

Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou autorská řešení druhé série společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmkoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentuální zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou.

Vaši organizátoři



Zadání III. série



Termín odeslání: 24. ledna 2011

Termín doručení: 26. ledna 2011

Úloha III.1 ... rozcvička

a) *Dr. Nec*

Terka byla o víkendů tahat dřevo. Objem dřeva se měří dvěma způsoby: na kubíky (1 m³ dřevo-hmoty bez vzduchových mezer mezi kládami) a na plnometry (1 m³ i s mezerami). Naleznete převodní vztah mezi těmito dvěma jednotkami (tj. kolik plnometrů odpovídá jednomu kubíku) v závislosti na poloměru klád, ze kterých se skládá hranice. Klády považujte za dokonale hladké válce, které se skládají na sebe.

b) *bublifuk*

Foukáme do mýdlového povrchu na počátku kruhového tvaru tak, aby měl tvar kulového vrchlíku o poloměru r . Odhadněte, jakou rychlostí do něj musíme foukat?

Úloha III.2 ... zasekanej!

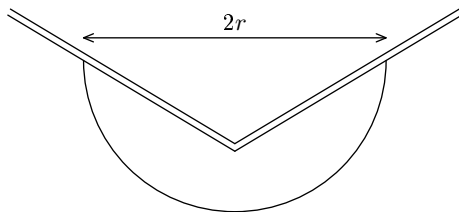
Jistě jste si všimli, že při podélném parkování zpátečkou se auto může vejít i do celkem malé mezery. Mějme auto délky L , šířky d se vzdáleností kol l . Kola se mohou otočit maximálně o α stupňů (tzv. „plný rejď“). Do jak velké mezery budeme schopni zaparkovat při použití zpátečky? A při parkování popředu? Jaká je ideální parkovací strategie? Auto musí být samozřejmě dokonale zarovnané v řadě (tj. rovnoběžně s chodníkem ve vzdálenosti maximálně d_0 od chodníku) a při parkovacím manévru se auto smí pohybovat pouze jedním směrem, tzn. buď dopředu nebo dozadu.

Úloha III.3 ... čičač Aleš

Aleš má na koleji na poličce neprodyšně uzavřenou válcovou průhlednou nádobu s toluenem, z 90 % plnou. Aleš si svůj toluen pochopitelně bedlivě střeží. Když se po víkendu vrátil na kolej, všiml si, že se hladina toluenu v nádobě o kousíček snížila a okamžitě obvinil spolubydliče šnEka z krádeže. Až posléze si uvědomil, že o víkendu začali topit a teplota v ubikaci tudíž stoupla o 20°C. Rozřešte tento detektivní příběh a zjistěte, zda šnEk skutečně čičal toluen. Jinak řečeno: Jak velký pokles hladiny mohla způsobit změna teploty? Mohl by si takového poklesu Aleš vůbec všimnout? K řešení lze použít data uvedená na [http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_(data_page)).

Úloha III.4 ... rumové ovoce

Uvažujme miskou, do které položíme dvě spojená brčka, která mají tvar písmene V a poloměr r . Brčko se smí dotýkat pouze okrajů mísky. Určete nejprve podmínku stability a potom vypočítejte periodu kmitů brčka v souměrné poloze.



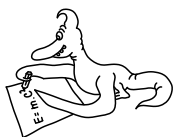
Obr. 1. Miska s brčky

Úloha III.P ... wassermánie

Voda má spoustu zajímavých, výjimečných a anomálních vlastností ve srovnání s jinými kapaliny. Podrobný výčet těchto anomálií lze nalézt na stránce <http://www.btinternet.com/~martin.chaplin/anmlies.html>. Zamyslete se, jaký tyto anomálie mají význam pro život na zemi, člověka a také techniku.

Úloha III.E ... papír

Změřte, jak závisí průsvitnost papíru na úhlu, pod kterým je sklopený. Máme soustavu oko papír žárovka v jedné přímce. Měříme závislost intenzity prošlého světla na úhlu stočení papíru vzhledem k ose aparatury.

**Řešení II. série****Úloha II.1 ... rozcvička** (4 body; průměr 1,05; řešilo 19 studentů)**a) Jakobova snídaně**

Jakub jí k snídani cereální kuličky o hustotě ρ , které si sype do mísky ve tvaru komolého kužele (horní podstava má poloměr R , spodní r a výška je l), ve kterém má do výšky h nalité mléko. Koeficient zaplnění prostoru koulemi je κ . Kolik nejvíce kuliček může do mísky nasypat?

b) magnetický monopol

Máme velkou plechovou desku, kterou zmagnetujeme tak, že na její horní ploše bude severní magnetický pól (a na dolní ploše ten jižní). Vylisujeme z ní dvě stejné polokoule. Na vnitřní straně obou polokoulí je teď jižní a na vnější severní pól. Polokoule k sobě přiblížíme tak, že vyrobíme celou kouli. Ta má nyní venku pouze severní pól, takže se chová jako magnetický

monopól. A nebo ne? Co nám vytvoření takovéto koule zabrání?

Kuličky ke snídani rozsypal Jakub, magnety zamotaly hlavu brněnským teoretikům.

Jakubova snídaně

Uvažujme, že pokud kuličky dosáhnou okraje misky, tak se rozsypou a pokud okraje dosáhne mléko, tak se rozlije. Označme m hmotnost kuliček, kterou hledáme. Dále platí

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{l}{R-r} (R^3 - r^3),$$

$$V_h = \frac{\pi}{3} \frac{h}{r_h - r} (r_h^3 - r^3),$$

kde V je celkový objem misky, V_h je objem mléka a $r_h = r + h(R-r)/l$ je poloměr hladiny mléka.

Obecně mohou nastat tři případy:

a) Hustota kuliček je menší než hustota mléka a kuličky plavou na mléku.

Objem misky je rozdělen na tři části. Dole je jen mléko, uprostřed je mléko s kuličkami a nvrchu jsou jen kuličky. Označme V_m objem kde je jen mléko, V_{km} objem kde je mléko s kuličkami a V_k objem kde jsou jen kuličky. Dále označme ϱ_m hustotu mléka a ϱ_k hustotu kuliček a nakonec m jejich hmotnost. Pak platí lineární soustava rovnic o čtyřech neznámých

$$m = \varkappa V_{km} \varrho_m, \quad (1)$$

$$m = \varkappa (V_{km} + V_k) \varrho_k, \quad (2)$$

$$V_h = (1 - \varkappa) V_{km} + V_m, \quad (3)$$

$$V = V_m + V_{km} + V_k, \quad (4)$$

kde V je objem celé misky a V_h je celkový objem mléka. Rovnice (1) vychází z Archimedova zákona, (2) vyjadřuje celkovou hmotnost kuliček, (3) vyjadřuje celkový objem mléka a (4) je celkový objem misky. Vyřešením této soustavy získáme

$$m = \frac{\varkappa \varrho_m \varrho_k (V - V_h)}{\varrho_m - (1 - \varkappa) \varrho_k}.$$

Podmínka plavání kuliček je ověřitelná nerovností $m < V \varrho_k \varkappa$.

b) Kuličky narazily na dno a přepadávají kuličky.

Kuličky zabírají celý objem misky, mléko je v prostoru mezi kuličkami. Pak platí

$$m = V \varrho_k \varkappa.$$

Podmínka pro náraz na dno je

$$m > \frac{\varkappa V_h \varrho_m}{1 - \varkappa},$$

kteřá vychází z archimedova zákona, kde $V_h/(1 - \varkappa)$ je objem, ve kterém se nachází mléko.

c) Hustota kuliček je větší než hustota mléka a mléko přeteče.

Kuličky zabírají objem velikosti $V - V_h$, a tedy

$$m = \varrho_k (V - V_h).$$

Podmínka pro přetečení mléka je $V_h > (1 - \varkappa)V$, tedy mléka je více, než by se vešlo do mezer mezi kuličky.

Pro nalezení správného výsledku pro konkrétní hodnoty by tedy bylo potřeba prověřit všechny tři možnosti a zkontrolovat, které jsou splněny podmínky.

Magetický monopol

Jedna z Maxwellových rovnic nám říká, že tok magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou je nulový. Matematickou symbolikou lze zapsat

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

kde \mathbf{B} je pole magnetické indukce, S je uzavřená plocha a $d\mathbf{S}$ je vektor velikosti elementu plochy s normálovým směrem.

To ovšem platí za předpokladu, že neexistuje magnetický monopol. Kdyby existoval, platila by obdoba Gaussova zákona elektrostatiky i pro pole magnetické: Tok magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou je přímo úměrný magnetickému náboji uvnitř plochy. Zapsáno

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = kM,$$

kde k je konstanta úměrnosti a M je celkový magnetický náboj uvnitř plochy.

