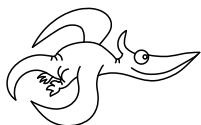


Milí řešitelé!

Právě jste dostali řešení 3. série úloh Fyzikálního korespondenčního semináře a spolu s nimi také zadání série nové.

FYKOS se dostává do druhého poločasu a je třeba začít řešit na plný plyn! Rozjeďte svou vítěznou sérii a probijte se výsledkovou listinou na přední místa, abychom vás pozvali na jarní soustředění. Je o co stát!

Vaši organizátoři



Zadání IV. série



Termín odeslání: 7. března 2010
Termín doručení: 9. března 2010 18:00

Úloha IV. 1 ... rozcvička

a) *napnutá struna*

Frekvence kmitů napjaté struny závisí na její délce l , síle F , kterou je struna napjatá, a na délkové hustotě ρ_l . Určete z těchto údajů vzoreček pro frekvenci struny pomocí rozměrové analýzy.

b) *dolů*

Mějme činku, jejíž závaží mají tvar disků, které jsou blízko u sebe. Tyčku omotáme jednou provázkem a činku spustíme, jak rychle padá, pokud se nesmýká? Disky mají hmotnost m a poloměr R , tyčka je nehmotná s poloměrem r .

Úloha IV. 2 ... hod' ho do Slunce!

Karel se rozhodl zahodit svůj sešit matematické analýzy na Slunce. Poradíte mu, jakou minimální rychlost sešit u musí udělit, aby sešit na Slunce dopadl? Pro jednoduchost zanedbejte odporové síly, Zemi a Slunce považujte za hmotné body, sešit vypouštíme ze vzdálenosti $R_Z = = 6378$ km od hmotného bodu symbolizujícího Zemi, vůči kterému je sešit v klidu a Země obíhá Slunce po dokonalé kružnici. Konstanty, které se vám budou hodit: $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg, $M_Z = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $a = 1 \text{ AU} = 150 \cdot 10^9$ m.

Úloha IV. 3 ... naše staré hodiny lijí čtyři hodiny

Navrhněte tvar přelévacích hodin, aby ubývala výška hladiny lineárně s časem. Za uvažování povrchových efektů, vnitřního tření apod. můžete dostat body navíc.

Úloha IV. 4 ... sama doma

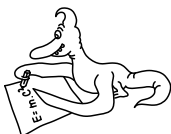
Terka J. mívá většinou skvělé nápady. Třeba minulého pondělí si od svého oblíbeného dermatologa přinesla 5 litrů kapalného dusíku a ihned ho vylila na zem ve své ubikaci. Ve středu pro změnu odcizila na čerpací pumpě 5 litrů benzínu, který záhy vylila do umyvadla a zapálila. Mohlo se Terce některý den udělat nedobře v důsledku jejich kratochvílí? Aneb jak se v obou případech změní teplota, tlak a koncentrace kyslíku v ubikaci, pokud tato je dokonale neprodyšná, tepelně izolovaná a rozměrů $3 \times 3 \times 4 \text{ m}^3$?

Úloha IV . P ... míchání barev

Chceme-li na monitoru počítače zobrazit azurovou barvu, musíme rozsvítit červený a modrý segment. Azurová barva odráží v nejjednodušším případě světlo dvou vlnových délek (modré a červené), dále pokud budeme mít modrou barvu, tak tato bude odrážet modré světlo a červená obdobně. Když smícháme modrou a červenou temperu, výsledná směs bude mít fialovou barvu, protože modrá složka pohltí vše až na modrou a obdobně také červená. Proto ze směsi těchto barev budeme pozorovat pouze ty vlnové délky, které odrážejí obě složky. Představte si, že tempery jsou složeny z malých kapiček. Jak bude záviset výsledný zrakový vjem na jejich velikosti?

Úloha IV . E ... vejce sebevrah

Z jaké nejvyšší výšky můžete shodit obyčejné slepičí vajíčko na tvrdou podlahu, aniž by se nakráplo? Co když vajíčko natěsníme nějakým měkkým obalovým materiálem (tj. papír, bublinková folie apod.) s tloušťkou nejvýše 5 mm? Z kolikrát vyšší výšky ho pak můžeme pustit, aniž by se nějak viditelně poškodilo? Vyzkoušejte několik různých obalů.

**Řešení III. série****Úloha III . 1 ... rozcvička (4 body; průměr 1,90; řešilo 20 studentů)**

a) dr. Nec

Terka byla o víkendu tahat dřevo. Objem dřeva se měří dvěma způsoby: na kubíky (1 m³ dřevo-hmoty bez vzduchových mezer mezi kládami) a na pluometry (1 m³ i s mezerami). Nalezněte převodní vztah mezi těmito dvěma jednotkami (tj. kolik pluometrů odpovídá jednomu kubíku) v závislosti na poloměru klád, ze kterých se skládá hranice. Klády považujte za dokonale hladké válce, které se skládají na sebe.

b) bublifuk

Foukáme do mýdlového povrchu na počátku kruhového tvaru tak, aby měl tvar kulového vrchlíku o poloměru r . Odhadněte, jakou rychlostí do něj musíme foukat?

Dohromady (se) dali Terka a Jakub.

Dr. Nec

V zadání jsme se trochu, trošičku spletli. Zkušení dřevaři nám to snad odpustí, a znalí řešitelé chybu objevili. Prodejci dřeva, tedy ti všichni dr. Necové a dr. Voštěpové, používají troje různé jednotky pro měření jeho množství. Tou první je skutečný objem dřevní hmoty, tj. krychle o hraně 1 m zcela vyplněná dřevem. Takto měřené množství dřeva se udává v *pluometrech* a značí se písmeny plm.

Častěji se však používá *prostorový metr*, což je opět krychle o hraně 1 m vyplněná poleny, a tedy se započítávají i vzduchové mezery mezi nimi. Dřevo je však urovnané, a proto jsou tyto mezery dosti malé. Níže výpočtem zjistíme jak moc malé. Prostorový metr se označuje symbolem prmr, kde poslední r znamená rovinané.

Konečně se můžete setkat ještě s *prostorovým metrem sypaným*. Představte si hromadu poházených nasekaných špalků dřeva, v níž vymezíte krychli o délce hrany 1 m. Takové množství

dřeva odpovídá jednomu sypanému prostorovému metru, 1 prms. Toto počítat nebudeme, ale vlivem velkých mezer mezi špalíky je zde jen asi 40 % dřevní hmoty.

Uvažujme nyní kulatiny vzorně srovnané na železničním vagónu nebo na nákladním autě. Nákladový prostor je vymezen jednak podlahou, a po stranách také klanicemi. Předpokládejme, že vzdálenost mezi nimi je celočíselným násobkem poloměru klád R , tedy že dolní vrstva je tam narovnána tak „akorát“. Při pokládání druhé vrstvy se pak dřevo skutálí do mezer mezi kládami v první vrstvě. Třetí vrstva bude však podobně jako první zarovnána tak akorát. A tak dále.

Na vagónu tedy máme několik typů mezer. Díky tomu, že klády jsou dokonalé válce, můžeme celou situaci zkoumat pouze ve dvou rozměrech. Zakreslili jsme ji do obrázku 1. Vidíme celkem tři typy mezer: (i) mezi trojicí sousedních klád, (ii) mezi dvojicí klád a stěnou, (iii) mezi trojicí klád a stěnou. Vypočítáme plochy všech těchto geometrických útvarů, ačkoli pro řešení úlohy to není nezbytně nutné.

Pro výpočet obsahu S_1 využijeme rovnostranný trojúhelník o délce strany $2R$. Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je π , můžeme okamžitě napsat

$$S_1 = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right),$$

kde $\sqrt{3}$ je zůstatek po výšce tohoto trojúhelníku.

Druhá mezerka má obsah S_2 , který zjistíme díky obdélníku o rozměrech $2R$ a R . Pak již velmi snadno určíme

$$S_2 = R^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Konečně se dostáváme k poslední možnosti. Velikost plochy S_3 je součtem několika částí: první tam je celá S_2 , i když rozdělená na dvě poloviny, dále obdélník o stranách ε a R a konečně ten zbytek, jakýsi ve třech stranách „propadlý“ čtyřúhelník. Jeho plochu označme S_4 . Tedy $S_3 = S_2 + \varepsilon R + S_4$.

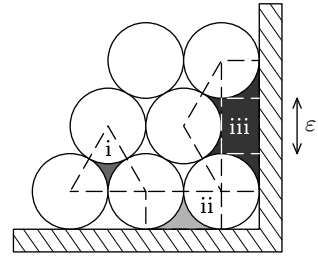
Nejprve zjistíme velikost ε . Je to vzdálenost mezi dvěma kládami ob vrstvy. Použijeme opět rovnostranný trojúhelník se stranou $2R$. Jeho výška je $\sqrt{3}R$. Odsud $\varepsilon/2 = \sqrt{3}R - R$, a tedy $\varepsilon = 2R(\sqrt{3} - 1)$.

