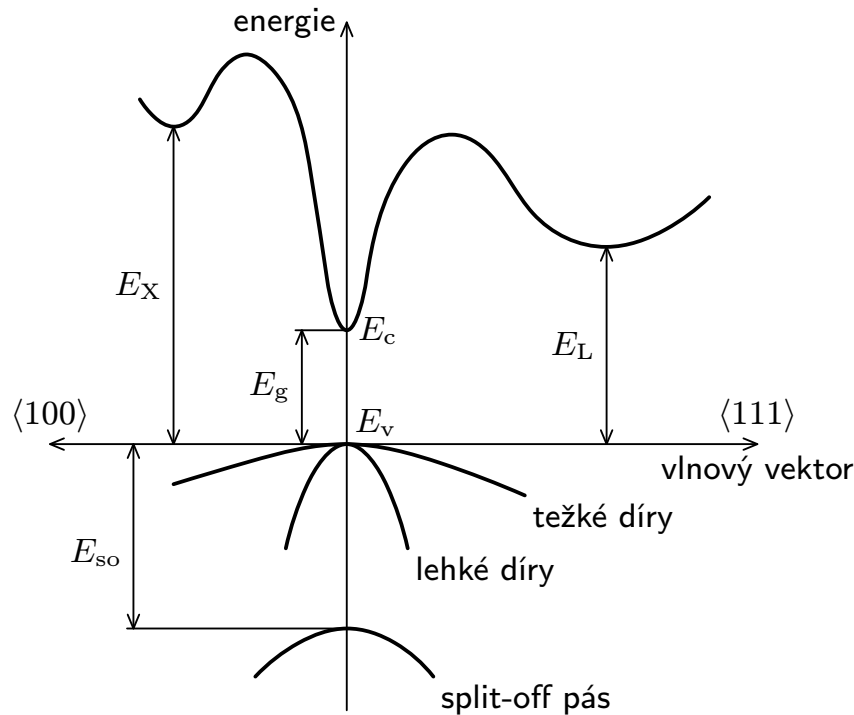
V pevných látkách se setkáváme s pozoruhodným jevem. Energetické hladiny elektronů jsou u sebe neuvěřitelně blízko, elektrony mohou prakticky nabývat spojitě každé energie (to je důsledek toho, že v pevné látce je elektronů neuvěřitelně moc). Existují však intervaly energií, které jsou zakázané. Žádné elektrony nemohou mít energii z těchto intervalů. Závislost energie elektronu na vlnovém vektoru nazýváme pásové schéma (pásová struktura), neboť povolené a zakázané energie tvoří „pásky“.

U polovodičů je konfigurace elektronů právě taková, že mezi poslední obsazenou (jí odpovídá energie  $E_v$ ) a první neobsazenou hladinou (energie  $E_c$ ) je zakázaný pás – tzv. gap, jeho šířka je  $E_g = E_c - E_v$ . Nejvyššímu obsazenému pásu při nulové teplotě říkáme valenční pás a nejvyššímu neobsazenému pásu říkáme vodivostní pás (conducting band). V reálných polovodičích za běžných podmínek (např. nenulová teplota, vliv příměsí) dochází k difuzi elektronů – některé obsazené hladiny se vlivem tepelného pohybu uvolní a některé neobsazené se zaplní.

Pásovou strukturu nějakého polovodiče nelze vypočítat analyticky, ale pouze numerickými metodami na počítači. Příklad takto vypočítané pásové struktury polovodiče typu III-V gallium-arsenid vidíte na obr. 3.

<sup>8)</sup> [http://www.neufstream.com/tag/acrobatics/video/x174oz\\_worldsbesttrickers02](http://www.neufstream.com/tag/acrobatics/video/x174oz_worldsbesttrickers02)

<sup>9)</sup> O polovodičích si můžete více přečíst v seriálu 13. ročníku FYKOSu.



Obr. 3. Pásová struktura GaAs. Při teplotě 300 K je  
 $E_g = 1,42 \text{ eV}$ ,  $E_L = 1,71 \text{ eV}$ ,  $E_X = 1,90 \text{ eV}$ ,  
 $E_{so} = 0,34 \text{ eV}$ .

Ve vodivostním pásu  $E \geq E_c$  může elektron libovolně zvyšovat svou energii (např. v elektrickém poli), protože v jeho sousedství je dostatek neobsazených hladin. Naopak ve valenčním pásu  $E \leq E_v$  je elektron vázaný, okolní energetické hladiny jsou obsazené a nemůže na ně snadno přeskočit. U vodičů se valenční a vodivostní pás těsně dotýkají, tedy pouhým tepelným pohybem se elektron může uvolnit do vodivostního pásu a vést elektrický proud. U polovodičů se elektron může dostat z valenčního do vodivostního pásu absorpcí dostatečného množství energie např. absorpcí fotonu o energii  $E$ ,

$$E_g \leq E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

kde  $h$  je Planckova konstanta a dále  $c$  rychlost,  $\nu$  frekvence,  $\lambda$  vlnová délka světla v daném prostředí (můžeme předpokládat vakuum). Polovodiče a izolanty se liší velikostí zakázaného pásu (izolanty jej mají nejširší, orientačně větší než např. 5 eV). Různé typy polovodičů se pak liší opět šířkou zakázaného pásu  $E_g$ .

Užívané LED diody jsou vyrobené právě z polovodiče Ga-As, který má přímý přechod. To znamená, že postačí absorpce/emise fotonu bez nutnosti dodat/odebrat hybnost elektronu. (V pásovém schématu na obr. 3 to znamená, že minimum  $E_c$  se nachází přímo nad maximum  $E_v$ .) LED (light-emitting diode) využívá opačného přeskočení z vodivostního do valenčního pásu (jev se nazývá spontánní emise), přičemž je vyzářen foton o energii  $E \geq E_g$ . Nejprve je samozřejmě nutné potřebnou energii elektronu dodat k přeskočení do vodivostního pásu; již zmíněný proces tepelných kmitů je nedostačující, proto potřebnou práci  $W$  může vykonat elektrické pole způsobené přiloženým napětím  $U$

$$W = E_g = eU, \quad (13)$$

kde  $e$  je absolutní hodnota náboje elektronu. S uvážením vztahů výše dostáváme obecně nerovnost

$$\frac{hc}{\lambda} \geq eU \quad \Rightarrow \quad h \geq \frac{e}{c} \cdot U\lambda. \quad (14)$$

Emitovanou vlnovou délku  $\lambda$  i napětí  $U$  můžeme v principu změřit (hůře najít v katalogu součástek). Jak víme, aby LED začala svítit, je na ni nutné přivést určité minimální napětí, jehož existenci již umíme vysvětlit rovností (13). V idealizovaném případě můžeme předpokládat, že napětí  $U$  odečteme při jeho zvyšování právě v okamžiku, kdy LED začne svítit, a potom by měla nastat rovnost. Všechny předpoklady však nezapomeneme okomentovat v diskusi.