Žádná z polokoulí magnetický náboj nemá a proto uzavřeme-li libovolnou z nich do plochy, magnetický tok touto plochou bude nulový. Z principu superpozice musí platit, že magnetický tok plochou, kde jsou uzavřené obě polokoule musí být roven součtu toků plochou ve chvíli, kdy obsahuje pouze první a pouze druhou polokouli. Sečtením dvou nul získáme znovu nulu a výsledný tok je zase nulový. Vidíme tedy, že se magnetické účinky polokoulí vyruší a získáme magneticky neutrální kouli.

Jinými slovy: bez monopolu monopol nevytvoríš.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha II. 2 ... Lennard-Jonesův potenciál (4 body; průměr 2,19; řešilo 16 studentů)

Mezi dvěma atomy inertního plynu působí tzv. Lennard-Jonesův potenciál

$$U(R) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right).$$

Předpokládejte, že pohyb atomů je omezen na přímku. Určete rovnovážnou polohu, aniž byste derivovali! Význam konstant σ a ε bude podrobněji vysvětlen ve vzorovém řešení.

Jakub si rád hraje s atomy

Lennard-Jonesův potenciál je zjednodušeným matematickým modelem chování dvou částic plynu. Chování částic závisí na jejich vzdálenosti R a modeluje se pouze v jedné dimenzi.

Pro lepší představu můžeme vidět na obrázku, jak vypadá závislost potenciální energie na vzdálenosti mezi těmito částicemi. K určení rovnovážné polohy tedy vlastně musíme zjistit, kde je minimum této křivky, kterou můžeme popsat rovnicí

$$U(R) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right). \quad (5)$$

Minimum bez derivování můžeme zjistit pomocí upravení na čtverec.

Pro větší přehlednost si nejprve zavedeme substituci

$$A = \frac{2\sigma^6 \sqrt{\varepsilon}}{R^6}.$$

Pravou stranu rovnice (5) pak můžeme přepsat jako

$$U(R) = A^2 - 2A\sqrt{\varepsilon} = (A - \sqrt{\varepsilon})^2 - \varepsilon. \quad (6)$$

Pro doplnění na čtverec jsme přičetli a odečetli ε (čímž se hodnota nezmění) a již vidíme, že kvadratický člen bude $(A - \sqrt{\varepsilon})$ a konstantní $-\varepsilon$. Z tohoto tvaru je již patrné, že minimum má potenciál v bodě $A = \sqrt{\varepsilon}$, tj.

$$r_0 = \sigma \sqrt[6]{2}.$$

Hloubka tohoto minima je rovna

$$U(r_0) = -\varepsilon.$$

Vypočteme-li $U(\sigma) = 0$. Nyní je již znám význam konstant σ a ε . σ je vzdálenost, které odpovídá nulová energie a ε je hloubka potenciálové jámy.

K vyřešení úlohy můžeme použít i jiný obecnější postup. Budeme zkoumat rovnici $U(R) = U_0$ a hledat U_0 takové, aby tato rovnice měla právě jeden kořen. Tento je extrémem a jemu odpovídající konstanta U_0 jeho hodnotou.

Ukažme si tento postup v praxi. Vyjděme z rovnice (6).

$$A^2 - 2A\sqrt{\varepsilon} - U_0 = 0.$$

Tato rovnice bude mít jeden kořen, právě tehdy pokud diskriminant $D = 0$, tj.

$$D = 4A^2\varepsilon + 4A^2U_0 = 0,$$

toto je splněno pro $U_0 = -\varepsilon$. Dále pro jediný kořen této rovnice platí

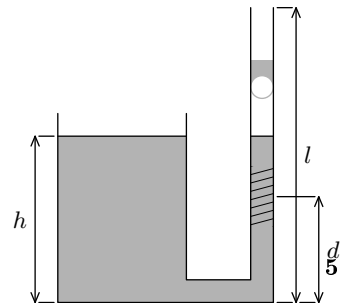
$$A = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{2} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Tento výsledek se shoduje s výsledkem uvedeným výše.

Lada Peková
lada@fykos.cz

Úloha II. 3 ... překapávač (4 body; průměr 2,25; řešili 4 studenti)

Lukáš si k psaní protokolů z praktika vařil kávu a mírně si upravil kávovar. Ke dnu nádoby přidělal zahnutou trubičku, na kterou namotal topnou spirálku. Spirálka byla ve výšce d nade dnem nádoby (viz obrázek), hladina vody ve výšce h . Parametry trubičky a spirálky jsou právě takové, aby pára vzniklá varem vody přiváděné z rezervoáru v nádobce vytlačovala vodu nad sebou nahoru. Spočítejte výkon, který musíme dodávat do spirálky, aby z ústí trubičky ve výšce l



Obr. 2. Překapávač

vytékala voda. Jaká je účinnost takovéhoho tepelného stroje?
(4 body) Z nudy zkoušel Lukáš.

Během výroby kávy se bude v trubici v blízkosti spirálky odpařovat voda, a takto vzniklá vodní pára bude vytlačovat nad sebe vodu, která pak bude vytékat z kávovaru. Nad spirálkou bude tedy směs vody a vodní páry.

V trubici musí nastat rovnost hydrostatických tlaků. Označme ρ_s hustotu směsi vody a vodní páry nad spirálkou a jako ρ_v hustotu vody. Platí

$$(h - d)\rho_v g = (l - d)\rho_s g.$$

Označme ΔV objem směsi páry a vody, která vyteče za čas Δt . Hmotnost vyzdvižené směsi nechť je Δm . Nyní zanedbáme hmotnost páry v kapiláře. Označíme-li ΔV_v objem vody a ΔV_p objem páry; $\Delta V = \Delta V_p + \Delta V_v$, dostáváme

$$\Delta V_v = \Delta V \frac{h - d}{l - d}, \quad (7)$$

$$\Delta V_p = \Delta V \left(1 - \frac{h - d}{l - d}\right) \quad (8).$$

Nyní se zamyslíme, co se stane, když ohříváme vodu spirálkou. Za krátký časový úsek Δt se odpaří voda o hmotnosti $\Delta V_p \rho_p$ a z ústí trubičky vyteče ΔV_v vody. To nám umožňuje vypočítat dodávané teplo, které je určené skupenským teplem L

$$\Delta Q = L \Delta V_p \rho_p.$$

Nyní dosadíme za ΔV_p a ΔV ze vztahů (7) a (8)

$$\Delta Q = L \rho_p \left(1 - \frac{h - d}{l - d}\right) \frac{l - d}{h - d} \Delta V_v.$$

Nyní celý výraz na pravé straně rozšíříme $g \rho_v (l - h) / \Delta t$, protože celkový výstupní výkon je $\Delta m_v g (l - h) / \Delta t$. Výstupní výkon je roven energii, kterou získáme na vyzvednutí vody o hmotnosti Δm_v z výšky h do výšky l za čas Δt . Proto platí

$$P_{\text{in}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{L \rho_p}{\rho_v g (l - h)} \left(1 - \frac{h - d}{l - d}\right) \frac{l - d}{h - d} P_{\text{out}}.$$

Algebraickými úpravami dostáváme

$$P_{\text{out}} = \frac{\rho_v g (h - d)}{L \rho_p} P_{\text{in}}.$$

Účinnost je definovaná jako využitelná energie ku celkové energii. Platí tedy

$$\eta = \frac{\rho_v g (h - d)}{L \rho_p}.$$

Ještě je potřeba vypočítat, čemu se rovná ρ_p . Voda se vypařuje za každé teploty. Var však nastane tehdy, pokud se tlak nasycených vodních par rovná tlaku okolního vzduchu. Proto platí $\rho_p = p_a M_{\text{H}_2\text{O}} / M_{\text{vzd}_\text{uch}}$, kde M_x značí molární hmotnost látky x . Tento fakt vychází ze stavové rovnice ideálního plynu. Celková účinnost je směšná. Dosadíme-li $h - d = 10 \text{ cm}$, $L = 2,25 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, dostáváme $\eta = 0,05 \%$.