Nyní vyšetříme plochu S_4 . Použijeme k tomu rovnoramenný trojúhelník s délkou ramen $2R$ a základnou $2R + \varepsilon$. Jeho výšku označme w a podle Pythagorovy věty pro ni platí $w = \sqrt{4R^2 - (R + \frac{1}{2}\varepsilon)^2} = R$. Tedy rovná strana tohoto čtyřúhelníku se dokonce dotýká protější kulaté. Je její tečnou. Teď už snadnou vyjádříme

$$S_4 = R \left(R + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{\pi R^2}{2} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Dohromady proto $S_3 = (3\sqrt{3} - \pi) R^2$.

Nyní je třeba si rozmyslet, kolik kterých mezer v jednom plošném metru je. Tady nám nezbude než zvolit vhodný průměr klád. Předpokládejme, že klády nakládáme na vůz řady Smmps, který má ložnou šířku¹ 3100 mm. Průměr klád zvolme např. 310 mm, tj. $R = 155$ mm, a skládejme je do sedmi vrstev po deseti, respektive devíti kusech. Vůz tedy celkově pojme 67



Obr. 1. Složené klády

¹) Viz http://vozy.cdcargo.cz/katalog_vozu/plosinove-vozy/smmps-54.html.

kulatin, přičemž mezer mezi nimi bude věru požeňnaně: $5 \cdot (9 + 8)$ prvního typu, $2 \cdot 10$ druhého (uvědomte si, že dvě mezery v rozích jsou polovinou jedné u stěny) a 2-3 posledně jmenovaných.

Celkový průjezdný profil nákladu ohraničeného obdélníkem je součinem šířky dolní vrstvy a celkové výšky

$$P = 2nR \left(2R \left[\frac{1}{2}m \right] + \varepsilon \left[\frac{1}{2}m \right] \right) = 4nR^2 \left(\left[\frac{1}{2}m \right] + \left[\frac{1}{2}m \right] (\sqrt{3} - 1) \right) \doteq 5,955 \text{ m}^2,$$

kde n je počet klád v nejnižší vrstvě a m počet vrstev. Všimněte si využití dolní a horní části podílu $m/2$ pro odlišení různého množství stromů v sudých a lichých vrstvách.

Nás však zajímá poměr dřevní hmoty a celkem zabraného místa

$$\nu = \frac{\left(\left[\frac{1}{2}m \right] n + \left[\frac{1}{2}m \right] (n - 1) \right) \pi R^2}{P} = \frac{(4 \cdot 10 + 3 \cdot 9) \pi}{4 \cdot 10 (4 + 3(\sqrt{3} - 1))} \doteq 0,849.$$

Toto číslo je poměrně dobrým výsledkem. V praxi je převodní konstanta podstatně nižší (obvykle 0,65 až 0,8), neboť stromy nejsou válce a nejde je „nacpat“ přímo na sebe jako v této modelové situaci.

Bublifuk

Bublifuk je oblíbená dětská hračka, a proto můžeme předpokládat, že každý si vyzkoušel vyfouknout nějakou tu mýdlovou bublinu. Kromě určité intenzity foukání to však vyžaduje i nemalý cit. Příliš prudký vítr totiž bublinu roztrhne. Zabývejme se pro tentokrát minimální silou foukání, aby se bublina zdárně nafoukla.

Foukáním udělujeme molekulám vzduchu určitou hybnost. Ty pak narážejí na mýdlinovou blánu tato jejich hybnost se zužitkovává pro udržování vypouklého tvaru mýdlové blány, neboť, jak známo, kapalina se snaží zaujmout takový tvar, aby její povrch byl co nejmenší. To je způsobeno existencí povrchového napětí, které vyvolává sílu, jež se snaží povrch blány vrátit do rovinného tvaru. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že veškerá hybnost pohybujícího se vzduchu se využije k tomuto účelu. Takže síla vzduchu musí být rovna povrchové síle, způsobené povrchovým napětím σ ,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4\sigma\pi R^2}{r}, \quad (1)$$

kde πR^2 je obsah vyfukovacího kroužku a r poloměr zakřivení vypouklé blány. Změna hybnosti vzduchu je $z p = mv$ na 0 (dle předpokladu). Je-li hustota vzduchu ρ , pak za dobu Δt na blánu doletí vzduch o hmotnosti $m = \pi R^2 v \Delta t \rho$, takže na levé straně rovnice (1) dostáváme výraz $\pi R^2 v^2 \rho$.

Dosazením obdržíme

$$\pi R^2 v^2 \rho = \frac{4\sigma\pi R^2}{r},$$

odkud elementárními úpravami získáme výsledek

$$v = \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho r}}.$$

Někteří řešitelé používali ve svých řešeních integrální počet, ale v tomto případě nepřináší příliš větší přesnost. Kde to není nutné, zkuste raději úlohy řešit bez použití vyšší matematiky.

Tomáš Jirotko
byrot@fykos.cz

Úloha III.2 ... zasekanej! (4 body; průměr 2,50; řešili 2 studenti)

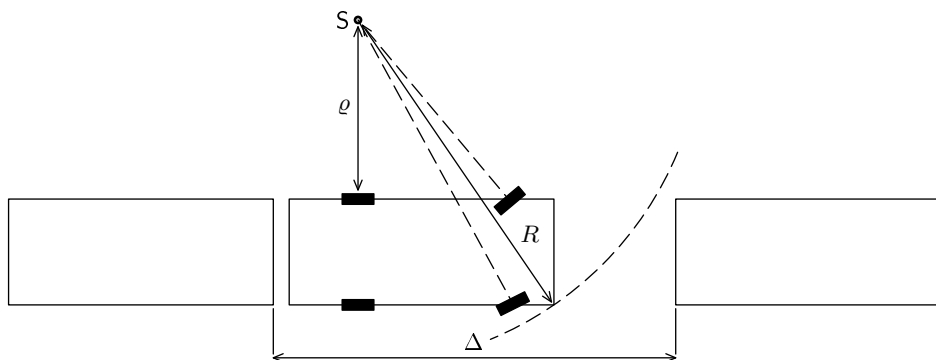
Jistě jste si všimli, že při podélném parkování zpátečkou se auto může vejít i do celkem malé mezery. Mějme auto délky L , šířky d se vzdáleností kol l . Kola se mohou otočit maximálně o α stupňů (tzv. „plný rejď“). Do jak velké mezery budeme schopni zaparkovat při použití zpátečky? A při parkování popředu? Jaká je ideální parkovací strategie? Auto musí být samozřejmě dokonale zarovnané v řadě (tj. rovnoběžně s chodníkem ve vzdálenosti maximálně d_0 od chodníku) a při parkovacím manévru se auto smí pohybovat pouze jedním směrem, tzn. buď dopředu nebo dozadu. *Vykoumal Mára při sledování filmu Vrchní, prchni.*

Pokud si přečteme jakoukoli učebnici autoškoly, jsme nabádáni k parkování pozadu. Zkusíme nyní vypočítat, zdali je lepší parkovat popředu nebo doopravdy pozadu.

Budeme řešit nikoli problém zaparkování, ale vyjetí z parkovacího místa. Pokud totiž nějak otočíme kola, tak se pohybujeme po stejné křivce, jedeme-li dopředu i jedeme-li dozadu. Toto bude platit pro „malé“ rychlosti parkování, pokud bychom parkovali smykem, tak to není invertibilní pohyb, ale takto naprostá většina řidičů neparkuje.

Rozeberme nejdříve po jaké křivce se pohybuje auto, pokud otočíme koly. Studujeme-li pohyb jakéhokoliv tuhého tělesa v rovině, existuje tzv. pól otáčení² okolo kterého dochází pouze k rotaci. Zkusíme najít tento bod.

Pól otáčení musí ležet na ose zadních kol, protože zadní kola se nenatáčejí. Dále musí ležet na osách³ obou předních kol. Pokud by byly například obě přední kola otočena stejně, neexistoval by průsečík os předních a zadních kol, docházelo by ke smýkání a potom bychom museli často měnit obutí. Poloměr a střed otáčení můžeme tedy určit pomocí jednoduché geometrie, viz obrázek 2.



Obr. 2. Parkování pozadu

Uvažujme ještě pro jednoduchost shodné vzdálenosti os kol od konců auta.

Parkování pozadu

Jak jsme uvedli výše, budeme studovat vyjždění z parkovacího místa. Ideální strategie je začít zadní co nejlíže k autu za námi, otočit volantem co nejvíce doleva a doufat, že pravým předním rohem mineme auto stojící před mámou. Pokud se nám již toto podaří vyjedeme

²⁾ Viz také 2. kapitola seriálu tohoto ročníku.

³⁾ Zde za osu považujeme kolmici na rovinu kola v jeho středu.

například rovně. Je samozřejmě lepší dále začít točit doprava abychom tolik nevybočili do vozovky.