### Postup

K experimentu budeme potřebovat LED diodu, resp. několik různých barevných diod s ochranným rezistorem na použité napětí (aby jimi podle Ohmova zákona neprotékal proud nad cca 10 mA) a jako zdroj baterii s napětím větším než minimální nutné napětí. K regulaci napětí zapojíme proměnný rezistor s vhodným odporem jako potenciometr. Z měřidel si obstaráme voltmetr. K určení vlnové délky je nejvhodnější spektrometr nebo monochromátor, díky němuž můžeme proměřit celé spektrum a poznatky o jeho průběhu využít do diskuse. Jinak se musíme spoléhat na údaj výrobce, resp. katalog. Experiment je nejvhodnější provádět v temné komoře k co nejpřesnějšímu nastavení napětí potenciometrem. K odečtu se bude hodit lampa či svítidla.

K baterii připojíme potenciometr a jezdec přesuneme k jednomu konci. Na tento konec a jezdec připojíme voltmetr a paralelně k němu ochranný odpor s LED diodou při správné polaritě v sérii. Experiment provádíme pokud možno za tmy; potenciometrem zvyšujeme napětí, dokud nezpozorujeme slabou emisi světla. Nastavené napětí  $U$  zaznamenáme, a jelikož jde o subjektivní měření, jeho nastavení a odečtení provedeme ještě několikrát pro statistické zpracování. Postup zopakujeme pro další diody s jinými barvami. Nechceme-li se spoléhat na udanou vlnovou délku, proměříme emisní spektrum použité LED diody na správně zkalibrovaném spektrometru (monochromátoru).

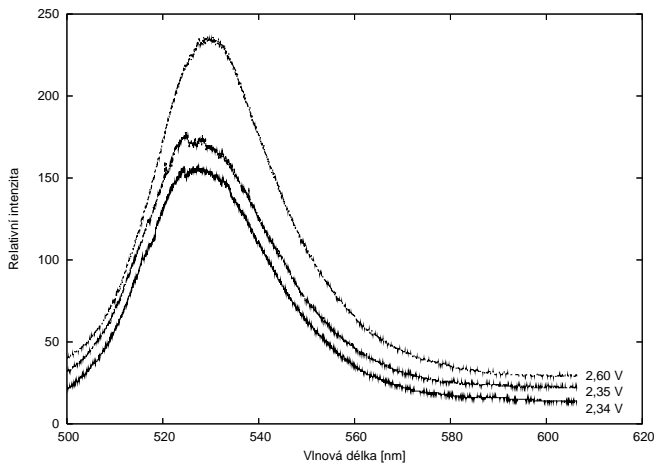
### Výsledky měření

Experiment byl proveden večer za dostatečné tmy a při teplotě 22 °C. Byly měřeny červená, zelená a bílá LED dioda přesně podle uvedeného postupu. Jako voltmetr byl použit digitální multimetr s chybou měření 0,01 V. Naměřené hodnoty napětí  $U$  pro všechny diody včetně výsledků statistického zpracování shrnuje následující tabulka.

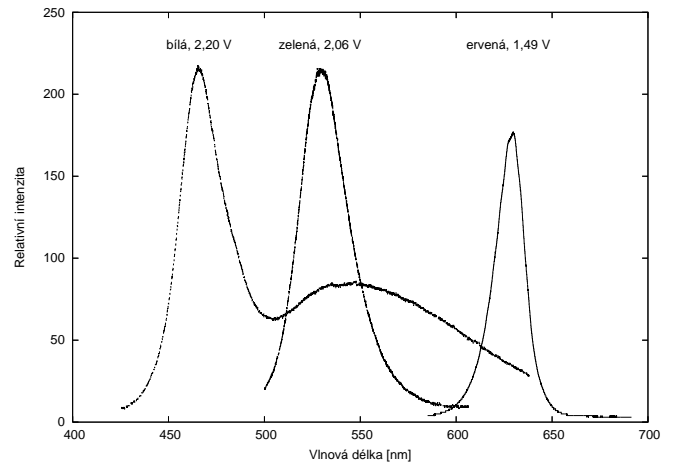
Naměřené hodnoty napětí a statistické zpracování.

Dioda	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$U_3$ [V]	$U_4$ [V]	$U_5$ [V]	$U$ [V]	$\sigma(U)$ [V]
červená	1,51	1,49	1,46	1,49	1,48	1,486	0,018
zelená	2,07	2,06	2,06	2,05	2,05	2,058	0,008
bílá	2,21	2,19	2,19	2,21	2,18	2,196	0,013

Emisní spektrum diod bylo studováno na monochromátoru SPM 2 (Carl Zeiss Jena), jehož využití nám laskavě umožnilo optické praktikum MFF UK – děkujeme. Monochromátor byl kalibrován na spektru rtuťové výbojky. Pořízená spektra nalezneme v grafech na obr. 4 a 5. U červené a zelené diody byl navíc zkoumán vliv napětí na diodě (tzn. svítivost diody) na její spektrální charakteristiku. Z grafu vidíme, že nastavené napětí, resp. svítivý výkon má zanedbatelný vliv na průběh spektra. Graf na obr. 5 uvádí vybrané spektrální charakteristiky všech diod.



Obr. 4. Spektrum zelené diody při různých napětích.



Obr. 5. Spektrum všech diod (bílé, zelené a červené).

Vyhodnocení měření komplikuje okolnost, že spektrum diod není zdaleka monochromatické. Jakou vlnovou délku tedy vidíme v okamžiku nastavení a odečtení napětí  $U$ ?! Ze spektra určíme jednak vlnovou délku  $\lambda$  maxima charakteristiky, jednak krajní vlnovou délku  $\lambda_0$  červeného konce spektra (kde fotony mají nejmenší energii), kterou můžeme okem spatřit. Odečtené hodnoty s odhadem chyby měření (raději nadsazené) uvádějí následující tabulky. Ze zaokrouh-

Experimentální hodnoty min. napětí a vlnové délky maxima spektrální charakteristiky.

Dioda	$U$ [V]	$\Delta U$ [V]	$\lambda$ [nm]	$\Delta \lambda$ [nm]	$h$ [ $10^{-34}$ J·s]	$\Delta h$ [ $10^{-34}$ J·s]	rel. chyba [%]
červená	1,49	0,02	630	10	5,01	0,15	2,9
zelená	2,06	0,02	530	17	5,83	0,24	4,2
bílá	2,20	0,02	465	20	5,46	0,28	5,2

Experimentální hodnoty min. napětí a krajní vlnové délky charakteristik.

Dioda	$U$ [V]	$\Delta U$ [V]	$\lambda_0$ [nm]	$\Delta \lambda_0$ [nm]	$h$ [ $10^{-34}$ J·s]	$\Delta h$ [ $10^{-34}$ J·s]	rel. chyba [%]
červená	1,49	0,02	660	10	5,25	0,15	2,9
zelená	2,06	0,02	590	20	6,49	0,28	4,4
bílá	2,20	0,02	530	30	6,23	0,41	6,6

lené hodnoty minimálního napětí mohla být vypočtena experimentální hodnota  $h$  Planckovy konstanty s příslušnou chybou (zde lze dobře využít zákon o sčítání malých relativních chyb). Viz též diskuse.