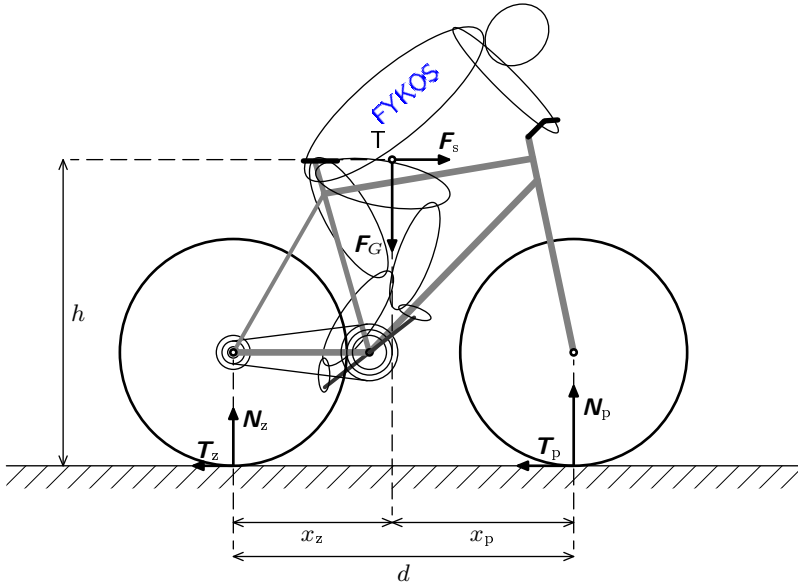
Petr Ryšavý
petr@fykos.cz

Úloha II.4 ... nemyslíš, zaplatíš (4 body; průměr 1,54; řešilo 13 studentů)

Za jakých podmínek dojde k zablokování a smýkání předního kola při brzdění, aniž bychom přeletěli přes řídítka? Jaký na to má vliv brzdění zadním kolem?

Silniční lišaj si pořídil Lukáš.

Soustavu cyklisty a kola budeme považovat za tuhé těleso (tzn. vzdálenosti jednotlivých bodů tělesa jsou s časem konstantní) charakterizované třemi body – styčné body předního a zadního kola s podložkou (jejichž vzdálenost je d) a poloha těžiště T . Písmeno x_p značí vodorovnou vzdálenost těžiště a dotyku předního kola. Sledujte obrázek 3.



Obr. 3. Jízdní kolo s cyklistou a síly na něj působící při brzdění

Celá soustava se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pokud začneme brzdit se zrychlením a bude vztažná soustava spojená s cyklistou neinerciální a při popisu pohybu budeme muset uvažovat setrvačné síly.

Aby cyklista nepřepadl, musí být celkový moment sil na něj působících nulový. Za osu otáčení si zvolíme bod styku předního kola s vozovkou. Můžeme z rovnováhy momentů určit mezní zrychlení, při kterém ještě přes řídítka cyklista nepřeletí (v tomto případě bude normálová složka působící na zadní kolo nulová – než přeletí musí se nejprve odlehčit zadní kolo). Na obrázku si můžete prohlédnout síly, které na celou soustavu působí, pak už jsou jejich momenty

zřejmé

$$x_p F_G - h F_S - d N_z = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{mez} = \frac{g x_p}{h}, \quad (9)$$

kde F_G je tíhová síla určená celkovou hmotností m kola a cyklisty, $F_S = ma$ je síla setrvačná způsobená právě zrychlením a .

Nyní mohou nastat dva případy závislé na hodnotě součinitele smykového tření s vozovkou. Buď budeme schopni dosáhnout a_{mez} brzděním přední brzdou bez prokluzování a nebo již při zrychlení $a < a_{mez}$ dojde ke smyku. Abychom to mohli posoudit, je třeba si napsat vztah určující velikost třecí síly mezi pneumatikou a vozovkou.

Nejdříve budeme muset určit, jaký je normálový tlak na jednotlivá kola. Použijeme první a druhou impulsovou větu

$$\begin{aligned} x_p F_G - h F_S - d N_z = 0 & \Rightarrow N_z = \frac{x_p}{d} mg - \frac{h}{d} ma, \\ N_p = \frac{x_z}{d} mg + \frac{h}{d} ma. & \end{aligned} \quad (10)$$

Pro třecí sílu působící na přední kolo platí

$$T_p = ma \leq N_p f \quad \Rightarrow \quad f \geq \frac{ma_{mez}}{N_p},$$

aby nedocházelo ke smýkání, kde N_p značí hodnotu normálové složky tíhy celé soustavy na předním kole. Dosadíme-li za N_p ze vztahu (10), můžeme vyjádřit zrychlení a

$$a \leq \frac{g x_z f}{d - h f}.$$

Za předpokladu, že součinitel smykového tření je dostatečně velký, je vždy možné dosáhnout většího zrychlení než a_{mez} . Potom nastane nerovnováha momentů sil a cyklista přepadne přes řídítka. Tento jev může nastat pro

$$\begin{aligned} \frac{g x_z f}{d - h f} = a \geq a_{mez} = \frac{g x_p}{h}, \\ f > \frac{x_p}{h}. \end{aligned} \quad (11)$$

Pokud součinitel smykového tření bude menší, než určuje podmínka (11), dostane se přední kolo do smyku dříve, než dosáhneme mezního zrychlení a_{mez} . Cyklista již více brzdit nemůže – přední kolo se neotáčí. A právě v ten okamžik bude zajímavé začít brzdit zadní brzdou (zrychlení cyklisty je menší než mezní zrychlení a tedy normálová složka tíhy N_z v místě styku zadního kola a vozovky není rovna nule).

Uvažujme maximální dosažitelné zrychlení. Toho dosáhneme, pokud budeme brzdit s použitím obou brzd. Pro zrychlení platí

$$ma = mgf.$$

Dosadíme-li za maximální zrychlení a_{mez} z (9), dostáváme podmínku pro přepadnutí

$$f > \frac{x_p}{h},$$

což je shodou okolností stejný výsledek, jako při brzdění pouze přední brzdou. Bude-li splněna tato podmínka, může vždy dojít k přepadnutí.

Z tohoto vyplývá, že brzdění zadní brzdou nemá vliv na přepadnutí; má vliv jenom na brzdnou dráhu.

A nakonec, pokud bude součinitel smykového tření nabývat hodnot

$$f < \frac{a_{mez}}{g} = \frac{b}{h},$$

dojde vždy pouze ke smyku a cyklista přes řídítka nikdy nepřepadne.

Nyní je ovšem zajímavé zamyslet se nad rovnováhou cyklisty. Pokud dojde vždy ke smyku, cyklista může zablokovat obě dvě kola a nic se nezmění (bude pouze zpomalovat úměrně velikosti třecí síly). Rovnováha na kole je ovšem způsobena tím, že se kola otáčejí. Jsou to vlastně rotující setrvačníky, které když rotují, tak se „snaží“ udržet osu rotace ve stejném směru vůči inerciálnímu systému (pokud je výsledný moment vnějších sil nulový, jinak působí momentem opačným než moment vnějších sil – tím je způsobena například precese), tedy nám pomáhají udržet na kole rovnováhu. Pokud by se kola netočila, s velkou pravděpodobností cyklista spadne na bok.

Z toho plyne jediné poučení – i když myslíš, tak zaplatíš, ale aspoň si můžeš vybrat kolik!

Tereza Jeřábková
terkaj@fykos.cz

Úloha II. P ... šmoulové a Darth Vader (5 bodů; průměr 3,06; řešilo 18 studentů)

Po nadýchání se helia se člověku mění hlas tak, že mluví jako šmoula. Stejně to funguje, nadýcháte-li se vodíku (kuřáci, pozor!). Ale dá se dosáhnout i změny na hlas podobný Darthu Vaderovi, nejznámějším médiem je fluorid sírový. Jak funguje změna hlasu? Pokuste se ji kvantitativně odhadnout.

U chemiků sebral Michal.

Nejprve si povíme něco o tvorbě hlasu – kde a jak vzniká, a to nám následně pomůže při úvaze, jak dochází ke šmoulovskému efektu.

Základní vlastnosti lidského hlasu jsou dány fyziologií hlasového ústrojí. Význam má především délka hlasivek (u žen se udává pro soprán 14 až 19 mm, u mužů pro bas 24 až 25 mm); čím jsou hlasivky kratší, tím rychleji kmitají a běžný mluvený hlas je vyšší. Intenzita práce hlasivek je mimořádně velká. I když u velmi hlubokého hlasu je vyluzovaná frekvence jen 50 Hz, ženské vysoké hlasy však dosahují až 480 Hz. Dále hlas vycházející z hlasivek nemá barvu lidského hlasu. Charakteristické znění, individuální pro jednotlivce, získává až průchodem nadhrtanovými prostory – rezonátory, v nichž se mění některé ze svrchních tónů základního hlasu. Na konečném efektu se podílí i rezonance celé lebeční dutiny a lícních kostí. Změnou postavení rtů, jazyka, hrdla je možno barvu hlasu modifikovat. Samotný hlas pak vzniká tak, že proud vzduchu z plic rozechvívá sevřené hlasivky, čímž vznikají zvuky o různých kmitočtech.