Nyní se pokusme vypočítat parametry tohoto pohybu. Označme α úhel o který je možno vychýlit kola, L celkovou délku vozidla, d jeho šířku, l rozvor a Δ velikost parkovacího místa. Určeme nejdříve vzdálenost ϱ osy otáčení od levého zadního kola. Z jednoduché geometrie vychází

$$\varrho = l \cotg \alpha .$$

Dále označme R vzdálenost pravého předního rohu vozu od osy otáčení. Pro ni platí

$$R^2 = (\varrho + d)^2 + \left(\frac{L+l}{2} \right)^2 . \quad (2)$$

Uvážíme-li nyní pravoúhlý trojúhelník o vrcholech: střed otáčení, levé zadní kolo před počátkem vyjždění a levý zadní roh vozidla před námi, z Pythagorovy věty dostáváme

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\Delta - \frac{L-l}{2} \right)^2 . \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) vyjádříme Δ

$$\Delta = \frac{L-l}{2} + \sqrt{d^2 + 2dl \cotg \alpha + \left(\frac{L+l}{2} \right)^2} .$$

Dosadíme-li hodnoty: $L = 4$ m, $l = 2,5$ m, $d = 1,5$ m a $\alpha = 40^\circ$, dostáváme

$$\Delta = 5,41 \text{ m} ,$$

což je o 1,41 m více než délka vozidla.

Uveďme ještě na závěr, že místo potřebné k zaparkování je ještě o něco kratší, protože jsme auto modelovali jako obdélník, ale ve skutečnosti má zakulacené rohy. Proto dojde ke „krizovému“ okamžiku pro menší vzdálenost mezi vozidly.

Parkování popředu

Budeme-li opět zkoumat opačný postup, musíme vyjet z místa pozadu. Nyní však nastává problém a tím je blízkost chodníku na který bychom neměli najet. Nyní je krizovým místem jednak chodník, jednak vozidlo za námi. Proto nastavíme poloměr otáčení tak veliký, aby jsme nenajeli na chodník a tento poloměr budeme udržovat po celou dobu vyjždění. Tento postup nám ukáže přibližnou velikost parkovacího místa.

Najít ideální trajektorii v tomto případě je velmi těžké, protože pokud bychom předním kolem sledovali okraj chodníku až do okamžiku, kdy tečna k pravému okraji vozu by neprotínala vozidlo za námi, dostali bychom správné řešení, však určit, po jaké křivce se v tomto případě pohybuje vůz by bylo obtížné⁴.

Označíme vzdálenost středu otáčení od levého zadního kola ϱ . Kružnice, po které se pohybuje pravé přední kolo musí být tečná k chodníku. Proto z Pythagorovy věty platí

$$\begin{aligned} (\varrho + d + d_0)^2 &= (\varrho + d)^2 + l^2 . \\ \varrho &= \frac{l^2 - 2dd_0 - d_0^2}{2d_0} \approx \frac{l^2 - 2dd_0}{2d_0} . \end{aligned} \quad (4)$$

⁴) Obecně jde o Ψ -křivku, jejíž předpis se získává obtížně.

Provedeme-li stejnou úvahu, která nás vedla k rovnicím (2) a (3), dostáváme

$$R^2 = (\varrho + d)^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2,$$

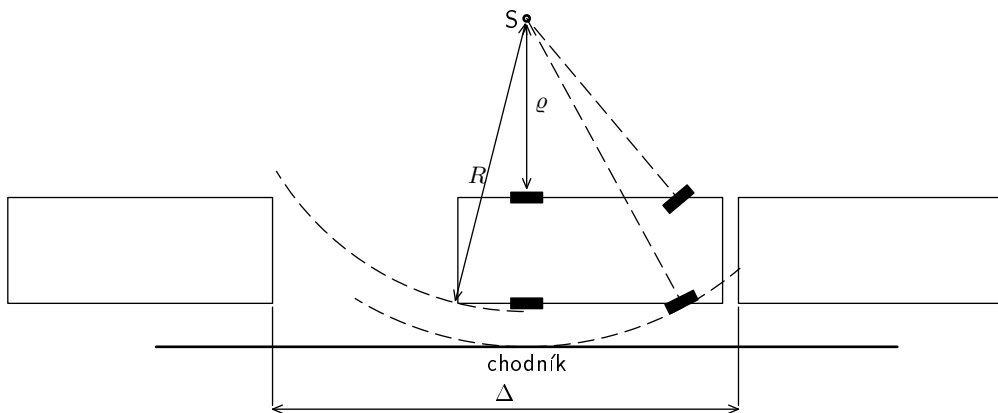
$$R^2 = \varrho^2 + \left(\Delta - \frac{L+l}{2}\right)^2.$$

Algebraickou úpravou dostáváme výraz pro Δ , dosadili jsme za ϱ z (4)

$$\Delta = \frac{L+l}{2} + \sqrt{d^2 + \frac{d}{d_0}(l^2 - 2dd_0) + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2}.$$

Pro $d_0 = 30$ cm vychází číselně

$$\Delta = 8,68 \text{ m}.$$



Obr. 3. Parkování popředu

Je vidět, že parkovat pozadu je výrazně lepší, než parkovat popředu. Pro parkování popředu potřebujeme skoro dvojnásobek délky vozu.

Lukáš Ledvína
lukas1@fykos.cz

Úloha III.3 ... číchač Aleš (4 body; průměr 3,00; řešili 4 studenti)

Aleš má na koleji na poličce neprodyšně uzavřenou válcovou průhlednou nádobu s toluenem, z 90 % plnou. Aleš si svůj toluen pochopitelně bedlivě střeží. Když se po víkendu vrátil na kolej, všiml si, že se hladina toluenu v nádobě o kousíček snížila a okamžitě obvinil spolubydličího šnEka z krádeže. Až posléze si uvědomil, že o víkendu začali topit a teplota v ubikaci tudíž stoupla o 20°C . Rozřešte tento detektivní příběh a zjistěte, zda šnEk skutečně číchal toluen. Jinak řečeno: Jak velký pokles hladiny mohla způsobit změna teploty? Mohl by si takového poklesu Aleš vůbec všimnout? K řešení lze použít data uvedená na [http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_(data_page)).

Mára šlápl do hovna.

Předpokládejme, že hustota kapalného toluenu ρ_k ani objem nádoby V_c se s teplotou T nemění. Označme dále m_p , V_p a ρ_p hmotnost, objem a hustotu par toluenu v nádobě a m_c hmotnost veškerého toluenu v nádobě. Hmotnost kapalného toluenu v nádobě pak bude $m_c - m_p$ a objem $V_c - V_p$.

Je potřeba určit, jak se s teplotou změní poměr objemu plynné a kapalně fáze toluenu v nádobě. Pro libovolnou teplotu platí

$$\frac{V_c - V_p}{V_p} = \frac{(m_c - m_p)\rho_p}{m_p\rho_k}.$$

Považujíc toluen za ideální plyn s molární hmotností M , dostáváme ze stavové rovnice ideálního plynu hmotnost par

$$m_p = \frac{MpV_p}{RT},$$

kde p je (parciální) tlak par toluenu v nádobě a R universální plynová konstanta. Podobně vyjádříme ze stavové rovnice hustotu par

$$\rho_p = \frac{pM}{RT}.$$

Dosadíme-li uvedená vyjádření do vztahu pro poměr objemů, získáme (po jednoduchých úpravách) vztah pro objem par v závislosti na teplotě

$$V_p = V_c + \frac{MpV_p}{RT\rho_k} - \frac{m_c}{\rho_k}.$$

Pro změnu objemu par při změně teploty z T_1 na T_2 dostaneme

$$V_p(T_2) - V_p(T_1) = \frac{Mp(T_2)V(T_2)}{RT_2\rho_k} - \frac{Mp(T_1)V(T_1)}{RT_1\rho_k},$$

z čehož konečně dostáváme vztah

$$V_p(T_2) = V_p(T_1) \frac{\left(1 - \frac{Mp(T_2)V(T_2)}{RT_2\rho_k}\right)}{\left(1 - \frac{Mp(T_1)V(T_1)}{RT_1\rho_k}\right)}.$$

Na odkazovaných stránkách byl (doslova) uveden vztah:

$$\log_{10} P_{\text{Hgmm}} = 6,95464 - \frac{1344,8}{T + 219,482}.$$

Ten je sám o sobě vcelku k ničemu, neboť kromě poněkud zvláštním způsobem uvedené jednotky tlaku žádné další jednotky neuvádí. Naštěstí je v uvedeném článku vypsáno několik konkrétních hodnot s uvedenými jednotkami, takže metodou pokus-omyl lze uhodnout, že teplota T je zadána v Celsiově stupnici.

Vztah přepíšeme do rozumnější podoby

$$p = \exp\left(20,9064 - \frac{3096,5}{\frac{T}{\text{K}} - 53,668}\right) \text{ Pa}.$$

(Použili jsme převodní vztah $1 \text{ Hgmm} \approx 1 \text{ Torr} = 133,322 \text{ Pa}$.)

Ze zadání není zjevné, jaká byla konkrétní teplota po Alešově příjezdu. Odhadněme tedy možný pokles shora.

Teplotná roztažnost kapalného toluenu v horním odhadu nevádí, neboť působí proti změně objemu způsobené odparem. Uvedená závislost tlaku par na teplotě je konvexní a teplota na koleji zpravidla nepřesahuje $50 \text{ }^\circ\text{C}$, tj. $323,15 \text{ K}$, ani když se začne topit. Dosadíme-li tedy $T_1 = 303,15 \text{ K}$, $T_2 = 323,15 \text{ K}$, $V_p(T_1) = 0,1V_c$, $R = 8,3145 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, $M = 92,14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\rho_k = 0,867 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, objem par vzroste na přibližně na $0,10002V_c$, pokles je tudíž v řádu statisícin objemu nádoby, pouhým pohledem nepozorovatelný.