K posouzení správnosti experimentu můžeme zobrazit experimentální hodnoty  $\lambda$ ,  $\lambda_0$  v závislosti na  $U$ . Podle (14)

$$\lambda, \lambda_0 = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U} = \frac{A}{U},$$

kde koeficient  $A$  můžeme stanovit fitováním a z něho vyhodnotit Planckovu konstantu

$$h = \frac{e}{c} \cdot A. \quad (15)$$

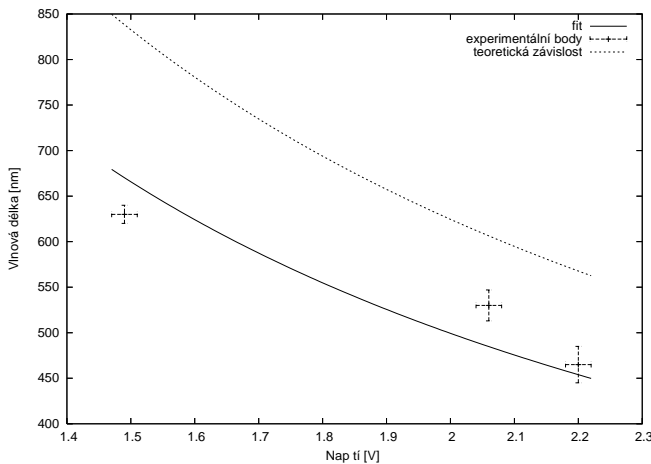
Zpracování je uvedeno v grafech na obr. 6 a 7. Pro srovnání je doplněn teoretický průběh závislosti pro dnešní tabelovanou hodnotu Planckovy konstanty.

Fitování provedené programem gnuplot 4.0 dává pro zpracování v grafu na obr. 6 výsledek  $A = (1000 \pm 50) \text{ nm}\cdot\text{V}$ , odkud podle (15) vychází

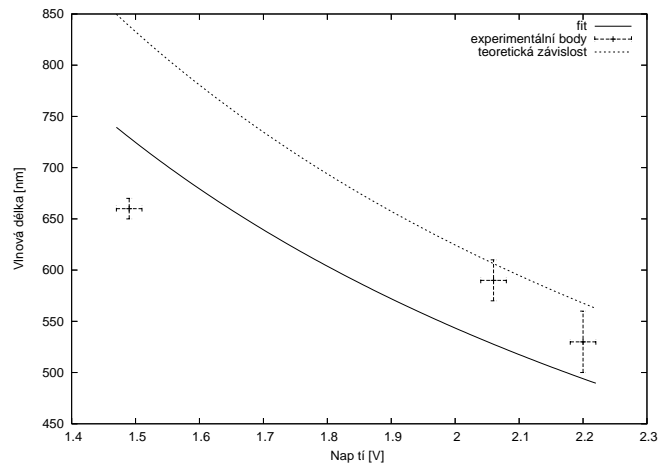
$$h = (5,333 \pm 0,246) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \quad \text{zaokrouhleno} \quad h = (5,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Pro hodnoty v grafu na obr. 7 výsledky jsou  $A = (1090 \pm 80) \text{ nm}\cdot\text{V}$  a

$$h = (5,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$



Obr. 6. Fitování exp. bodů při odečtu v maximech spektrálních charakteristik.



Obr. 7. Fitování exp. bodů při odečtu v krajích spektrálních charakteristik.

## Diskuse

Grafické zpracování výsledků v grafech na obr. 6 a 7 vypovídá mnoho o spolehlivosti našeho měření: *Změřené body nevykazují dobře očekávanou teoretickou závislost, proto zvolenou metodu můžeme doporučit nanejvýš pouze jako orientační měření!* Jen v jediném změřeném bodě (zelená LED dioda) jsme se v rámci chyby měření přiblížili skutečné hodnotě Planckovy konstanty. Rozumným závěrem z našeho měření může být např. aritmetický průměr  $5,7 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  všech hodnot (z obou metod odečtu vlnové délky) a raději nadsazená chyba měření (kterou si nemůžeme dovolit zaokrouhlit na více než jednu platnou číslici – větší přesnost nemůžeme garantovat!). Minimální absolutní chyba má hodnotu  $0,8 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , aby zahrnovala všechny změřené hodnoty, lépe však  $1 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  s ohledem na chyby měření jednotlivých výsledků. Podle chyby zaokrouhlíme výsledek.

Za dostatečně přesné můžeme považovat měření minimálního napětí pro emisi světla diodou, jehož relativní chyba se pohybuje okolo 1%. Jednoznačně největším problémem je určení vlnové délky světla, kterou v okamžiku odečtu napětí pozorujeme a která je pro malou intenzitu těžko měřitelná. Její hodnotu jsme odhadli při vyšší intenzitě vyzařování a za částečně ověřeného předpokladu, že průběh spektra diody není příliš ovlivněn vyzařovacím výkonem. Přesto nelze rozhodnout o tom, zda pozorujeme vlnovou délku v maximu charakteristiky či krajní vlnovou délku u červeného konce spektra. Zejména z tohoto důvodu bylo nadsazení chyby měření důležité. Tabeľovaná hodnota Planckovy konstanty je přibližně  $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

Všechny výsledky vyhovují teorii, tzn. nerovnosti (14). Odchytku od teoretické hodnoty můžeme zdůvodnit jednak nepřesností v určení vlnové délky emitovaného světla, jednak složitostí teoretického popisu reálných LED diod, zejména můžeme zpochybnit rovnost v (13), kterou



jsme předpokládali pro vyhodnocení. Jiné metody k měření Planckovy konstanty mohou využívat dobře známý fotoefekt či Heisenbergovy relace neurčitosti (speciální optické experimenty s difrakcí na štěrbině).

### Závěr

Podářilo se experimentálně odhadnout hodnotu Planckovy konstanty (obecněji její minimální hodnotu)  $h = (6 \pm 1) \cdot 10^{-34}$  J·s. Přínos této úlohy spočívá především v pochopení činnosti LED diody (např. ve spektru bílé diody si všimneme excitačního píku a potom luminiscenčního píku, který samozřejmě nesmíme uplatnit k vyhodnocení) a zejména využití grafického zpracování k ověření *spolehlivosti* měření, resp. použitého teoretického popisu!

### Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů si vybrala stejnou metodu měření, kterou vesměs úspěšně realizovala, a došla k podobně vychýleným výsledkům. Ti, kdo užili vlnovou délku deklarovanou výrobcem, se lépe přiblížili tabelované hodnotě, což lze zdůvodnit tak, že údaj je počítán právě z tabelované hodnoty Planckovy konstanty. Bohužel však málo z vás se do hloubky zamyslelo nad příčinami jistého nesouhlasu, někteří opět pozapomněli na standardní zpracování měření a uvedení chyb výsledků a jejich správné zaokrouhlení, tzn. *garanci přesnosti měření*.