Obecně se dá říci, že hlasivky vydávají jednak jeden konkrétní tón a mimo toho ještě celé spektrum vyšších tónů. A v tom je právě ten trik. Základní frekvence řeči je totiž nezávislá na tom, zda testovaná osoba dýchá ve vzduchu nebo v heliu – hlasivky totiž kmitají v obou případech se stejnou frekvencí. Z hlasivek se ozývá základní tón, ale již zmíněné spektrum vyšších tónů se chová ve vzduchu a v heliu odlišně. V dutinách vyplněných vzduchem zesílí určité frekvence a v dutinách s heliem zase jiné – vyšší frekvence. A proč právě vyšší? Rychlost šíření zvuku v heliu je přibližně třikrát tak větší než ve vzduchu. Tyto vyšší frekvence pak

mění náš pocit z toho, jaký hlas slyšíme, tedy mění barvu a artikulaci, ale nemění základní tón!

Chcete-li si doma zkusit, že to tak opravdu je, navrhuji následující experiment: Sežeňte si heliový balonek a nějaký dechový nástroj – např. flétnu, trubku apod., který nám poslouží jako jakýsi rezonátor. Jednoduše na něj zahrajeme několik základních intervalů, načež si dýchneme helia (experimentujte opatrně, prosím!). Co se stane: Tóny se posunou někam úplně jinam než jsme zvyklí, budou vyšší, přičemž se však intervaly zachovají! Pro přehledné vyčíslení se dají využít počítačové programy nebo osciloskop, ale myslím si, že pro názornost toto bohatě stačí.

Co se změny hlasu na Darth Vadera týče, neměli jsme příležitost experimentovat, neboť se fluorid sírový nedá sehnat v menším balení než 10 kg. Ale princip je obdobný jako u helia, jen uvažujeme tak, že spektrum vyšších tónů doplňující základní tón se neozve jako vyšší, ale nižší. Rychlost šíření zvuku ve fluoridu sírovém je totiž o něco menší než ve vzduchu.

Zuzana Dočekalová
zuzka@fykos.cz

Úloha II. E ... Jin a Young (8 bodů; průměr 4,00; řešilo 10 studentů)

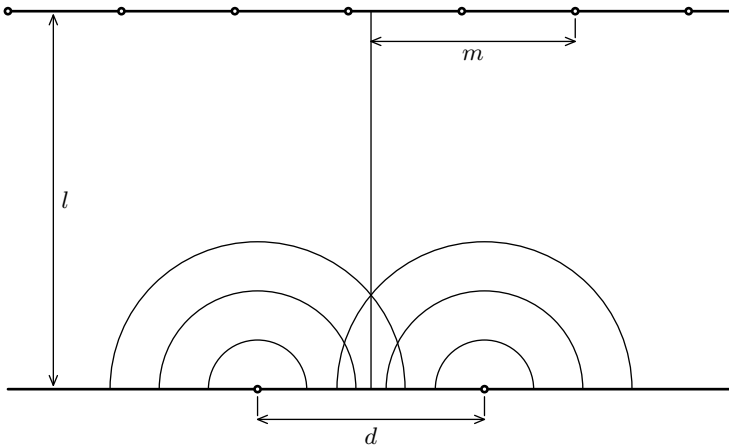
Pravděpodobně jsme již všichni slyšeli o dvoušterbinovém Youngově experimentu. Zkoušel si ale někdo z Vás podomácku „vyrobit“ interferenční proužky na stínítku osvětleném dvěma šterbinami? K optickému Youngově pokusu existují i mechanická analogie, kdy sledujeme skládání dvou vlnění na vodě, nebo akustická analogie, kdy se skládají dvě zvukové vlny. Ve všech třech případech je možné zkoumat interferenční obrazec vznikající v určité rovině. Pokuste se realizovat jeden nebo i více z uvedených třech pokusů a získat tak interferenční obrazec. Poté určete vlnovou délku, případně rychlost šíření vlnění. Uvitáme fotodokumentaci.

Pozdrav ze Španěl posílá Mára.

V roce 1801 Thomas Young experimentálně ukázal, že světlo je vlna. Demonstroval, že světlo vykazuje interferenci stejně jako vodní vlny, zvukové vlny a všechny ostatní typy vln. Na obrázku je jedno z možných uspořádání Youngova experimentu.

Teorie

Monochromatický, koherentní zdroj záření jsme umístili za přepážku se dvěma šterbinami o zanedbatelné šířce. Podle Huyghensova principu se každý bod, tedy i šterbiny, které v důsledku zanedbatelné šířky můžeme považovat za body, stávají zdroji záření. Za přepážkou záření z dvou nově vzniklých zdrojů interferuje a na stínítku ve vzdálenosti l vzniká interferenční obraz maxim a minim.



Obr. 4. Schéma experimentu

Zaměříme se na mechanické analogie a to konkrétně na interferenci vln na vodní hladině a interferenci zvuku. V klasickém pokusu se při odvozování vzdáleností maxim, resp. minim, může v případě kdy $l \gg d$ použít pro úhel φ sevržený rovinou clony a bodem na stínítku aproximace $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \varphi$. Tento předpoklad, však v uspořádání, které je popsáno níže nelze použít a proto vyjdeme ze vztahu

$$\sqrt{l^2 + \left(m_k + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(m_k - \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{2k-1}{2}\lambda,$$

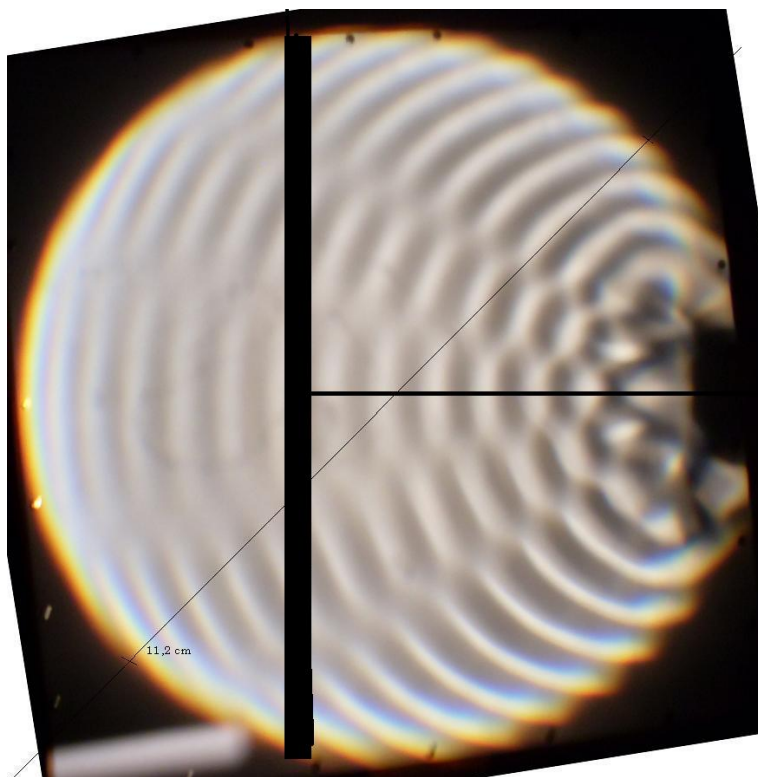
kde m je vzdálenost minima od osy aparatury a k je „pořadové číslo minima“ směrem od středu.

Pro vlnovou délku, jejíž hodnotu chceme změřit, dostáváme vztah

$$\lambda = \frac{2}{2k-1} \sqrt{l^2 + \left(m_k + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(m_k - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Měření

- a) Interference na vodní hladině: V Petriho misce jsme pomoci dvou oscilátorů vybudili vlnění (dvě štěrbinu na nichž difraktuje rovinná vlna můžeme nahradit dvěma zdroji kruhových vln). Dvě vzniklé vlny navzájem interferovaly. Interferenční obrazce byly zachyceny fotoaparát, viz obrázek 5. Průměr čočky, kterou meotar promítal misku na plátno, tedy průměr zobrazeného světlého kruhu je 11,2 cm, což nám posloužilo jako měřítko.



Obr. 5. Interference na vodní hladině

Na obrázku byla vzdálenost $l = 6$ cm a $d = 1,5$ cm. Odečtené polohy minim jsou: $m_{-2} = 3,6$ cm, $m_{-1} = 1,5$ cm.