Závěrem tedy budiž, že soustavné rozpouštění mozku již způsobilo Alešovi stihomam, nebo šňek skutečně číchal toluen bez Alešova svolení.

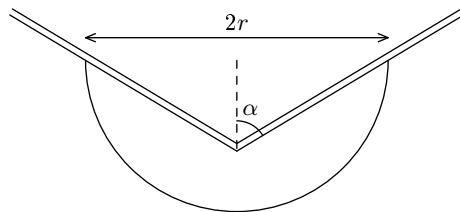
Marek Nečada
marekn@fykos.cz

Úloha III.4 ... rumové ovoce (4 body; průměr 2,75; řešilo 8 studentů)

Uvažujme misku, do které položíme dvě spojená brčka, která mají tvar písmene V. Miska má poloměr r a brčko se smí dotýkat pouze jejích okrajů. Určete nejprve podmínku stability a potom vypočítejte periodu kmitů brčka v souměrné poloze.

Vymyslel Jakub, než se opil během labyrintu.

V řešení budeme o brčkách uvažovat tak, že každé z nich má délku l a hmotnost m . Spojená jsou tak, že svírají úhel 2α . Miska má průměr r . Viz obrázek 4.



Obr. 4. Miska s brčky

Podmínka stability

Aby se věčko z brček nepřeklopilo, musí být jeho těžiště pod osou otáčení. Pokud by bylo nad ní, malá výchylka by způsobila překlopení. Z toho umíme vypočítat podmínku pro délku brčka.

$$\frac{r}{\sin \alpha} \leq l \leq \frac{2r}{\sin \alpha},$$

tj. že se brčko nesmí propadnout do misky (spodní mez) a že těžiště (o kterém předpokládáme, že je v polovině brčka) leží nejvýše na ose rotace.

Další podmínku můžeme klást na úhel spojení. Protože brčka musí mít volný prostor ke kmitání, musí platit $\alpha \geq \pi/4$.

Perioda malých kmitů

Nejprve se podíváme na moment setrvačnosti brček. Pokud tyč rotuje okolo kolmé osy procházející těžištěm, víme, že má moment setrvačnosti

$$J_T = \frac{1}{3}ml^2,$$

kde m je hmotnost tyče a l je její délka. Tyč, resp. brčko je ale skloněná (o úhel $\pi/2 - \alpha$) od horizontály a také nerotuje okolo osy procházející těžištěm. První problém vyřešíme úvahou, na druhý použijeme Steinerovu větu.

Představme si, že máme tyč, která rotuje okolo šikmé osy procházející těžištěm. Víme, že moment setrvačnosti je součet přes všechny hmotné elementy tyče ze součinu jejich hmotnosti

a kolmé vzdálenosti od osy. Tedy tyče jde jen o její průmět do roviny kolmé na osu. Protože jde o jednoduchý útvar, můžeme tak tyč považovat za kratší, s větší délkovou hustotou a hlavně kolmou na osu. Pokud zavedeme úhel odklonu α tak, aby se shodoval s geometrií soustavy brček, bude moment setrvačnosti tyče vůči šikmé ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{12} ml^2 \cos^2 \alpha.$$

Úhel α můžeme vyjádřit jako $\alpha = \pi/2 - \beta$, kde β je menší úhel mezi tyčí a osou.

K tomu, abychom mohli využít Steinerovy věty pro určení momentu setrvačnosti soustavy, potřebujeme znát polohu těžiště. Jsou-li splněny podmínky stability, těžiště se nachází v poloze r_T pod osou rotace

$$r_T = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

První člen odpovídá posunu od osy dolů do vrcholu věčka, druhý od vrcholu věčka nahoru do jeho poloviny.

Steinerova věta říká, že moment setrvačnosti tělesa vůči ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm (které přísluší moment J_0) vypočteme jako součet J_0 s mr^2 , kde m je hmotnost tělesa a r vzdálenost os. Pro případ s brčky tedy vychází

$$J = 2(J_0 + mr_T^2) = \frac{1}{6} ml^2 \cos^2 \alpha + 2mr_T^2.$$

Číslo 2 je ve vzorci proto, že věčko se skládá ze dvou stejných brček.

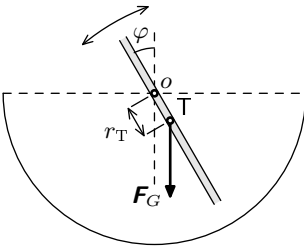
Teď už nic nebrání tomu, abychom začali řešit pohybovou rovnici. Použijeme její zápis jako diferenciální rovnici. Nebudeme ji řešit, jen ukážeme podobnost s rovnicí harmonického oscilátoru

$$J\varepsilon = M \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\varphi} = M.$$

Úhel φ představuje výchylku z rovnovážné polohy (viz obrázek 5).

Moment setrvačnosti jsme již vypočetli, moment síly také není těžké určit

$$M = -2mgr_T \sin \varphi,$$



protože síla budící pohyb je síla tíhová (opět $2m$ kvůli dvojnásobné hmotnosti brček), která působí v těžišti, jehož vzdálenost od osy známe. Ještě si uvědomíme, že malé výchylky umožňují použít aproximaci $\sin \varphi \approx \varphi$ (srovnej graf funkce $\sin x$ a x), a tedy můžeme pohybovou rovnici přepsat do tvaru

Obr. 5. Kmitání kolem osy

$$J\ddot{\varphi} + 2mgr_T\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2mgr_T}{J}\varphi = 0,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Napravo dostáváme rovnici harmonického oscilátoru (kyvadla) s úhlovou frekvencí ω^2 . Až na označení konstant a proměnných jsou to rovnice naprosto identické a proto můžeme říct, že i věčko z brček je harmonickým oscilátorem a jeho úhlová frekvence je

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgr_T}{J}}.$$

Hledanou periodu kmitů vypočteme již jednoduchým převodem ($T = 2\pi/\omega$) a dosazením za r_T a J z předchozích výpočtů.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{l \cos \alpha (2l \sin \alpha - 3r \cos \alpha)}{6r \cos \alpha - 3l \sin \alpha} \right)}.$$

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha III. P ... wassermánie (5 bodů; průměr 3,07; řešilo 14 studentů)

Voda má spoustu zajímavých, výjimečných a anomálních vlastností ve srovnání s jinými kapalínami. Podrobný výčet těchto anomálií lze nalézt na stránce <http://www.btinternet.com/~martin.chaplin/anmlies.html>. Zamyslete se, jaký tyto anomálie mají význam pro život na zemi, člověka a také techniku.

Mára poslouchal Meteor.

Jak je řečeno v zadání úlohy, voda má nejednu anomální vlastnost. Abychom měli práci jednodušší, byla nám přímo poskytnuta webová stránka, která všechny informace o anomáliích shrnuje. Za velkou část anomálních vlastností jsou zodpovědné nechvalně známé vodíkové můstky. Zamysleme se tedy nad tím, jak by se naše životy změnily, kdyby se voda nechovala anomálně. Byl by vůbec život tak jak jej známe možný?

To, co by nás mohlo praštit do očí jako první, je vysoká tepelná kapacita. Jak ovlivňuje náš život? Naše tělo je ze tří čtvrtin tvořeno vodou a povrch planety Země tvoří voda ze dvou třetin. Zkusme si představit, co by se stalo, kdyby voda měla nižší tepelnou kapacitu. Co by se dělo s naším tělem? Na sluníčku by se nám rychle začala vařit krev a vypařila by se nám z těla většina tekutin. (Naštěstí má voda i velkou výparnou teplotu, je tedy možné, že takové smrti bychom byli ušetřeni). Čekala by nás velmi rychlá dehydratace.

Jednoduše řečeno, voda našemu tělu zajišťuje termoregulaci. Díky ní jsme schopni přežít v obrovském rozpětí teplot (uvědomme si, že v létě máme třicetistupňová vedra a v zimě můžeme mít i dvacet pod nulou a ani jeden z těchto extrémů nás nepřipraví o život do deseti minut po vyjití ven).

Stejně to je i s naší planetou. Voda je nezbytná pro regulaci teplot. Pro ilustraci stačí jednoduchý příklad. Ocitneme-li se na poušti, kde je malá vlhkost vzduchu a voda se tam skoro nevyskytuje, budeme vystaveni velkým výkyvům teplot. V noci se neobejdeme bez teplého spacáku a pořádného oblečení, a přes den je zase teplo, že můžeme chodit v šortkách a tričku. A tenhle teplotní výkyv nastane prakticky ihned po západu, resp. východu Slunce. V tropech se naopak noční teplota od té denní moc neliší, teplo je tam pořád. Krom toho tuto vlastnost vody využíváme velmi často při chlazení nebo naopak při topení.

Další a velmi známou anomální vlastností je fakt, že voda má nejvyšší hustotu při 4 °C a při mrznutí expanduje. Jak se tato anomálie projevuje? Kdyby neexistovala, těžko by se ve vodních nádržích udržel nějaký život. Ochlazujeme-li vodu pod zmíněné 4 °C, její objem poroste a klesne hustota. Takováto voda se dostane na povrch vodní plochy, kde se její teplota nadále snižuje, až zmrzne. Dole pak zůstane voda s nejvyšší hustotou, která poskytuje útočiště rybám a dalším obyvatelům vod.