**Pavel Brom**

paja@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III. S ... *impulsmoment* (6 bodů; průměr 4,00; řešilo 12 studentů)

- a) Dokažte, že z komutační relace  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$  plyne kompatibilitnost operátoru  $\hat{J}_3$  s operátorem  $\hat{J}^2$ .
- b) Definujme posunovací operátory

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2.$$

Vypočítejte komutační relace  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$ ,  $[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}]$ ,  $[\hat{J}_{\pm}, \hat{J}^2]$ .

- c) Na základě těchto vztahů dokažte, že vektory  $\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle$  jsou vlastními stavy operátorů  $\hat{J}^2$  a  $\hat{J}_3$  a platí pro ně

$$\hat{J}^2(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle) = j(j+1)(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle), \quad \hat{J}_3(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle) = (m \pm 1)(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle).$$

- d) (Bonus) Z předchozího vyplývá, že

$$\hat{J}_+|j, m\rangle = \alpha^{(+)}(j, m)|j, m+1\rangle, \quad \hat{J}_-|j, m\rangle = \alpha^{(-)}(j, m)|j, m-1\rangle,$$

kde  $\alpha^{(\pm)}(j, m)$  jsou koeficienty závislé na  $j$  a  $m$ . Určete je.

Rada: Užijte relace  $(\hat{J}_{\pm})^{\dagger} = \hat{J}_{\mp}$  a toho, že pokud operátor působí napravo jako  $\hat{A}$ , tak nalevo působí jako hermitovsky sdružený  $\hat{A}^{\dagger}$ , tj.

$$\langle a | (\hat{A}|b\rangle) = (\langle a | \hat{A}^{\dagger}) |b\rangle.$$

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

Na začátku si jako pomocný vztah odvodíme důležitou vlastnost komutátoru

$$[\hat{J}_i^2, \hat{J}_j] = \hat{J}_i^2 \hat{J}_j - \hat{J}_j \hat{J}_i^2 = (\hat{J}_i^2 \hat{J}_j - \hat{J}_i \hat{J}_j \hat{J}_i) + (\hat{J}_i \hat{J}_j \hat{J}_i - \hat{J}_j \hat{J}_i^2) = \hat{J}_i [\hat{J}_i, \hat{J}_j] + [\hat{J}_i, \hat{J}_j] \hat{J}_i.$$

Tato vlastnost se nazývá *linearita*.

- a) Kompatibilita operátoru  $\hat{J}_3$  s kvadrátem impulsmomentu  $\hat{J}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2$  znamená  $[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = 0$ . Z linearity komutátoru plyne

$$[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = [\hat{J}_3, \hat{J}_1^2] + [\hat{J}_3, \hat{J}_2^2] + [\hat{J}_3, \hat{J}_3^2] = \hat{J}_1 [\hat{J}_3, \hat{J}_1] + [\hat{J}_3, \hat{J}_1] \hat{J}_1 + \hat{J}_2 [\hat{J}_3, \hat{J}_2] + [\hat{J}_3, \hat{J}_2] \hat{J}_2,$$

kde jsme využili toho, že operátor  $\hat{J}_3$  komutuje s libovolnou funkcí sebe sama. Komutační relace nám dávají

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_2] = -i\hat{J}_1.$$

Po dosazení pak dostaneme

$$[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = i\hat{J}_1 \hat{J}_2 + i\hat{J}_2 \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 \hat{J}_1 - i\hat{J}_1 \hat{J}_2 = 0.$$

Naprosto stejným postupem bychom dostali, že stejně tak komutují s  $\hat{J}^2$  i operátory  $\hat{J}_1$  a  $\hat{J}_2$ .

- b) Užití komutačních relací

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_1, \hat{J}_3] = -i\hat{J}_2$$

a linearity vede po jednoduchých výpočtech na

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = [\hat{J}_1 + i\hat{J}_2, \hat{J}_1 - i\hat{J}_2] = [\hat{J}_1, \hat{J}_1] + i[\hat{J}_2, \hat{J}_1] - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] + [\hat{J}_2, \hat{J}_2] = 2\hat{J}_3.$$

Obdobně dostaneme pro další dva komutátory

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_\pm, \hat{J}^2] = 0.$$

- c) O vektoru  $|j, m\rangle$  víme, že je vlastním stavem operátoru  $\hat{J}^2$ , resp.  $\hat{J}_3$  příslušný vlastní hodnotě  $j(j+1)$ , resp.  $m$ , tj.

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \quad \hat{J}_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle.$$

Definujme teď nový stav  $|\psi_\pm\rangle = \hat{J}_\pm |j, m\rangle$ . Působení operátoru  $\hat{J}^2$  dává

$$\hat{J}^2 |\psi_\pm\rangle = \hat{J}^2 \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hat{J}_\pm \hat{J}^2 |j, m\rangle = \hat{J}_\pm [j(j+1) |j, m\rangle] = j(j+1) |\psi_\pm\rangle,$$

kde jsme využili vztah  $[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0$  získaný v úkolu b). Podobně pro působení operátoru  $\hat{J}_3$  máme

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 |\psi_\pm\rangle &= \hat{J}_3 \hat{J}_\pm |j, m\rangle = (\hat{J}_\pm \hat{J}_3 \pm \hat{J}_\pm) |j, m\rangle = \hat{J}_\pm m |j, m\rangle \pm \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \\ &= (m \pm 1) \hat{J}_\pm |j, m\rangle = (m \pm 1) |\psi_\pm\rangle. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že vektory  $|\psi_{\pm}\rangle = \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle$  jsou skutečně vlastními vektory operátorů  $\hat{J}^2$ ,  $\hat{J}_3$ , které přísluší stejné hodnotě  $j$  jako vektor  $|j, m\rangle$ , ale jiným hodnotám  $m$ , konkrétně třetí komponentu impulsmomentu mění (posouvají) o jedničku.

d) Jako pomocný vztah si chytře rozepíšeme součin operátorů  $\hat{J}_+\hat{J}_-$ .

$$\begin{aligned}\hat{J}_+\hat{J}_- &= (\hat{J}_1 + i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2) = \hat{J}_1^2 - i\hat{J}_2\hat{J}_1 + i\hat{J}_1\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = \\ &= \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3.\end{aligned}$$

Jistě platí, že  $\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 = \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2$ , což po dosazení dá

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3.$$

Předkládaná rada v zadání nebyla žádným hlubokomyslným tvrzením, ale měla vás vést k výpočtu maticového elementu

$$\langle j, m | \hat{J}_+\hat{J}_- | j, m \rangle,$$

a to dvěma způsoby. První užije právě získané relace

$$\langle j, m | \hat{J}_+\hat{J}_- | j, m \rangle = \langle j, m | \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3 | j, m \rangle = j(j+1) - m^2 + m.$$