Dosazením těchto hodnot do výše uvedeného vztahu dostaneme

$$\lambda_1 = (0,75 \pm 0,03) \text{ cm}.$$

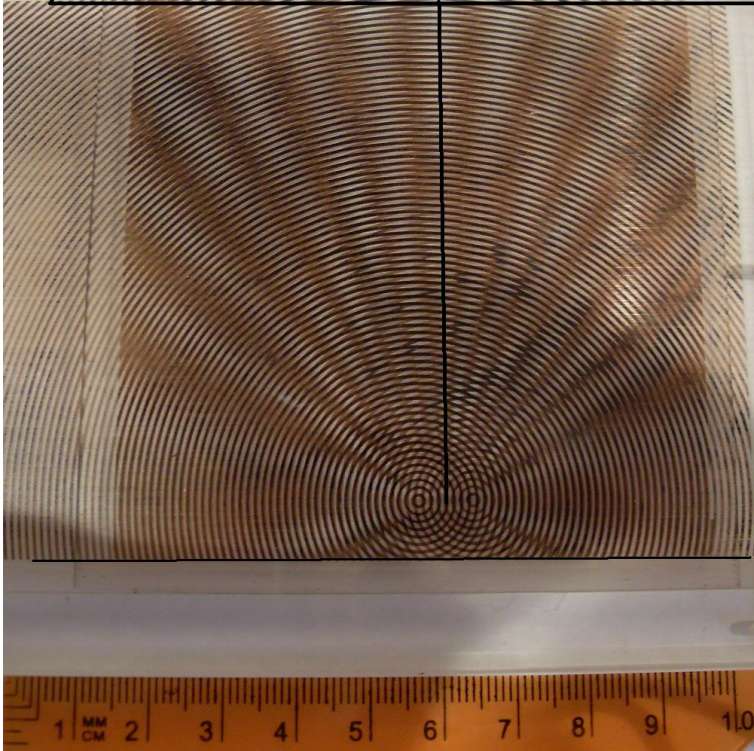
Vlnová délka odečtená z obrázku je

$$\lambda_0 = (0,75 \pm 0,05) \text{ cm},$$

což v rámci chyby odpovídá

- b) „Interference obrázků:“ Dvě průhledné fólie se soustřednými kružnicemi o poloměrech zvětšujícími se po 1 mm (označme $\lambda = 1$ mm) jsme překryli tak, že středy od sebe byly vzdálené $d = 7$ mm. Vidíme, že i toto je analogie Youngova experimentu, jen ve statickém provedení.

V tomto případě, na rozdíl od analogie s vodou budeme sledovat polohy maxim. Zamě-



Obr. 6. Interference obrázků

níme-li význam m v dříve uvedeném vztahu z minima na maximum, změní se vztah pro λ takto

$$\lambda = \frac{1}{k} \left(\sqrt{l^2 + \left(m_k + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(m_k - \frac{d}{2}\right)^2} \right).$$

Z obrázku 6 odečteme hodnoty maxim: $m_{-2} = 3,6$ cm, $m_{-1} = 1,5$ cm.

Rovinu, kde jsme odečítali maxima, jsme umístili do vzdálenosti $l = 6,8$ cm a $d = 0,7$ cm, jak jsme již uvedli. Odečtené polohy minim jsou: $m_{-1} = 0,5$ cm, $m_{-2} = 1$ cm, $m_{-3} = 2,6$ cm, $m_{-4} = 3,7$ cm.

Hodnoty λ pro jednotlivá m jsme shrnuli do tabulky.

Dopočet výsledků experimentu

k	-1	-2	-3	-4
m_k [cm]	0,5	1,0	2,6	3,7
λ_k [cm]	0,0513	0,0753	0,0832	0,0862

Diskuse výsledků

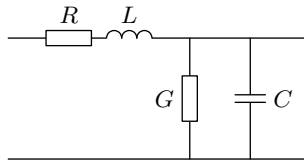
V experimentu zkoumajícím interferenci vln na vodní hladině jsme dospěli ke stejnému výsledku jak přímým měření vlnové délky, tak výpočtem na základě teoretického vztahu a naměřených parametrů. Vzniklé odchylka je jak statistická (původem zejména v měření délek), tak i systematická. Příčina systematické chyby je pravděpodobně hlavně ve zvoleném způsobu udávání měřítka.

V druhém pokusu zkoumajícím „interferenci obrázků“ můžeme vidět poměrně velkou systematickou chybu, opět způsobenou měřítkem, tedy přepočítáváním naměřených délek, čímž chyba rychle narůstá. V prvním maximu však i přesto sedí vypočtená hodnota s tou naměřenou velmi pěkně.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha II. S ... zakompexovaná (5 bodů; průměr 2,83; řešilo 6 studentů)

- Po jaké trajektorii (polodii) se pohybuje pól při pohybu tyče padající v rohu? Vyřešte užitím komplexních čísel.
- Pro $\varepsilon \rightarrow 0$ uvažujte otočení o úhel ε , které zapisujeme R_ε , a posunutí T_ε . Vyšetřete a porovnejte zobrazení $R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon}$ a komutátor $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$.
- Otočení jsme v úvodní poznámce poskládali z miniaturních otočení $e^{i\vartheta} = (1 + i\vartheta/N)^N$. Dokážete pomocí exponenciály zapsat také posunutí funkce?
- Nakreslete obrázek, na co funkce z^2 zobrazí mříž rozteče ε . Za bonus můžete nakreslit obraz mříže po funkci $\cos(z)$.
- Pomocí komplexních čísel vypočtete impedanci střídavého obvodu série cívky, rezistoru a paralelně zapojeného kondenzátoru s odporem, přičemž obvod pokračuje iterativně dále (viz obr. 7).



Obr. 7. Koaxiální kabel

Jakub Michálek a Lukáš Ledvina

Pohyb pólu

Uvažujme tyč v poloze charakterizované: vzdáleností konce na podlaze od počátku x a vzdáleností druhého konce od počátku y . Předpokládejme, že se tyč otočí kolem bodu P o úhel $\Delta\varphi$, resp. dojde k posunutí konců tyče o Δx , Δy .

Uvažujme bod z , tento otočíme o malý úhel $\Delta\varphi$ okolo bodu P , potom pro novou polohu bodu \tilde{z} platí

$$\tilde{z} = P + e^{i\Delta\varphi} (z - P) \approx P + z - P + (z - P)i\Delta\varphi = z + (z - P)i\Delta\varphi. \quad (12)$$

Nyní aplikujme vztah (12) na pohyb konců tyče

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= x + (x - P)i\Delta\varphi &\Rightarrow \Delta x &= (x - P)i\Delta\varphi, \\ iy + i\Delta y &= iy + (iy - P)i\Delta\varphi &\Rightarrow i\Delta y &= (iy - P)i\Delta\varphi. \end{aligned}$$

My však víme, že Δx a Δy jsou reálné, protože se tyč pohybuje po souřadnicových osách. Proto musí být výrazy $(x - P)$ ryze imaginární a $(iy - P)$ reálné číslo. Z této úvahy jednoduše plyne $P = x + iy$, což je pól otáčení.

Otáčíme svět

Z textu seriálu víme, že platí $T_\varepsilon(z) = a + z$, $R_\varepsilon(z) = e^{i\varphi}z \doteq (1 + i\varepsilon - \varepsilon^2/2)z$. Dosadíme nyní do výrazu z úkolu, kde budeme zanedbávat členy ε^3

$$\begin{aligned} R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon} &= (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (\varepsilon + (1 - i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (z - \varepsilon)) = \\ &= (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (\varepsilon + z - i\varepsilon z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z - \varepsilon + i\varepsilon^2) = \\ &= (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (z - i\varepsilon z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z + i\varepsilon^2) = \\ &= z - i\varepsilon z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z + i\varepsilon^2 + i\varepsilon(z - i\varepsilon z) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z = \\ &= z + i\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Jde tedy o translaci ve směru osy y . Zbývá vyšetřit komutátor. Komutátor je operátorů A a B je definovaný $[A, B] = AB - BA$. Vypočtème tedy $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$

$$\begin{aligned} (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (z + \varepsilon) - (\varepsilon + (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) z) - &= \\ = -\varepsilon + \varepsilon (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) = i\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Posouváme svět

Vyjdème z toho, jak jsme definovali derivaci. Pro malé θ platí

$$f(z + \theta) = f(z) + \frac{df}{dz}\theta = \left(1 + \theta \frac{d}{dz}\right) f.$$

Nyní jsme našli operátor posunutí, je to výše uvedený výraz v závorce. Pokud tento „operátor“ budeme aplikovat na nějakou funkci, dostaneme její hodnotu ve vzdálenosti θ , však pouze pro malé θ . Toto posutí můžeme však aplikovat i vícekrát. Proto pro posunutí $\Delta = N\theta$ platí

$$f(z + \Delta) = \left(1 + \theta \frac{d}{dz}\right)^N f(z) = \left(1 + \frac{\Delta \frac{d}{dz}}{N}\right)^N f(z).$$

Tento výraz můžeme však zapsat jednodušším způsobem, uvažíme-li $N \rightarrow \infty$,

$$f(z + \Delta) = \left(1 + \frac{\Delta \frac{d}{dz}}{N}\right)^N f(z) = e^{\Delta \frac{d}{dz}} f.$$

Proto můžeme objekt $e^{\Delta \frac{d}{dz}}$ považovat za operátor posunutí o Δ .