S roztažností vody při chladnutí a faktu, že voda je dobrým rozpouštědlem souvisí také eroze. Nateče-li voda do puklinky ve skále a zmrzne, puklinka se signifikantně rozšíří a naruší strukturu skály. Stejný efekt postihuje cesty po zimě, proto jsou každoročně tak rozbité (řidiči jistě ví své). Vraťme se ale ke zmíněné skále. Eroze jako taková je nezbytná pro formování

půdy. Kdyby zůstaly skály skalami, sotva by se nějaká půda vytvořila. S tím souvisí i to, že omílá-li voda skály v na minerály bohaté oblasti, snadno s sebou odnáší právě ony minerály, které se v ní rozpouštějí. Koneckonců i to má pozitivní účinky na náš organismus. Kdyby voda nebyla dobrým rozpouštědlem, těžko by se nám po těle transportovaly živiny.

Další anomální vlastností vody je její nebývale vysoké povrchové napětí. Podíváme-li se do tabulky, zjistíme, že hned po rtuti má voda druhé nejvyšší povrchové napětí. To umožňuje nejednomu vodnímu živočichovi pohyb po vodě. Takle anomálie nemá vliv pouze na vodní živočichy, ale i na člověka. S vysokým povrchovým napětím souvisí kapilární jevy, které hrají důležitou roli v lidském těle a u rostlin. Nebýt kapilárních jevů, rostliny by nebyly schopny transportovat vodu od kořenů do listů.

Mezi anomální vlastnosti vody řadíme také její nízkou teplotní roztažnost. Kdyby tomu tak nebylo, celý systém topení by nám byl k ničemu. Jen co bychom zvýšili teplotu v trubkách, roztrhali bychom je. Tuhle anomálii oceníme zejména pohybujeme-li se v technických kruzích.

Tento výčet anomálií vody, které mají přímý vliv na nás a svět okolo by se samozřejmě dal rozšířit. Vypsány jsou jen ty, jejichž vliv je nejvýraznější už první pohled.

Jana Poledníková

janap@fykos.cz

Úloha III. E ... papír (8 bodů; průměr 5,11; řešilo 9 studentů)

Změřte, jak závisí průsvitnost papíru na úhlu, pod kterým je sklopený. Máme soustavu oko papír žárovka v jedné přímce. Měříme závislost intenzity prošlého světla na úhlu stočení papíru vzhledem k ose aparatury. *Oči si vypálil Jakub*

V této experimentální úloze zkoumáme velice komplexní případ; k měřenému signálu přispívá hned několik jevů. Proto bychom v teoretické části měli provést výčet těchto jevů, pokusit se je srovnat podle významu, uvést případné zjednodušující předpoklady a na závěr navrhnout vhodnou modelovou funkci.

Teorie

- Kancelářský papír je bílý a velké množství světla se od jeho povrchu odráží. Budeme-li předpokládat, že intenzita odraženého světla nezávisí na úhlu dopadu, pak můžeme tento jev zahrnout do veličiny I_0 , tedy intenzity světla na vstupu do materiálu papíru čili efektivní intenzity světla vycházejícího ze zdroje.
- Největší část světla se pohlcuje v materiálu papíru. Materiál budeme v prvním přiblížení považovat za homogenní (v každém místě objemu jsou stejné vlastnosti) a izotropní (v každém směru budou platit dále uvedené vztahy). Pak můžeme využít Lambertův-Beerův zákon pro intenzitu světla po průchodu absorbujičím materiálem tloušťky d

$$I_{\max} = I_0 e^{-\kappa d},$$

kde κ je absorpční koeficient a I_0 je intenzita světla vycházejícího ze zdroje (na vstupu).

- Významná část světla se rozptýlí do jiných směrů, než byl původní směr chodu paprsků ze zdroje. Rozptyl nastává jak v objemu, tak na povrchu papíru, nicméně popis těchto případů by byl velmi složitý s ohledem na složitější strukturu kancelářského papíru. Pokud posvítíme na kancelářský bílý papír ze zadu např. červeným laserovým ukazovátkem, uvidíme zepředu v místě dopadu laserového paprsku jasnou stopu. Tato stopa bude velmi dobře patrná, i když se na plochu papíru podíváme z velmi šikmého úhlu. Tzn. na povrchu

kancelářského papíru se světlo po průchodu rozptyluje prakticky do všech směrů daného poloprostoru. V prvním přiblížení můžeme pro velmi šikmé úhly jeho intenzitu považovat za konstantu I_{bg} . Do této konstanty pak v principu můžeme zahrnout případné světelné pozadí (background).

Zmínili jsme nejnvýznamnější jevy a příspěvky k měřenému signálu. Zbývá dorešit geometrii úholy, jak se změní intenzita světla $I(\alpha)$ při naklonění kancelářského papíru o úhel α . Očekáváme, že pro kolmý dopad ($\alpha = 0$) naměříme právě maximální možnou intenzitu $I(0) = I_{max}$, pro niž platí Lambertův-Beerův zákon výše. Tento zákon použijeme díky předpokladům homogenity a izotropie i v případě náklonu papíru o úhel α , kdy přímý paprsek ze zdroje prochází efektivně silnější vrstvou materiálu papíru. Pro efektivní tloušťku pak z geometrie platí $d(\alpha) = d / \cos \alpha$. Tloušťku papíru d i počáteční (vstupní) intenzitu světla I_0 jsme zavedli výše, proto můžeme zapsat Lambertův-Beerův zákon pro námi zkoumanou závislost

$$I(\alpha) = I_0 e^{-\kappa d(\alpha)}.$$

Nyní můžeme zformulovat modelovou funkci, kterou se pokusíme proložit experimentální body změřené závislosti $I(\alpha)$.

$$I(\alpha) = I_0 e^{-\kappa d / \cos \alpha} + I_{bg} = I_0 \left(e^{-\kappa d} \right)^{1 / \cos \alpha} + I_{bg} = I_0 K^{1 / \cos \alpha} + I_{bg}.$$

K měřenému signálu tedy přispívá zeslabená světelná intenzita ze zdroje kvůli absorpci v materiálu a dále intenzita světla rozptýleného povrchem papíru, které vstupuje do detektoru z větší plochy papíru, je-li tento papír nakloněn zejména pod většími úhly, příp. z pozadí. Budeme měnit úhel náklonu papíru α , změříme příslušnou intenzitu zeslabeného světla $I(\alpha)$ a koeficienty I , K a I_{bg} získáme proložením experimentálních bodů modelovou funkcí. Pokud bychom neměli jistotu v odečítání úhlu α , pak bychom mohli ještě přidat počátek odečítání úhlu, tzn. kosinus by měl argument $\alpha - \alpha_0$.

Experiment

Pomůcky: kancelářský papír „office paper 80 g · m⁻²“; souprava ISES připojená k PC, modul optická závora (obsahuje fotodetektor a zdroj – IR dioda); dvakrát laboratorní stojan a svorka (jeden drží optickou závoru, druhý rovný proužek kancelářského papíru a ukazatel k odečítání úhlu náklonu), kartón pro vyznačení úhlu náklonu, izolepa, propiska. Rovnost vzorku papíru můžeme zajistit ohnutím podél delšího okraje a následnou kontrolou rovinnosti.

Podmínky: vzdálenost vysílače a fotodetektoru optické závory: 27 mm, teplota: 24 °C; měření v zatemněné místnosti (pozadí zanedbatelné).

Postup měření: Nastavíme velký úhel (jak nám dovolí délka optické závory), kdy máme nejmenší signál, a vyznačíme polohu ukazatele úhlu natočení na kartónu. Vzorek kancelářského papíru je vždy umístěn uprostřed mezi vysílačem a detektorem optické závory. Dále zmenšujeme úhel α a po ustálení signálu zaznamenáme polohu ukazatele na kartón – opakujeme do kolmé polohy vzorku papíru vůči ose optické závory. Ideálně změříme aspoň 10 bodů závislosti $I(\alpha)$.

Zpracování a výsledky měření: Zde jsme si tedy nepřípravili předem žádnou úhlovou stupnici, ale zaznamenali jsme všechny měřené polohy (sklony) papíru. Tento úhel sklonu α můžeme vyhodnotit z našich rysek na kartónu např. pomocí triangulace – použití věty kosinové. Příslušnou intenzitu světla měřenou detektorem odečítáme z grafu v ovládacím programu soupravy

ISES, samozřejmě s odhadem možné chyby měření. Výsledky jsou uvedeny v tabulce, intenzita světla je uvedena v relativních jednotkách.