V druhém způsobu uplatníme radu a vyjádříme výsledek pomocí koeficientů  $\alpha^{(\pm)}(j, m)$ . Porovnáním pak pro ně získáme explicitní vztah. Doteď jsme se zabývali pouze případy, kdy operátor působil vlevo. Tady je však výhodné nechat zapůsobit  $\hat{J}_-$  nalevo, ale  $\hat{J}_+$  napravo.

$$\langle j, m | \hat{J}_+ = \langle j, m-1 | \alpha^{(-)}(j, m)^*.$$

Pro maticový element tedy máme

$$\langle j, m | \hat{J}_+\hat{J}_- | j, m \rangle = |\alpha^{(-)}(j, m)|^2.$$

Porovnáním výsledků z obou způsobů výpočtu dostaneme

$$\alpha^{(-)}(j, m) = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}.$$

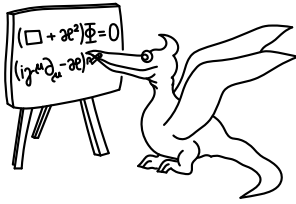
Obdobně počítáním maticového elementu  $\langle j, m | \hat{J}_-\hat{J}_+ | j, m \rangle$  dospějeme k výrazu

$$\alpha^{(+)}(j, m) = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}.$$

Na závěr bych se chtěl omluvit za poněkud techničtější úlohu, ale řešení i podstatně složitějších problémů se často i na toto redukuje a jistá zručnost je v tomto případě nutná. Poděkování patří *Pavlu Motlochovi* za ochotné zaslání  $\TeX$ ovských zdrojových souborů svého řešení (autor si chtěl původně poněkud ulehčit práci). Žel bohu rychlejší myšlenkové pochody Pavlova řešení se moc neslučovaly s pedagogickým cílem, který vzorové řešení sleduje.

*Jarda Trnka*

jarda@fykos.mff.cuni.cz



## Seriál na pokračování

### Kapitola 5: Skládání impulsmomentů

V této kapitole seriálu se budeme více věnovat mimořádně důležitému operátoru – *impulsmomentu*. Leccos jste už o něm slyšeli v předchozích dílech, ale mnohé zajímavé skutečnosti jsme vám zatajili.

#### Dva impulsmomenty

Již jsme se seznámili s komponentami operátoru impulsmomentu  $\hat{J}_i$  a jeho kvadrátem  $\hat{J}^2$ . Ukázali jsme, že je možné najít vektory, jež jsou vlastními stavy  $\hat{J}_3$  a  $\hat{J}^2$ . To bylo způsobeno tím, že  $[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = 0$ . Tyto vlastní vektory jsme označovali jako  $|j, m\rangle$  a platilo pro ně

$$\hat{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle,$$

kde  $j$  je celé či polocelé číslo a  $m$  probíhá hodnoty  $-j, -j+1, \dots, j$ . Jako příklad jsme uváděli operátor spinu  $S$ , kde  $j = s$  značilo přímo spin částice.

Zajímavý problém vzniká v případě, když máme k dispozici dva nezávislé impulsmomenty  $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$  a  $\hat{\mathbf{J}}^{(2)}$ , které splňují obvyklé komutační relace

$$[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(1)}] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k^{(1)}, \quad [\hat{J}_i^{(2)}, \hat{J}_j^{(2)}] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k^{(2)}.$$

Protože jsou nezávislé, nesmí záležet, v jakém pořadí je měříme, tj. musí spolu komutovat

$$[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(2)}] = 0.$$

Příklad systému se dvěma nezávislými impulsmomenty je systém se dvěma částicemi. Každý z impulsmomentů pak může popisovat spin jedné z částic. Vzniká otázka, jak to vypadá s bázi tohoto prostoru. Vlastní vektory impulsmomentu  $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$  označme  $|j_1, m_1\rangle$ , naopak pro impulsmoment  $\hat{\mathbf{J}}^{(2)}$  máme vlastní vektory  $|j_2, m_2\rangle$ . Pokud by v systému byla jen jedna částice se spinem, který by popisoval operátor  $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$ , báze by byla tvořena vektory  $|j_1, m_1\rangle$ . Nezávislost obou impulsmomentů však znamená, že celý prostor je *direktním součinem* podprostorů, které odpovídají  $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$ , resp.  $\hat{\mathbf{J}}^{(2)}$ . Platí tedy, že celý Hilbertův prostor se dá napsat jako  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ . Znamená to tedy, že bázi tvoří vektory

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle.$$

Pro lepší představu uvažme systém dvou částic se spinem  $\frac{1}{2}$ . Každá částice se může nacházet ve dvou vlastních stavech  $|s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}\rangle, |s = \frac{1}{2}, s_3 = -\frac{1}{2}\rangle$ . Potom celý systém obou částic se může nacházet ve čtyřech stavech

$$\begin{aligned} &|s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = \frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = \frac{1}{2}\rangle, \\ &|s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = \frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\rangle, \\ &|s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = \frac{1}{2}\rangle, \\ &|s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

První stav odpovídá tomu, že první i druhá částice má spin nahoru, atd. Jednoduše řečeno, báze vektory direktního součinu prostorů dostaneme jako součin všech možných kombinací (ve správném pořadí) báze vektorů jednotlivých prostorů.

Otázkou je, jak na tyto vektory působí operátory impulsmomentů první a druhé částice. Odpověď je jednoduchá – na „svoji“ část vektoru stejně jako v případě, kdyby tam žádný druhý impulsmoment nebyl, a na druhou část vektoru působí jako identický operátor. To zní logicky. Měří-li na systému dvou částic spin jedné z částic, tak je mi úplně jedno, v jakém stavu se nachází druhá částice. Přesněji

$$\hat{J}^{(1)} \equiv \hat{J}^{(1)} \otimes \mathbb{I}, \quad \hat{J}^{(2)} \equiv \mathbb{I} \otimes \hat{J}^{(2)},$$

tedy

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(1)2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_3^{(1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= m_1 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}^{(2)2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= j_2(j_2 + 1) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_3^{(2)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= m_2 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \end{aligned}$$

Je dobré také definovat operátory  $\hat{J}_\pm^{(1)}$  a  $\hat{J}_\pm^{(2)}$ , které mají známé vlastnosti

$$\begin{aligned} \hat{J}_\pm^{(1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= \alpha^{(\pm)}(j_1, m_1) |j_1, m_1 \pm 1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_\pm^{(2)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= \alpha^{(\pm)}(j_2, m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2 \pm 1\rangle, \end{aligned}$$

kde  $\alpha^{(\pm)}(j, m)$  jsou koeficienty, jež jste hledali v úloze ke třetímu dílu seriálu

$$\alpha^{(\pm)}(j, m) = \sqrt{j(j+1) - m^2 \mp m}.$$

Jako lehké cvičení můžete dokázat, že operátory

$$\hat{J}^{(1)2}, \quad \hat{J}^{(2)2}, \quad \hat{J}_3^{(1)} \quad \text{a} \quad \hat{J}_3^{(2)}$$

spolu všechny navzájem komutují a tvoří úplnou množinu pozorovatelných na celém prostoru. Vektor  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  je proto plně určen zadáním čísel  $j_1, j_2, m_1$  a  $m_2$ .