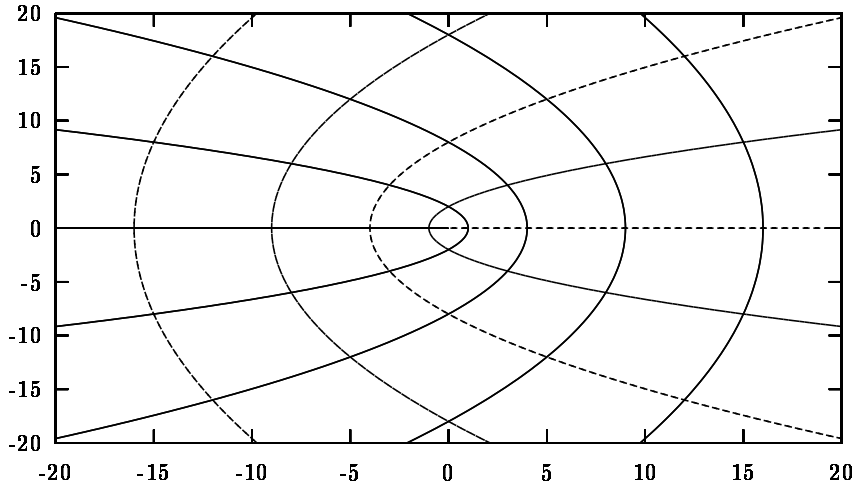
Zobrazení mřížky

Začneme nejdříve s funkcí $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Pro svislé přímky mříže platí $m(t) = x_0 + it$, pro vodorovné $n(t) = t + iy_0$; jim odpovídající křivky jsou

$$\varphi(t) = (x_0^2 - t^2) + 2x_0ti,$$

$$\psi(t) = (t^2 - y_0^2) + 2y_0ti.$$

Vidíme, že hledané křivky jsou paraboly s vrcholem v počátku. Grafy si můžeme prohlédnout na obrázku 8.

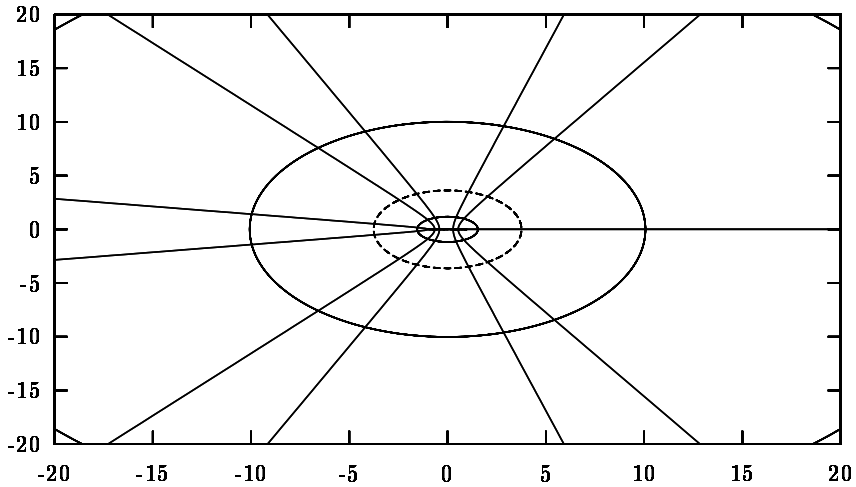


Obr. 8. Zobrazení mříže funkcí $f(x) = z^2$

Dále si zkusme nakreslit funkci $f(z) = \cos z$. Položíme-li $z = x + iy$ a $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, dostáváme

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) \cos x + \frac{1}{2} (e^{-y} - e^y) \sin x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Je vidět, že hledanými křivkami jsou elipsy se středem v počátku. Můžeme si je prohlédnout na obrázku 9.

Obr. 9. Zobrazení mříže funkcí $f(z) = \cos z$ *Impedance proudu*

Protože uvažujeme nekonečně dlouhý kabel, jeho impedance se nezmení, ani pokud odebereme jeden článek. Užijeme nyní vztahu pro sériové a paralelní zapojení odporů. Proto platí

$$Z = R + i\omega L + \left(i\omega C + \frac{1}{G} + \frac{1}{Z} \right)^{-1},$$

$$Z = R + i\omega L + \left(\frac{i\omega CGZ + Z + G}{ZG} \right)^{-1},$$

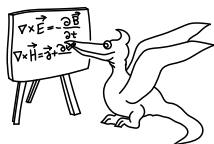
$$Z = R + i\omega L + \frac{ZG}{i\omega CGZ + Z + G},$$

$$0 = Z^2 - (R + i\omega L)Z - G \frac{R + i\omega L}{i\omega CG + 1}.$$

Pro typický koaxiální kabel platí $C \rightarrow 0$ a $G \rightarrow \infty$. Díky tomu lze pro malá ω zanedbat lineární člen a určit

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{i\omega C + \frac{1}{G}}}.$$

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz



Seriál na pokračování

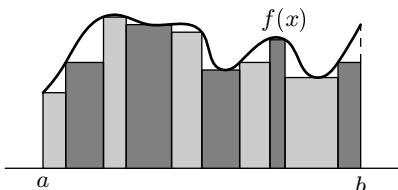
Kapitola 3: Použití holomorfních funkcí k řešení fyzikálních úloh

V této kapitole si ukážeme, k čemu můžeme využít Cauchy-Riemannovy podmínky ve fyzice. Budeme se zabývat hledáním elektrického pole v různých situacích, které jsme doposud nedokázali řešit, například elektrickým polem ve vodivém rohu.

Nebude však všechno tak růžové, jak se zatím zdá. Budeme vždy omezeni pouze na dvojrozměrné úlohy. Budeme proto u úloh z elektrostatiky předpokládat nezávislost parametrů úlohy na souřadnici z .

Co je to integrál?

Nyní se ještě budeme potřebovat seznámit s tím, co je integrál. To slovo zní strašně, ale skrývá se za ním jednoduchá myšlenka, a to vypočítat plochu pod grafem. Chceme-li například vypočítat plochu pod grafem na obrázku, můžeme ji zdola odhadnout obsahem obdélníků širokých nejvýše ε (tomu říkáme dělení intervalu) a vysokých tak, aby se každý vešel pod graf funkce. Za hodnotu integrálu budeme považovat supremum¹ přes všechna dělení tohoto intervalu. Této definici se říká dolní Riemannův integrál. Analogicky definujeme horní Riemannův integrál, kde uvažujeme obsah obdélníků vyšších než graf funkce. Riemannův horní i dolní integrál existují vždy, ale rovnají se pouze pro funkce, které jsou spojité skoro všude.



Obr. 10. Dolní Riemannův integrál

Riemannova definice integrálu je jistě názorná, ale není moc příjemné plochu pod křivkou z této definice počítat. Slavný Newton si integrál definoval jinak. Tvrdil, že integrál přes nějaký interval $\langle a, b \rangle$ je rozdíl hodnot primitivní funkce $F(x)$. Primitivní funkce je každá taková, jejíž derivace je původní funkce. Budeme užívat symboliku

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

Celé integrování se redukuje na problém nalezení $F(x)$, pokud známe $f(x)$. Pro polynomy, exponenciálu a goniometrické funkce lze výsledek uhádnout ze znalosti derivace.

Ještě si ukážeme, že oba dva postupy integrace dávají pro spojité funkce stejný výsledek. Pro to stačí ukázat

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

Tento výrok je podle naší definice derivace ekvivalentní

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

¹) Supremum je nejmenší horní závora množiny (viz kapitola 0). Pro množiny v \mathbb{R} existuje vždy.

Nicméně určitě najdeme takové Δx , aby se funkce $f(t)$ na intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$ lišila od $f(x)$ nejvýše o $1/N$. Levá strana se bude pohybovat v rozmezí $f(x)\Delta x \pm 1/N\Delta x$, vydělením Δx a přechodem $N \rightarrow \infty$ lze docílit kýženého výsledku. Grafický význam spočívá v tom, že přírůstek obsahu pod grafem (integrálu) je přibližně obdélník o základně Δx a výšce $f(x)$, která zůstává v limitním procesu konstantní.

Křivky

V dalším uvažujeme křivku γ z bodu A_1 procházející body A_2, \dots, A_{n-1} a končící v bodě A_n , kterou značíme $\gamma = A_1 A_2 \dots A_n$, podobně jako jsme značili úsečku.

V následujícím uvažování se bude hodit koncept průmětu na křivku. Pro vektorové pole $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a křivku γ rozumíme průmětem pole na křivku výraz

$$\int_{\gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l},$$

kde $d\mathbf{l}$ je diferenciál posunutí po křivce. Analogicky definujeme průmět na normálu plochy výrazem

$$\int_{\Sigma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

kde diferenciál plochy $d\mathbf{S}$ má směr vnější normály k povrchu. Typickým příkladem průmětu na křivku je cirkulace, kdy uvažujeme uzavřenou křivku (viz minulá kapitola). Průmět pole na normálu plochy se nazývá tok.