Tab. Naměřená data

α [°]	α [rad]	$I(\alpha)$	Chyba $I(\alpha)$
66,3	1,157	0,07	0,01
64,8	1,132	0,08	0,01
62,8	1,097	0,09	0,01
60,5	1,056	0,10	0,01
57,9	1,011	0,11	0,01
54,5	0,952	0,14	0,01
50,7	0,886	0,16	0,01
46,6	0,813	0,18	0,01
42,3	0,738	0,22	0,01
35,9	0,627	0,26	0,01
30,9	0,538	0,30	0,01
25,8	0,450	0,33	0,01
20,0	0,349	0,36	0,01
14,6	0,254	0,39	0,01
9,1	0,160	0,41	0,01
0,0	0,000	0,42	–

Pro grafické zpracování v programu gnuplot použijeme zejména tyto příkazy (za úhel dosazujeme hodnoty z druhého sloupce v radiánech):

```
I(x)=I0*K**(1/cos(x))+Ibg
fit I(x) 'data.txt' using 2:3 via I0,K,Ibg
plot I(x), 'data.txt' using 2:3:4 with yerrorbars
```

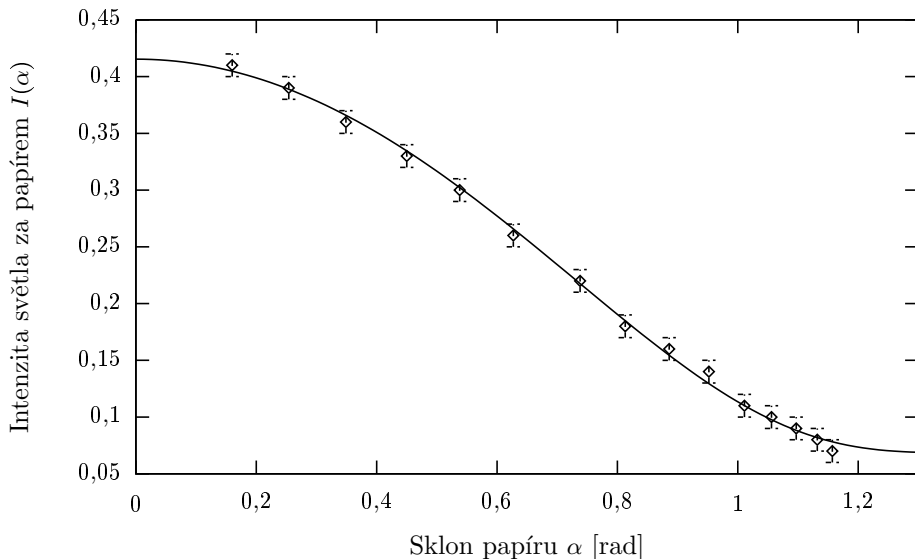
Výstup příkazu fit:

```
I0 = 3.82714 +/- 0.3289 (8.595%)
K = 0.0906561 +/- 0.008188 (9.032%)
Ibg = 0.0684463 +/- 0.004129 (6.033%)
```

Z grafu je patrné, že všechny experimentální body jsou v souladu s teoretickou závislostí, tedy zvolili jsme vhodnou modelovou funkci a učiněné předpoklady byly oprávněné. Případné větší odchylky lze snadno zdůvodnit lokální neplatností předpokladů, zejména homogenity a izotropie, příp. větším rozptylem na povrchu papíru do určitého směru. Z výstupu příkazu fit dále vidíme, že intenzita světla na vstupu je asi $(3,8 \pm 0,4)$ a intenzita světla od pozadí (resp. rozptylu při velkých úhlech sklonu) je $(0,068 \pm 0,004)$, obojí v relativních jednotkách. Z bezrozměrného koeficientu K bychom se znalostí tloušťky papíru mohli určit absorpční koeficient κ .

Závěr

Proměřili jsme závislost intenzity prošlého světla kancelářským papírem v závislosti na úhlu náklonu papíru a navrhli jsme modelovou funkci, která je v dobrém souladu s experimentálními daty. Měření je však zatíženo většími chybami výsledných parametrů a příp. většími odchylkami od teoretických hodnot pravděpodobně z důvodu lokálního porušení zjednodušujících předpokladů.

Obr. 6. Graf závislosti $I(\alpha)$ s naměřenými hodnotami*Poznámky k došlým řešením*

Někteří řešitelé přišli se zajímavými nápady, jak měření realizovat (použití laseru – dobře definovaný světelný svazek, použití fotovoltaického článku jako detektoru s předpokladem jeho linearitu). Bohužel se však objevily hrubé chyby v odvození správného tvaru modelové funkce (úpravy výrazů pomocí základních vztahů pro mocniny): mnozí uvažovali násobení/dělení faktorem $\cos \alpha$, avšak jak jsme odvodili, tento faktor se vyskytuje v exponentu mocninné funkce! Dalším kamenem úrazu bylo správné používání veličin $I(\alpha)$, I_0 a I_{\max} , resp. úvahy o nich. Bohužel nikdo si nevzpomněl na příspěvek pozadí, resp. neuvědomil si příspěvek rozptýleného světla pro více šikmé úhly sklonu papíru. Proto mnohým nemohl program gnuplot optimálně proložit vaše experimentálně zjištěné body.

Pavel Brom
paja@fykos.cz

Úloha III. S ... hluboká orba (6 bodů; průměr 4,33; řešili 3 studenti)

- Dopočítejte fyzikální význam konstanty a pro funkci $f(z) = ai/z$, znáte-li délkovou hustotu náboje τ .
- Vypočítejte a nakreslete ekvipotenciály a silokřivky pole v okolí rohu, který má vrcholový úhel ϑ . Nápověda: použijte funkci tvaru $w(z) = Az^s$, kde s je vhodná reálná konstanta.
- Určete pole, které generuje elektrický dublet. Dublet jsou dvě tyče vzdálené d s opačnou nábojovou hustotou, přičemž $d\tau = \text{konst.}$ Zajímá nás limita $d \rightarrow 0$. Malá nápověda: platí $\ln(1+x) \approx x$ pro x blízké 0.
- Rozmyslete si, co se stane, pokud existující komplexní potenciál $w(z)$ zobrazíme jinou holomorfní funkcí $v(z)$. Bude potenciál tvaru $v(w(z))$ i nadále řešit rovnice elektrostatiky?

Vymyslel Lukáš z dlouhé chvíle

Neznámá konstanta

Podle zadání odpovídá $f(z)$ vodiči s konstantní délkovou hustotou náboje, pro který platí podle posledního vzorce $E = a/r$, kde r je vzdálenost od vodiče. U takového vodiče však snadno spočteme z Gaussova zákona. Představme si válec délky l , jehož osou je nabitá přímka. Náboj v tomto válci je $l\tau$, kde τ značí délkovou hustotu náboje na přímce. Z translační symetrie má pak elektrické pole na podstavách stejný směr, ale kvůli opačným normálám se při průmětu na normálu plochy vyruší. Zbude tak jen člen na plášti, kde má pole E stejnou velikost a normálový směr, takže platí

$$\frac{l\tau}{\varepsilon_0} = 2\pi r E \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Ekvipotenciály v koutě

Podle zadání by měl být vhodný komplexní potenciál $w(z) = Az^s$. Pro klasický potenciál by tudíž platilo

$$\varphi = -\operatorname{Im} w(z) = -\operatorname{Im} A|z|^s(\cos s\alpha + i \sin s\alpha) = -A|z|^s \sin s\alpha,$$

takže ekvipotenciály by měly tvar

$$C = |z|^s \sin s\alpha \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt[s]{\frac{C}{\sin s\alpha}}.$$

s -tá odmocnina je ovšem prostá funkce a závislost $|z| = |z|(\alpha)$ si můžeme představit v polárním grafu. Pokud se jmenovatel blíží k nule (uvažujme jen úhly, kde je $\sin s\alpha > 0$), vzdálenost roste nade všechny meze. Závislost má tedy tyto vlastnosti:

- roste nade všechny meze pro $\alpha \rightarrow 0^+$ a $\alpha \rightarrow \pi/s^-$,
- je monotónní v intervalech $(0, \pi/2s)$ a $(\pi/2s, \pi/s)$,
- minima nabývá tudíž pro $\alpha = \pi/2s$, kdy $|z|_{\min} = \sqrt[s]{C}$ a platí, že pro $C \rightarrow 0$ je i $|z|_{\min} \rightarrow 0$.

Z těchto tří vlastností plyne, že uvažovaná funkce je skutečně tím správným potenciálem, který odpovídá potenciálu v rohu o vrcholovém úhlu ϑ , pokud volíme $\vartheta = \pi/s$. Silokřivky se pak spočtou z původního potenciálu jako komplexní derivace, čili $f(z) = w'(z) = E_y + iE_x$. V tomto případě je

$$f(z) = E_y + iE_x = As|z|^{s-1}(\cos(s-1)\alpha + i \sin(s-1)\alpha).$$

Dublet

Umístíme obě tyče tak, aby protnulý komplexní rovinu v reálných bodech $\pm d/2$. Nechť mají tyče délkovou hustotu náboje $\pm\tau$. Podle zadání máme zřejmě vypočítat ekvipotenciály elektrického pole. Potenciál pro obě tyče je dán

$$w = w_+ + w_- = ia \ln(z - d/2) - ia \ln\left(z + \frac{d}{2}\right) = ia \ln\left(1 - \frac{d}{z + \frac{d}{2}}\right),$$

kde lze pro $d \ll |z|$ použít přiblížení $\ln(1+x) \approx x$ platné pro $x \rightarrow 0$ uvedené v zadání (to lze splnit, pokud budeme tyče blížit k sobě $d \mapsto d/N$ a zároveň zvyšovat délkovou hustotu