Zbývá ještě dodat, kolik vlastně vektorů  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  je, tj. jaká je dimenze příslušného Hilbertova prostoru. Víme, že vektorů  $|j_1, m_1\rangle$  je  $2j_1 + 1$ , vektorů  $|j_2, m_2\rangle$  je  $2j_2 + 1$ . Z toho již jasně plyne, že dimenze celého prostoru je  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

### Celkový impulsmoment

Na celém Hilbertově prostoru má smysl definovat operátor *celkového impulsmomentu*

$$\hat{J} = \hat{J}^{(1)} + \hat{J}^{(2)}.$$

V případě systému dvou spinových částic jsou vlastní čísla tohoto operátoru možnými hodnotami celkového spinu. Jako další jednoduché, byť trochu zdlouhavé cvičení si můžete dokázat, že operátory

$$\hat{J}^2, \quad \hat{J}_3, \quad \hat{J}^{(1)2} \quad \text{a} \quad \hat{J}^{(2)2}$$

spolu také komutují a tvoří také úplnou množinu pozorovatelných. To tedy znamená, že bázi celého prostoru lze vytvořit i z vektorů

$$|j, m, j_1, j_2\rangle,$$

přičemž platí

$$\begin{aligned}\widehat{J}^2|j, m, j_1, j_2\rangle &= j(j+1)|j, m, j_1, j_2\rangle, & \widehat{J}_3|j, m, j_1, j_2\rangle &= m|j, m, j_1, j_2\rangle, \\ \widehat{J}^{(1)2}|j, m, j_1, j_2\rangle &= j_1(j_1+1)|j, m, j_1, j_2\rangle, & \widehat{J}^{(2)2}|j, m, j_1, j_2\rangle &= j_2(j_2+1)|j, m, j_1, j_2\rangle.\end{aligned}$$

Je účelné také definovat posunovací operátory  $\widehat{J}_\pm$ ,

$$\widehat{J}_\pm|j, m, j_1, j_2\rangle = \alpha^{(\pm)}(j, m)|j, m \pm 1, j_1, j_2\rangle.$$

Uvědomme si, že vektor  $|j, m, j_1, j_2\rangle$  již nelze nikterak rozdělit na dvě části. V tomto přístupu popisujeme systém jako celek, ne jako systém dvou nezávislých částic.

Zásadní otázkou je, jak od jednoho popisu přejít ke druhému, tj.

$$j_1, j_2, m_1, m_2, |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle \rightarrow j, m, j_1, j_2, |j, m, j_1, j_2\rangle.$$

Určit vektory  $|j, m, j_1, j_2\rangle$  je poněkud složitější a rozebereme to v dalším paragrafu. Co se týká vlastního čísla  $m$  operátoru  $\widehat{J}_3$ , tak zde je situace jednoduchá. Z definice víme, že platí

$$\widehat{J}_3 = \widehat{J}_3^{(1)} + \widehat{J}_3^{(2)},$$

tedy pro vlastní čísla máme  $m = m_1 + m_2$ .

Pro kvantové číslo  $j$  takto jednoduché pravidlo nemáme. Zde velmi záleží na tom, do jakého směru impulsmomenty  $\widehat{J}^{(1)}$  a  $\widehat{J}^{(2)}$  míří. Velmi vágní tvrzení říká, že pokud mají stejný směr, kvantová čísla  $j_1$  a  $j_2$  se sčítají, tj.  $j = j_1 + j_2$ . Pokud naopak míří opačně, tak se odečítají, a protože  $j$  musí být vždy kladné, máme  $j = |j_1 - j_2|$ . Avšak mohou se složit i jiným způsobem. Dále víme, že  $m = -j, -j + 1, \dots, j$  je celé či polocelé číslo (protože  $m_1, m_2$  jsou celá či polocelá), takže i číslo  $j$  musí být celé či polocelé. Z toho plyne, že pokud skládáme impulsmoment, jemuž odpovídají celá vlastní čísla, s jiným impulsmomentem, kterému odpovídají polocelá, tak celkový impulsmoment musí být polocelý (neb příslušné  $m = m_1 + m_2$  je polocelé). Všechny tyto indicie vedou k závěru, že celkový impulsmoment  $j$  může nabývat hodnot

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|.$$

To tedy znamená, že vektoru  $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$  nelze přiřadit jeden vektor  $|j, m, j_1, j_2\rangle$ , ale že se bude jednat o lineární kombinaci různých vektorů, tj.

$$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} c_j |j, m, j_1, j_2\rangle.$$

Tento vztah zapisujeme ve formálnější podobě

$$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j (j_1, j_2, m_1, m_2|j, m)|j, m, j_1, j_2\rangle,$$

kde jsme přidáním sumy přes  $m$  zahrnuli i vektory, které nesplňují podmínku  $m = m_1 + m_2$ . Logicky pak koeficient u nich stojící bude nulový.<sup>10</sup> Čísla  $(j_1, j_2, m_1, m_2|j, m)$  pak určíme

<sup>10)</sup> Toto (na první pohled) zesložnění neděláme úplně samoúčelně. Koeficienty  $(j_1, j_2, m_1, m_2|j, m)$  mají totiž spoustu pěkných vlastností narozdíl od  $c_j$ .

standardním způsobem jako skalární součin vektoru báze s rozkládaným vektorem

$$(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) = \langle j, m, j_1, j_2 | j_1, m_1 \rangle | j_2, m_2 \rangle$$

a nazýváme je *Clebschovy-Gordanovy koeficienty* (zkráceně C-G). Díky relacím ortogonality platí i opačný vztah

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle.$$

Z předchozího je jasné, že C-G koeficienty jsou nenulové, pokud je splněna tzv. trojúhelníková nerovnost<sup>11</sup> mezi  $j$ ,  $j_1$  a  $j_2$  a zároveň platí  $m = m_1 + m_2$ .

Jako ilustrativní příklad vezmeme systém dvou částic se spinem  $\frac{1}{2}$ , jež jsou ve stavech popsaných vektory  $|j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}\rangle$  a  $|j_2 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle$ . Pro rozklad do báze  $|j, m, j_1, j_2\rangle$  pak můžeme psát

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sum_{j=|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \sum_{m=-j}^j (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | j, m) |j, m, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 0, 0) |0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, 0) |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že C-G koeficient je nula, pokud  $m \neq m_1 + m_2$ . Vidíme, že přechod od báze  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  k bázi  $|j, m, j_1, j_2\rangle$  (či naopak) se prakticky redukuje právě na nalezení příslušných C-G koeficientů.