Zavedeme ještě alternativní notaci derivace. Tato notace je velmi výhodná, pokud derivujeme vektory. Budeme používat

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \equiv E_{x,x}.$$

Obecně ty proměnné, podle kterých derivujeme, budeme nadále psát za čárku a indexy před čárku.

Základní rovnice elektrostatiky

Jako základní postulát elektrostatiky můžeme vzít jedno ze tří tvrzení:

a) Gaussův zákon, který říká

tok elektrického pole uzavřenou plochou = $\frac{1}{\epsilon_0}$ celkový náboj uvnitř této plochy.

Pomocí integrálu, který jsme právě definovali, to znamená

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho dV, \quad (13)$$

kde Ω značí oblast,² $\partial\Omega$ hranici této oblasti (uzavřená plocha), $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ průmět pole na diferenciál plochy a ρ objemovou hustotu náboje.

b) Dalším ekvivalentním postulátem elektrostatiky je Coulombův zákon. Ten nám přímo říká, jak velká je intenzita elektrického pole v konkrétním bodu prostoru

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{n},$$

²⁾ Oblast zde definujeme jako jednoduše souvislou a otevřenou množinu. (To znamená, že každou uzavřenou křivku lze spojitě „stáhnout“ do jednoho bodu, resp. nemá v sobě díry.)

kde r značí vzdálenost náboje q od místa pozorování a \mathbf{n} odpovídající směrový vektor³ od náboje k pozorovateli.

c) Gaussův zákon lze formulovat i v diferenciálním tvaru jako jednu z Maxwellových rovnic

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Nám je nejbližší první a druhý výše uvedený koncept, budeme je proto výhradně dále využívat. V dalším výkladu se již striktně omezíme na rovinný problém.

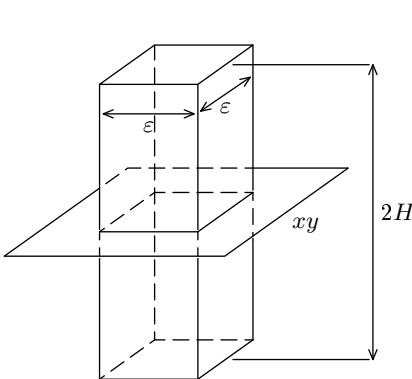
Uvažujme nejprve úlohu, ve které se nebudou vyskytovat žádné zdroje. V našem případě to znamená, že v prostoru nebudou žádné volné náboje a celá úloha bude určena potenciály na vodičích. Za oblast Ω budeme uvažovat hranol výšky $2H$, který rovinu xy protíná kolmo ve čtverečku $\varepsilon \times \varepsilon$ (viz obr. 11 a 12). Z Gaussova zákona (13) dostáváme

$$0 = 2\varepsilon H \left(E_x(x - \frac{1}{2}\varepsilon, y) + E_y(x, y - \frac{1}{2}\varepsilon) - E_x(x + \frac{1}{2}\varepsilon, y) - E_y(x, y + \frac{1}{2}\varepsilon) \right).$$

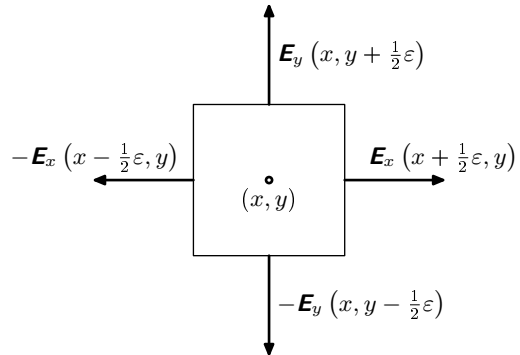
Vytkneme-li ještě ze závorky ε dostaneme

$$0 = E_{x,x}(x, y) + E_{y,y}(x, y), \quad (15)$$

kde musíme používat parciální derivace, protože ty zajistí, aby druhá souřadnice zůstala při derivaci konstantní. Nyní jsme dostali bezbolestně vyjádření Maxwellovy rovnice (14).



Obr. 11. Aplikace Gaussova zákona



Obr. 12. Aplikace Gaussova zákona na čtvereček

Podívejme se ještě na zákon elektromagnetické indukce. Ten nám říká, jaké je napětí indukované na uzavřené křivce, pokud změněme tok magnetického pole jejím vnitřkem. Jako uzavřenou křivku budeme opět uvažovat čtvereček (obr. 13). Změna magnetického toku jeho vnitřkem musí být nulová, protože v elektrostatice neuvažujeme magnetické pole. Proto musí být nulové také indukované napětí

$$0 = \varepsilon \left(E_x(x, y + \frac{1}{2}\varepsilon) - E_y(x + \frac{1}{2}\varepsilon, y) - E_x(x, y - \frac{1}{2}\varepsilon) + E_y(x - \frac{1}{2}\varepsilon, y) \right),$$

Využijeme-li definice derivace z minulého dílu seriálu, dostáváme

$$0 = E_{x,y}(x, y) - E_{y,x}(x, y). \quad (16)$$

³⁾ Proto má jednotkovou velikost.

Zamysleme se nyní nad tím, jak vhodně použít holomorfní funkce k řešení problémů.

Pokud jsou funkce

$$f(z) = E_y + iE_x \quad (17)$$

a

$$g(z) = if(z) = -E_x + iE_y$$

holomorfní, jsou rovnice (15) a (16) splněny automaticky, protože jsou jen přepisem Cauchyho-Riemannových podmínek pro funkci $f(z)$. Pro všechna z jsou $f(z)$ a $g(z)$ navzájem kolmé; dále zkoumáme jen $f(z)$.

Povedlo se nám splnit Maxwellovy rovnice pro elektrostatiku pouze volbou holomorfní funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Tento tvar ale není ještě příliš vhodný pro řešení problémů, ve kterých známe okrajové podmínky, tj. potenciály na vodičích.⁴

Potenciál elektrostatického pole

Zaveďme konečně potenciál elektrostatického pole φ tak, aby platilo

$$-\text{grad } \varphi = \vec{E} \quad (18)$$

Reálnou funkci $\varphi(x, y)$ teď explicitně zkonstruujeme ze vhodné komplexní funkce $w(z)$. Nechť O je pevně zvolený bod. Vypočteme-li integrál $f(z)$ po křivce $\gamma = OX$, dostaneme pro každý bod X komplexní číslo

$$w(X) = \int_{OX} f(z) dz.$$

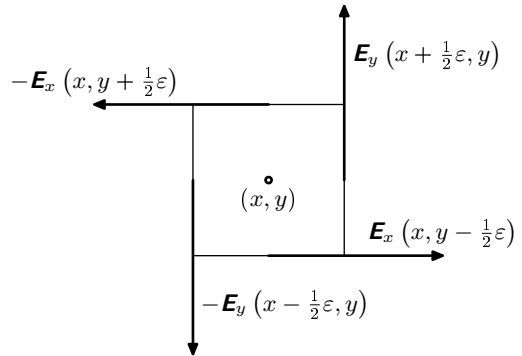
Toto číslo je však určeno jednoznačně, nezávisle na volbě křivky. To lze nahlédnout jednoduše (důkaz sporem). Pro bod X uvažujme dvě křivky OX označené γ_1 a γ_2 takové, že

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \neq \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Protože obrácení průběhu křivky mění znaménko integrálu, platí

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz \neq 0$$

a integrál po uzavřené křivce OXO nevytizí. To ale zjevně odporuje Cauchyho větě z minulé kapitoly seriálu!



Obr. 13. Aplikace zákona elektromagnetické indukce

⁴⁾ V elektrostatice rozlišujeme dvě prostředí: Jednak vakuum, ve kterém se budeme snažit určit potenciál, jednak vodiče, na kterých je potenciál zadáný.

Vyšli jsme z definice $f(z)$ podle rovnice (17). Postupným dosazováním vztahů jako je $y, z = -i$ dostaneme

$$f(z) = E_y + iE_x = -(\varphi, y + i\varphi, x) = -i(\varphi, x x, z + \varphi, y y, z) = -i\varphi, z,$$

odkud plyne

$$\varphi(X) = i \int_{OX} f(z) dz = iw(X).$$

Protože funkce φ je reálná, platí

$$\varphi = -\operatorname{Im} w.$$

My však zvolíme opačný postup: Budeme volit holomorfní funkci $w(z)$ a bude nás zajímat, jak vypadá potenciál φ považmo vektor elektrické intenzity \mathbf{E} . Velmi příjemnou vlastností je, že funkce $f(z) = dw/dz$ je také holomorfní. Poznamenejme ještě na okraj, že křivky $\operatorname{Re} w(z) = \text{konst}$ jsou siločáry elektrického pole, protože jsou kolmé na ekvipotenciály $\operatorname{Im} w(z) = \text{konst}$. Tyto křivky zároveň odpovídají potenciálu generovanému funkcí $g(z)$, pro kterou se siločáry a ekvipotenciály prohodí.