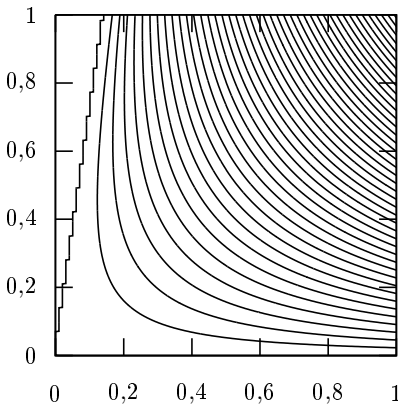
$\tau \mapsto N\tau$, přičemž $d\tau$ zůstává konstanta a přejdeme $N \rightarrow \infty$. Pak platí

$$w = ia \left(-\frac{d}{z + \frac{d}{2}} \right) \approx -\frac{iad}{z}.$$

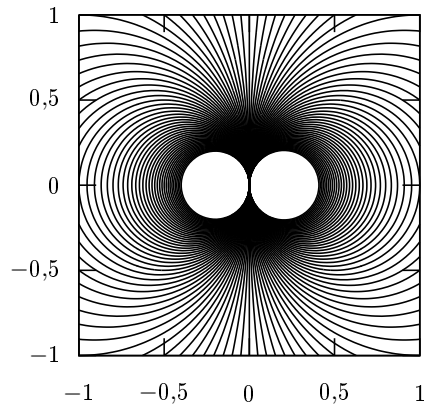
Použijeme-li výsledek z první části úlohy $a = \tau/(2\pi\varepsilon)$, pro potenciál plyne

$$\varphi = -\operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im} \frac{iad\bar{z}}{|z|^2} = \frac{d\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{x}{|z|^2}.$$

čili ekvipotenciály mají tvar kružnic lokalizovaných vždy v jedné polorovině, pro které se se zvětšujícím poloměrem posouvá střed směrem od druhé tyče.



Obr. 7. Ekvipotenciály v koutě



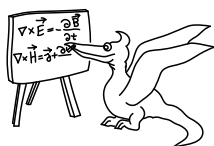
Obr. 8. Ekvipotenciály v okolí dubletu

Skládání holomorfních potenciálů

Není pochyb o tom, že složením holomorfních funkcí dostaneme opět holomorfní funkci (připomeňme si, že holomorfní funkce má kroučivou vlastnost a že složením dvou funkcí dostaneme opět funkci s kroučivou vlastností, takže malé čtverečky se opět zobrazí na malé čtverečky).

Ovšem v diskuzi ve třetí kapitole jsme ukázali, že jakákoliv holomorfní funkce $f(z)$ splňuje rovnice elektrostatiky (až na okrajové podmínky, tj. potenciál na vodičích). Ale teď máme zadaný holomorfní komplexní potenciál $w(z)$, který má z definice holomorfnosti i holomorfní derivaci $f(z)$ a tudíž příslušná elektrická intenzita opět splňuje rovnice elektrostatiky. Jediná věc, na kterou si musíme dát pozor, aby rovněž splňovala okrajové podmínky, tj. potenciály na vodičích.

Jakub Michálek
jmi@fykos.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Möbiova transformace

V poslední úloze minulé kapitoly jsme dokázali jednoduchým způsobem větu, podle které libovolný holomorfní obraz řešení rovnic elektrostatiky rovněž splňuje rovnice elektrostatiky, ovšem je potřeba zvlášť ošetřit okrajové podmínky. Teď v tomto problému pokročíme.

Obecné pojednání o transformacích

Probereme nyní první z řady transformací. Co je to taková transformace? Nejprve motivační příklad: Stojíte přede dveřmi, kterými máte protáhnout stůl, který má vodorovné rozměry větší než šířka dveří. Jak jen protáhnout stůl dveřmi, aniž byste cokoliv poškodili a neporušili žádný fyzikální zákon?

Naštěstí existuje jednoduchý způsob. Stůl přetransformujeme, čímž získáme úlohu, která má jednoduché řešení, a provedeme zpětnou transformaci. V tomto případě se transformace provede prostě tak, že se stůl otočí na svislo, kdy lze dveřmi snadno projít. Nakonec provedeme inverzní transformaci, která stůl zase postaví na nohy.

Krátce, transformace umožňují přepsat úlohu, u které řešení neznáme, na úlohu, kde ho jsme schopni (většinou snadno) zjistit. Inverzní transformace převádí řešení jednoduché úlohy zpět na původní úlohu; existenci inverzní transformace budeme v dalším vždy požadovat.⁵ Často také nazýváme původní úlohu vzor a transformovanou obraz.

Möbiova transformace je jedna z řady komplexních transformací.⁶ Postupně se seznámíme i s transformací Fourierovou (neboli spektrem) a transformací Laplaceovou, které se úzce pojí s komplexními čísly. V klasické mechanice a termodynamice se používá Legendrova transformace (impulsový prostor). Nemí to tak složité, jak se na první pohled zdá. Prostě už nepopisujeme funkce v kartézských souřadnicích jako obvykle, ale pomocí spektra (Fourier) nebo pomocí absolutního členu a derivace (Legendre). Nejbanálnějšími příklady transformací jsou transformace souřadnic (otočení os, posunutí, přechod do sférických souřadnic); to byl ostatně i příklad našeho stolu.

Řada fyzikálních zákonů je formulována jako invariance (neměnnost) vůči určitým transformacím; například kvantová mechanika je důsledkem invariance vůči Galileově transformaci. Jistě znáte i Lorentzovou transformaci, vůči níž jsou přírodní zákony invariantní, i když se blížíme rychlostem světla.

Starý známý: Kruhová inverze

Kruhová inverze podle kružnice K je geometrické zobrazení komplexní roviny do sebe, které prohodí vnitřek a vnějšek kružnice. Stejně definujeme sdružené body pro osovou souměrnost, středovou souměrnost atp., definujeme i kruhovou souměrnost: Dva body jsou souměrné právě tehdy, pokud leží společně se středem kružnice K na přímkě a součin jejich

⁵⁾ Proto například neidentickou projekci mezi transformace neřadíme.

⁶⁾ Pro krásný a názorný úvod doporučujeme dvouminutové video na stránce

<http://www.ima.umn.edu/~arnold/Mobius>.

vzdáleností od středu se rovná poloměru kružnice na druhou. Zkuste použít Eulerovu větu o odvěsně, abyste získali názornou geometrickou představu.

Nejzajímavější fakt ohledně kruhové inverze je, že zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice.⁷ Pro důkaz si stačí uvědomit, že osa osové souměrnosti vzorové kružnice, která prochází středem kružnice K vytíná na vzorové kružnici průměr. Vzorová kružnice je tedy Thaletovou kružnicí průměru. Nicméně průměr se zobrazí na jiné dva body na ose a z podobnosti trojúhelníku lze vyvodit, že obraz bodu na vzorové kružnici tvoří s body průměru opět pravoúhlý trojúhelník, takže obrazem je opět Thaletova kružnice průměru. Odsud lze již snadno vyvodit, že kruhová inverze je antikonformní zobrazení (zachovává velikost úhlu, ale mění jeho znaménko).

Kruhovou inverzi lze použít na fyzikální úlohu, jejímž řešením jsou harmonické funkce. Pokud už jedno řešení máme, můžeme ho kruhovou inverzí zobrazit na jiné řešení, které má fyzikální význam.

Möbiova rovina

Občas je užitečné se dívat na body v komplexní rovině jako na faktorprostor dvojice komplexních rovin. To znamená, že o dvou dvojicích (p, q) a (r, s) řekneme, že jsou ekvivalentní, pokud platí $ps = rq$. Jinými slovy význam má pouze formální podíl $(p, q) \sim p/q \sim pc/qc$ (homogenní souřadnice⁸). Takto dostaneme třídu ekvivalentních dvojic, která je izomorfní původní komplexní rovině. Až na jednu výjimku! Prvky jedné třídy ekvivalence mají tvar $(a, 0)$ – těmto prvkům je zvykem říkat nekonečno a značit je ∞ (to lze formálně zjistit ze vztahu „ $a/0 = \infty$ “). Alternativním způsobem, je rozšířit rovinu o bod, který se v kruhové inverzi zobrazí na její střed. Tak jako tak získáme novou množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kterou nazýváme Möbiova rovina.

Proto lze také na rozdíl od komplexní roviny zobrazuje Möbiova transformace Möbiovu rovinu samu na sebe, a to vzájemně jednoznačně (dokažte).

Möbiova transformace

Möbiovu transformaci Möbiovy roviny definujeme jako lineárně lomené zobrazení komplexní roviny na sebe

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

kde $ad - bc \neq 0$ jsou komplexní konstanty (tuto podmínku zveme podmínka regulárnosti, speciálně bereme nenulové číslo jako jedna; není-li splněna, dává zobrazení konstantu).

Konstrukcí homogenních souřadnic výše popsaným způsobem lze zjednodušit některé důkazy (viz následující text), protože Möbiova transformace v nich má význam prostě násobení čtvercovou maticí 2×2 . Součin dvou regulárních matic je ovšem opět regulární matice (výsledná Möbiova transformace tudíž zase splňuje podmínku regulárnosti, resp. unimodularity).