### Hledání Clebschových-Gordanových koeficientů

Uvedeme nejprve obecný postup a pak ho aplikujeme na jednoduchý případ. Předpokládáme nejprve, že máme systém s kvantovými čísly  $j$ ,  $m$ ,  $j_1$ ,  $j_2$  a ve stavu  $|j, m, j_1, j_2\rangle$ .

1. Pro největší hodnotu  $j = j_1 + j_2$  a maximální možnou hodnotu  $m = j_1 + j_2$  je v rozkladu pouze jeden vektor, odpovídající  $m_1 = j_1$ ,  $m_2 = j_2$  (opět maximálním hodnotám  $m_1$  a  $m_2$ ).

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2, j_1, j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle.$$

Z toho vidíme, že pro příslušný C-G koeficient platí

$$(j_1, j_2, j_1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2) = 1.$$

2. Vztah posunovacích operátorů celého systému a dvou podsystémů je

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2 = \hat{J}_1^{(1)} + \hat{J}_1^{(2)} \pm i\hat{J}_2^{(1)} \pm i\hat{J}_2^{(2)} = \hat{J}_{\pm}^{(1)} + \hat{J}_{\pm}^{(2)}.$$

Zapůsobíme teď operátorem  $\hat{J}_-$  na vektor  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2, j_1, j_2\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |j_1 + j_2, j_1 + j_2, j_1, j_2\rangle &= (\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle, \\ \alpha^{(-)}(j_1 + j_2, j_1 + j_2) |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle &= \\ &= \alpha^{(-)}(j_1, j_1) |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \alpha^{(-)}(j_2, j_2) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle, \end{aligned}$$

<sup>11)</sup> To znamená, že  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ .

tedy

$$\begin{aligned} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle &= \frac{\alpha^{(-)}(j_1, j_1)}{\alpha^{(-)}(j_1 + j_2, j_1 + j_2)} |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \\ &+ \frac{\alpha^{(-)}(j_2, j_2)}{\alpha^{(-)}(j_1 + j_2, j_1 + j_2)} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

Pokud použijeme rozpis pomocí C-G koeficientů, dostaneme

$$\begin{aligned} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle &= (j_1, j_2, j_1 - 1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1) |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \\ &+ (j_1, j_2, j_1, j_2 - 1 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

Porovnáním posledních dvou vztahů lehko určíme příslušné C-G koeficienty.

3. V dalším kroku zapůsobíme opět posunovacím operátorem  $\widehat{J}_-$  na získané vektory a výsledek opět porovnáme s rozpisem do C-G. Takto to budeme dělat znova a znova (v každém kroku snižujeme  $m$  o jednotku), až dospějeme do nejnižšího stavu  $m = -(j_1 + j_2)$ . Rozpis tohoto posledního vektoru do báze  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  má jen jeden člen ze stejného důvodu, jako je to u prvního vektoru (s největším  $m$ ).

$$|j_1 + j_2, -j_1 - j_2, j_1, j_2\rangle = |j_1, -j_1\rangle |j_2, -j_2\rangle.$$

Dalším zapůsobením posunovacího operátoru  $\widehat{J}_-$  se příslušné vektory anulují.

4. Tím jsme vyčerpali všechny koeficienty pro  $j = j_1 + j_2$ . V dalším snížíme o jednotku velikost  $j$ , tedy  $j = j_1 + j_2 - 1$ . Maximální hodnota  $m$  je teď  $m = j_1 + j_2 - 1$ . Situace je zde o trochu komplikovanější než v předchozím případě, protože platí

$$|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle = A |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + B |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle.$$

Máme zde dva neznámé koeficienty  $A$  a  $B$ , které je nutné určit. Jedna podmínka plyne z faktu, že vektor  $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle$  musí být kolmý na všechny ostatní, jinak by  $|j, m, j_1, j_2\rangle$  netvořily bázi. Testovat kolmost na všechny vektory by byl nesmysl a nic by to nedalo kromě jednoho. Onen vyvolený má stejnou hodnotu  $m$ , ale různou hodnotu  $j$ , jedná se o vektor  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle$ . Ten použijeme proto, že jeho rozvoj do  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  obsahuje stejné vektory. Druhá podmínka plyne z normalizovatelnosti vektoru  $|j, m, j_1, j_2\rangle$ . Protože  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  normalizované jsou, dostaneme  $A^2 + B^2 = 1$ .

Tudíž skutečně máme dvě rovnice pro  $A$  a  $B$ . Jakmile známe rozklad počátečního vektoru  $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle$ , určíme příslušné C-G koeficienty a pokračujeme dále působením  $\widehat{J}_-$  jako v předchozím bodu. Opět projdeme celou procedurou až na konec. Ve chvíli, kdy dojdeme k poslednímu vektoru  $|j_1 + j_2 - 1, -(j_1 + j_2 - 1), j_1, j_2\rangle$ , dalším působením posunovacího operátoru opět vektory vymizí. Pro  $j = j_1 + j_2 - 1$  jsme opět tedy dostali rozvoje všech vektorů, a tudíž i všechny C-G koeficienty.

5. A podobně bychom pokračovali dále. Nasadili bychom  $j = j_1 + j_2 - 2$  a vektor s největším  $m$ . Ten by již obsahoval tři členy v rozvoji do  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ . Jednu podmínku bychom dostali opět z normalizovatelnosti vektoru. Další dvě podmínky by pak vycházely z užití kolmosti na dva vektory se stejným  $m$ , tj.

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2, j_1, j_2\rangle, \quad |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2, j_1, j_2\rangle.$$



A tak dále. Tímto způsobem tedy obdržíme všechny C-G koeficienty s daným  $j_1$  a  $j_2$ .

Ještě je nutné uvést jednu poznámku. Občas se můžeme dostat do problémů se znaménkem u konstant  $A, B (C, \dots)$ , které nemusí být z našich podmínek plně určeno. Užívaná konvence pro C-G koeficient je

$$(j_1, j_2, j_1, j - j_1 | jj) > 0.$$

Vraťme se teď opět k příkladu dvou částic se spinem  $\frac{1}{2}$  a dořešme ho do konce. Máme tedy  $j_1 = \frac{1}{2}$  a  $j_2 = \frac{1}{2}$ . Postupujme přesně podle uvedené procedury.

1. Vezměme nejprve  $j = j_1 + j_2 = 1$  a  $m = j = 1$ . Příslušný C-G koeficient potom je

$$|1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 1) = 1.$$

2. Zapůsobením  $\hat{J}_-$  dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= (\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ \alpha^{(-)}(1, 1) |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \alpha^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \\ \sqrt{2} \cdot |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Rozpis vektoru  $|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  pomocí C-G koeficientů má podobu

$$\begin{aligned} |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sum_{m_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 | 1, 0) |\frac{1}{2}, m_1\rangle |\frac{1}{2}, m_2\rangle = \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, 0) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 0) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Porovnáním obou vztahů získáme sadu koeficientů

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Vezmeme teď získaný vektor

$$|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$$

opět na něj zapůsobíme operátorem  $\hat{J}_-$  a dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)}(1, 0) |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2} \cdot \alpha^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \\ \sqrt{2} \cdot |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2} \cdot |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Z toho získáme další C-G koeficient

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, -1) = 1,$$

což jsme ale mohli vytušit i bez výpočtu.