Řešení jednoduchých, ale nevšedních úloh

- Pro funkci $w(z) = \text{konst}$ dostaneme konstantní potenciál, protože její imaginární složka je konstantní $dw/dz = E_y + iE_x = 0$, což odpovídá nulovému elektrickému poli.
- Pro funkci $w(z) = az$, kde $a \in \mathbb{R}$, platí $\operatorname{Im} w = ay$, tedy ekvipotenciály odpovídají situaci $y = \text{konst}$, můžeme proto předpokládat homogenní pole. Ověříme toto tvrzení $dw/dz = a = E_y + iE_x$, takže $E_y = a, E_x = 0$ a jde opravdu o homogenní pole.
- Pro funkci $w(z) = az^2$ je situace mnohem zajímavější. Funkci $w(z)$ můžeme přepsat

$$w(z) = az^2 = a(x^2 - y^2) + 2axyi.$$

Za ekvipotenciály budeme uvažovat imaginární část této funkce.

$$2axy = -\varphi, \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-\varphi}{2ax}.$$

To jsou rovnosé hyperboly nacházející se mimo jiné v prvním kvadrantu. Zamysleme se nad tím, jak vypadají ekvipotenciály pro $\varphi \rightarrow 0$. Jsou to přímo polopřímky $x > 0, y = 0$ a $x = 0, y > 0$. Tyto dvě polopřímky však svírají pravý úhel a určují tak roh. Tato volba určuje, jak vypadá pole uvnitř vodivého rohu. Takový výsledek jsme klasickými cestami nebyli schopni dostat. Můžeme ještě vypočítat složky elektrického pole derivací funkce $w(z)$. Z rovnice $dw(z)/dz = 2az$ platí

$$E_x = 2ay, \quad E_y = 2ax.$$

Póly holomorfní funkce

Zkusme se ještě podívat na elektrické pole dané funkcí $f(z) = ai/z$. Protože tato funkce není definována v počátku, platí sice Cauchyho věta, ale musíme opatrně volit oblast, ze které vybíráme integrační křivku. Tato oblast nesmí obsahovat počátek! Naopak na libovolné oblasti, která neobsahuje počátek můžeme použít výše odvozenou teorii a považovat tuto funkci za řešení rovnic elektrostatiky.

Pro řešení se hodí vědět, jak se derivuje přirozený logaritmus $\ln y$, což je inverzní funkce k exponenciále $y = e^x$

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d \ln y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Podívejme se nyní, jak vypadá potenciál odpovídající funkci

$$f(z) = \frac{ai}{z} = \frac{ia\bar{z}}{|z|^2}. \quad (19)$$

Integrací funkce $f(z)$ dostáváme

$$w(z) = ia \ln |z|$$

Nyní se podíváme na imaginární složku funkce w , tak abychom určily tvar ekvipotenciál

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} w(z) &= -a \operatorname{Im} (i \ln |z|) = -a \operatorname{Im} \left(i \ln \left(|z| e^{i \arg z} \right) \right) = \\ &= -a \operatorname{Im} (i \ln |z| - \arg z) = -a \ln |z| = \varphi. \end{aligned}$$

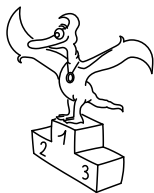
Proto jsou ekvipotenciály kružnice se středem v počátku. Podle (17) toto řešení fyzikálně odpovídá poli

$$E_x = \frac{ax}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{ay}{x^2 + y^2}.$$

Toto pole odpovídá vodiči s konstantní délkovou hustotou náboje.

Úloha III. S ... *hluboká orba*

- Dopočítejte fyzikální význam konstanty a pro funkci $f(z) = ai/z$, znáte-li délkovou hustotu náboje τ .
- Vypočítejte a nakreslete ekvipotenciály a silokřivky pole v okolí rohu, který má vrcholový úhel ϑ . Náповěda: použijte funkci tvaru $w(z) = Az^s$, kde s je vhodná reálná konstanta.
- Určete pole, které generuje elektrický dublet. Dublet jsou dvě tyče vzdálené d s opačnou nábojovou hustotou, přičemž $d\tau = \text{konst}$. Zajímá nás limita $d \rightarrow 0$. Náповěda: platí $\ln(1+x) \approx x$ pro x blízké 0.
- Rozmyslete si, co se stane, pokud existující komplexní potenciál $w(z)$ zobrazíme jinou holomorfní funkcí $v(z)$. Bude potenciál tvaru $v(w(z))$ i nadále řešit rovnice elektrostatiky?



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	70
1. <i>Jakub Šafín</i>	G, P. Horova, Michalovce	1	4	-	3	4	0	3	15	59	39
2. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	3	4	-	2	5	8	-	22	63	33
3.-4. <i>Tomáš Arman</i>	G, Boskovice	0	-	-	1	5	4	-	10	47	22
<i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	1	4	2	2	-	-	1	10	55	22
5. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	1	-	-	-	5	-	-	6	66	21
6. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	1	1	-	-	3	0	1	6	37	19
7. <i>Martin Gajdošík</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	5	-	-	5	79	15
8. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	0	1	-	1	2	-	-	4	47	14
9. <i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	0	-	2	1	-	-	3	52	13
10. <i>Jiří Juřena</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	85	11
11. <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	0	47	8
12. <i>Lukáš Pusek</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	70	7
13. <i>Markéta Tesařová</i>	G, Boskovice	-	-	-	1	4	-	-	5	56	5
14.-15. <i>Vojtěch Erbrt</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	0	1	-	-	-	-	-	1	25	3
<i>Vladan Glončák</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	33	3
16.-17. <i>Klára Kymlová</i>	G a SOŠE, Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2
<i>Klaudia Mráziková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2
18. <i>Morta Plyčiuraityte-Pl.</i>	Vilnius jezuitu gimnazija	0	0	-	-	-	1	-	1	6	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	70
1. <i>Martin Bucháček</i>	G Ludka Pika, Plzeň	-	-	-	-	-	-	5	5	79	22
2. <i>Jan Brandejs</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	65	17
3. <i>Ivo Vinklárek</i>	G, Rožnov p. Radhoštěm	2	1	-	2	-	-	-	5	55	16
4. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	2	-	-	-	0	-	-	2	43	12
5. <i>Vojtěch Havlíček</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	4	-	-	-	-	-	4	83	10
6.-7. <i> Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	0	-	-	1	-	-	-	1	43	9
<i>Jan Sopoušek</i>	Gymnázium, Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	0	39	9
8. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	0	27	7
9.-10. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	50	5
<i>Jakub Kocák</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	-	-	-	-	-	-	0	63	5
11. <i>Tomáš Havelka</i>	G, Neumannova, Žďár n. S.	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
12. <i>Ján Pulmann</i>	G Grösslingova, Bratislava	-	3	-	-	-	-	-	3	75	3

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	70
1. <i>Tomáš Kořínek</i>		1	-	1	0	2	3	-	7	36	15
2. <i>Jan Palounek</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	60	6
3. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	1	-	-	-	-	-	-	1	38	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	70
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	4	4	4	4	5	8	6	35	90	63
2. <i>Jakub Kubečka</i>	G, Nymburk	1	1	2	-	2	4	-	10	47	26
3.-4. <i>Tomáš Bárta</i>	G, Nad Štolou Praha	1	2	-	1	2	7	1	14	49	24
<i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	67	24
5. <i>Jakub Maksymov</i>	G a SOŠ, Jaroměř	1	-	-	-	5	-	-	6	60	18
6. <i>Gabija Maršalkaite</i>	Vilnius jezuitu gymnazija	-	4	-	-	2	-	-	6	62	16
7. <i>Ondřej Míl</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	5	-	5	69	11
8. <i>Peter Kosec</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	69	9
9.-11. <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	-	1	-	-	-	-	-	1	41	7
<i>Samuel Havadej</i>	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	0	54	7
<i>Bedřich Said</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	-	-	-	-	-	-	-	0	41	7
12. <i>Kristýna Nešporová</i>	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	0	46	6
13. <i>Alena Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
14. <i>Gita Šteponavičiute</i>	Vilnius jezuitu gymnazija	-	-	-	-	3	-	-	3	60	3
15.-16. <i>Lucia Filová</i>	Hotelová akadémia, Brezno	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
<i>Patrik Švančara</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	13	1
17. <i>Jan Česal</i>	SPŠ Otrokovice	0	-	-	0	0	-	-	0	0	0



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.