4. Nasadíme teď vektor pro  $j = j_1 + j_2 - 1 = 0$ . Největší možné  $m$  (zároveň jediné) je  $m = 0$ . Rozpis pro něj má podobu

$$|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = A|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + B|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Kolmost na vektor  $|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  vede ke vztahu

$$0 = \langle 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = A + B,$$

kde jsme užili toho, že vektory  $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$  jsou na sebe kolmé. Normalizace dává podmínku  $A^2 + B^2 = 1$ . Řešení těchto dvou rovnic je  $A = \pm 1/\sqrt{2}$ ,  $B = \mp 1/\sqrt{2}$ . Znaménko určíme za chvíli. Rozvoj pomocí C-G dává

$$|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 0, 0) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Po porovnání a zohlednění znaménkové konvence dostaneme

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tímto je procedura výpočtu C-G koeficientů u konce.

Můžeme tedy již přesně určit rozvoj dvoučásticového stavu, který jsme na začátku zadali.

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Na otázku, s jakou pravděpodobností bude mít tento systém celkový spin 1, bychom tedy odpověděli

$$p = |\langle 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

### Úloha V. S ... spin-orbitální interakce

Elektron je částice se spinem  $\frac{1}{2}$  popsaným operátorem  $\hat{\mathbf{S}}$ . Kromě spinu však může mít i orbitální moment hybnosti popsaný operátorem  $\hat{\mathbf{L}}$  a kvantovým číslem  $l$ . Celkový impulsmoment částice je pak definován jako

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}}.$$

Předpokládejte, že se elektron nachází v druhém excitovaném stavu ( $l = 2$ ).

- Určete možné velikosti celkového impulsmomentu  $j$  a kolikrát jsou tyto hodnoty degenerovány, tj. kolik vektorů  $|l, l_3\rangle|s, s_3\rangle$  odpovídá danému  $j$ .
- Pokud jsou projekce na třetí osu  $s_3 = \frac{1}{2}$  a  $l_3 = -1$ , stanovte, jaký celkový spin  $j$  a jeho projekci  $j_3$  na třetí osu můžeme naměřit, a určete příslušné pravděpodobnosti.

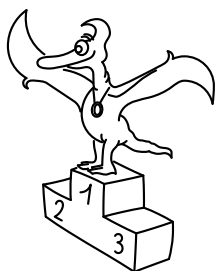
Zajímavým jevem je samointerakce elektronu sama se sebou, a to právě prostřednictvím jeho impulsmomentů. Přesně řečeno spin interaguje s orbitálním momentem hybnosti. Tato spin-orbitální interakce je popsána hamiltoniánem

$$\hat{H} = a(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}),$$

kde  $a$  je konstanta a tečka představuje skalární součin dvou vektorů<sup>12</sup>. V důsledku této interakce se energetické hladiny elektronu rozštěpí v závislosti na jeho spinové konfiguraci.

- Pokud je energie elektronu bez spin-orbitální interakce  $E_0$  a orbitální moment hybnosti  $l = 2$ , určete vzdálenost rozštěpených energetických hladin.
- S jakou pravděpodobností tyto energie naměříme?

<sup>12)</sup> Operátory  $\hat{\mathbf{S}}$  a  $\hat{\mathbf{L}}$  jsou samozřejmě i vektory.



## Pořadí řešitelů po III. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	5	4	8	6	36	100	101
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	4	5	4	5	4	8	6	36	101	94
2. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	4	2	4	5	4	6	1	26	76	71
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	–	4	–	4	8	6	26	86	69
4. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	4	5	5	3	4	8	6	35	97	56
5. <i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	6	–	–	4	8	6	28	98	55
6.–7. <i>František Přibyl</i>	G Milevsko	4	2	2	2	3	2	2	17	49	48
<i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	4	5	4	–	4	–	5	22	96	48
8. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	0	79	42
9. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	2	3	–	4	3	–	16	75	39
10. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	4	–	4	2	3	8	–	21	77	37
11. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	81	29
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	64	27
13. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	100	23
14. <i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	4	–	4	48	21
15. <i>Jakub Hromádka</i>	G Frýdlant nad Ostravicí	–	–	–	–	3	–	–	3	79	19
16. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
17. <i>Aleš Pilgr</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	83	10
18. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	58	7
19. <i>Martin Judiny</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	3	–	–	2	–	5	42	5
20. <i>Matyáš Řehák</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
21.–22. <i>Pavel Kunšta</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	22	2

### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	5	4	8	6	36	100	101
1. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	1	3	–	4	2	–	10	63	46
2. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	3	1	3	6	0	13	52	44
3. <i>Jana Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	3	–	3	3	–	9	68	32
4. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	2	2	–	4	–	–	8	62	8
5. <i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	28	5
6.–7. <i>Lumír Gago</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	67	4
<i>Tomáš Kohlschütter</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	40	4
8. <i>Vojtěch Mrázek</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	5	4	8	6	36	100	101
1. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	4	6	4	5	4	8	6	37	90	91
2. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	2	–	–	3	7	–	16	82	64
3. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	4	3	4	5	4	–	4	24	81	62
4. <i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	4	5	3	5	4	–	–	21	82	59
5. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	4	–	4	5	4	–	–	17	88	58
6. <i>Jakub Michálek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	90	35
7. <i>Pavel Trudič</i>	SPŠ Hronov	1	–	3	–	3	6	–	13	76	34
8. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	0	1	1	1	3	–	–	6	45	29
9. <i>Airidas Korolkovas</i>		4	3	4	3	4	8	–	26	87	26
10.–11. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	4	–	–	–	3	6	–	13	75	24
<i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	2	1	5	–	–	–	12	73	24
12. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	88	22
13. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	4	–	–	–	–	–	–	4	69	18
14. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	77	17
15.–16. <i>Jakub Marian</i>	G Litoměřická Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	52	12
<i>Pavel Motal</i>	SPŠ a SOU Kuřim	–	–	–	–	3	–	0	3	28	12
17. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	5	4	8	6	36	100	101
1.–2. <i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	3	3	2	2	–	8	–	18	56	48
<i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	3	5	4	5	4	–	6	27	94	48
3. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	1	–	4	–	3	8	–	16	53	42
4. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	2	1	–	4	2	–	13	51	36
5. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	0	3	–	4	2	–	11	44	31
6.–7. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	–	3	–	3	2	–	12	69	25
<i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	–	3	–	–	3	81	25
8. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠS Vsetín	1	–	–	2	–	–	–	3	69	20
9. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	3	–	–	3	75	18
10. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	3	–	3	50	14
11. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	4	–	–	4	69	11
12. <i>Lenka Bendová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	83	10
13. <i>Radek Kříček</i>	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	9
14. <i>Dmytro Mishchuk</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	22	6
15.–16. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.