Möbiova transformace Möbiovy roviny vznikne vhodným rozšířením transformace komplexní roviny; pak lze odvodit následující tvrzení:

- a) Möbiova transformace je složení posunutí, otočení, kruhové inverze, komplexního sdružení a roztážení.
- b) Möbiova transformace je holomorfní funkce (důsledek a).

⁷⁾ Zobecněnými kružnicemi se zde rozumí kružnice a přímky.

⁸⁾ Homogenní souřadnice hrají například klíčovou roli v geometrické optice.

- c) Möbiova transformace zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice (důsledek a).
- d) Möbiova transformace je konformní zobrazení neboli zachovává úhly (důsledek c).
- e) Složením dvou Möbiovy transformací vznikne opět Möbiova transformace, inverzní transformace je opět Möbiova (transformace tvoří grupu).
- f) Möbiova transformace má nejvýše dva pevné body, pro které je $Mz = z$.

Penroseho konstrukce a Riemannova sféra

Po úvodním výkladu Möbiovy transformace je čas přehodnotit naše pojetí komplexního čísla. Představme si pevný světelný zdroj, který se zableskne ve všech směrech. To znamená, že do všech směrů⁹⁾ (ϑ, φ) vyšle foton (fotony mají rychlost světla, kterou uvažujeme jednotkovou). Ukážeme způsob, jak každému fotonu přiřadit komplexní číslo. Roger Penrose navrhl tuto konstrukci: Zdroj Z se vznáší na pevném místě jednotku nad komplexní rovinou. V okamžiku záblesku se komplexní rovina začne přibližovat ke zdroji jednotkovou rychlostí. Rychlost kolmá na komplexní rovinu se rovná $\cos\vartheta$, čili foton dopadne na komplexní rovinu za čas

$$\frac{1}{1 + \cos\vartheta} = \frac{1}{2 \cos^2\vartheta}$$

na bod komplexní roviny

$$z = e^{i\varphi} \cotg\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (5).$$

Tím jsme každému fotonu záblesku přiřadili číslo z z komplexní roviny.

Klasický způsob ovšem využívá Riemannovu sféru \mathbb{S} : Uvažujme nad počátkem O komplexní rovinou zdroj Z světla v jednotkové vzdálenosti od komplexní roviny. Riemannovou sférou nazýváme sféru s průměrem OZ . Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi \mathbb{C} a \mathbb{S} definujeme tak, že bod na Riemannově sféře a bod v komplexní rovině leží na paprsku, který vychází ze zdroje Z . Nevlastní bod Möbiovy roviny ∞ identifikujeme se zdrojem Z . Ověřte, že zavedením sférických souřadnic (ϑ, φ) dostaneme vztah (5).

Takto definovaná stereografická projekce zobrazuje zobecněné kružnice v Möbiově rovině na kružnice na Riemannově sféře. To zjevně platí pro přímky v komplexní rovině, které odpovídají kružnicím na Riemannově sféře procházejícím zdrojem Z . Odsud rovněž vyplývá, že dvě kružnice na Riemannově sféře se protínají pod stejným úhlem jako vzorové přímky.

Jak to vypadá pro kružnice? Pomůžeme si malou obezličkou: Zobrazení na Riemannovu sféru není totiž nic jiného, než jistá speciální kulová inverze kolem sféry K . Vskutku: Hledáme takovou sféru, ve které se komplexní rovina zobrazí kulovou inverzí na Riemannovu sféru. Tato sféra musí zcela jistě procházet počátkem O a musí mít střed ve zdroji Z . Ze symetrie jde tedy o sféru s průměrem OZ . Z toho je i zřejmé, že obrazem zobecněné kružnice v komplexní rovině je kružnice na Riemannově sféře, protože vzorová kružnice je průnikem koule a roviny, které se obě zobrazí na koule, jejichž průsečíkem je vždy kružnice.

Dokážeme teď konečně tvrzení, které nám přinese geometrický vhled do Möbiovy transformace. Möbiova transformace je vzájemně jednoznačné zobrazení Riemannovy sféry na sebe, které lze složit z rotací a posouvání Riemannovy sféry v prostoru. Probereme nejprve rotace: Uvažujme dva body p a q na Möbiově rovině (Riemannově sféře); rotace R zachovávají skalární součin, čili dostaneme $(p, q) = (Rp, Rq) = (p, R^+Rq)$, takže tvrzení je splněno,

⁹⁾ Jak je zvykem, značíme ϑ úhel svírající s osou z a φ azimutální úhel.

pokud $R^+R = 1$ neboli $R^+ = R^{-1}$. V konkrétním vyjádření homogenních souřadnic jsou operátory R matice 2×2

$$R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Proto každé rotaci Riemannovy sféry odpovídá Möbiova transformace

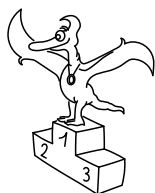
$$Rz = \frac{az + c}{-\bar{c}z + \bar{a}}.$$

Situace $a = 0$, $c = 1$ odpovídá převrácené hodnotě se změnou znaménka. Pro ostatní zobrazení je situace jednodušší: Posunutí sféry odpovídá posunutí komplexní roviny, oddálení sféry odpovídá kontrakci komplexní roviny.

Tím jsme položili základní geometrické představy, jejichž fyzikální aplikaci rozvineme v příští kapitole seriálu.

Úloha IV . S ... Möbiova transformace a konformní zobrazení

- Dokažte tvrzení d), podle něhož Möbiova transformace zachovává úhly. Jedna z možností je uvědomit si, že v kruhové inverzi existují kružnice, které se zobrazují samy na sebe.
- Najděte podmínku na koeficienty Möbiovy transformace, aby zobrazovala komplexní kruh na komplexní kruh ($|z| \leq 1$) a najděte konkrétní transformaci, která zobrazuje komplexní kruh na horní komplexní polorovinu. Co to fyzikálně znamená?
- Podle teorie relativity se tělesa pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla zkracují (Lorentzova kontrakce). To ovšem ještě neznamená, že bychom je viděli kratší (například, že bychom místo pohybující se koule viděli pohybující se elipsoid). Využijte představy, který jsme v tomto díle vybudovali, abyste odvodili, že předměty letící rychlostí světla vidíme o kousek pootočené, nikoliv zkrácené (Terellova rotace).



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	35	100	105
1. <i>Tomáš Kořínek</i>		2	3	-	-	2	-	-	7	40	22
2.-4. <i>Jan Palounek</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	60	6
<i>Karolína Šromeková</i>	G D. Tatarku, Poprad	-	-	-	-	3	3	-	6	46	6
<i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	3	-	-	-	-	-	-	3	50	6

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	35	100	105
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	4	-	-	4	-	8	4	20	90	83
2. <i>Jakub Kubečka</i>	G, Nymburk	2	-	-	1	3	-	-	6	47	32
3. <i>Tomáš Bárta</i>	G, Nad Štolou Praha	2	2	-	2	-	-	-	6	49	30
4. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	67	24
5. <i>Ondřej Míl</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	4	4	-	-	-	8	79	19
6.-7. <i>Jakub Maksymov</i>	G a SOŠ, Jaroměř	-	-	-	-	-	-	-	0	60	18
<i>Gabija Maršalkaitė</i>	Vilniaus jezuitu gimnazija	2	-	-	-	-	-	-	2	60	18
8. <i>Peter Kosec</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	69	9
9. <i>Kristýna Nešporová</i>	G, Boskovice	2	-	-	-	-	-	-	2	47	8
10.-12. <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	41	7
<i>Samuel Havadej</i>	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	0	54	7
<i>Bedřich Said</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	-	-	-	-	-	-	-	0	41	7
13. <i>Alena Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	1	-	-	-	-	-	-	1	42	5
14. <i>Nicola Burianová</i>	G, Dašická, Pardubice	1	-	-	-	2	1	-	4	24	4
15. <i>Gita Steponavičiute</i>	Vilniaus jezuitu gimnazija	-	-	-	-	-	-	-	0	60	3
16. <i>Pavel Kratochvíl</i>	VOŠ, G a SOŠ, Světlá n. Sáz.	1	-	-	-	1	-	-	2	22	2
17.-18. <i>Lucia Filová</i>	Hotelová akadémia, Brezno	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
<i>Patrik Švančara</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	13	1
19. <i>Jan Česal</i>	SPŠ Otrokovice	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	35	100	105
1. <i>Jakub Šafín</i>	G, P. Horova, Michalovce	2	-	4	3	4	7	6	26	67	65
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	3	-	4	-	5	8	-	20	77	41
3. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	-	-	-	-	5	-	-	5	67	38
4. <i>Tomáš Arman</i>	G, Boskovice	1	-	-	-	5	6	-	12	53	34
5. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	3	-	-	1	5	4	-	13	44	32
6. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	-	-	-	-	-	-	-	0	55	22
7. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	1	-	0	-	3	-	-	4	42	18
8. <i>Martin Gajdošík</i>	G, Uherské Hradiště	1	-	-	-	1	-	-	2	61	17
9. <i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	52	13
10. <i>Jiří Juřena</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	85	11
11. <i>Lukáš Fusek</i>	G, Uherské Hradiště	1	-	-	-	1	-	-	2	47	9
12. <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	0	47	8
13.-14. <i>Giedre Balakauskaitė</i>	Vilniaus jezuitu gimnazija	-	-	-	-	-	-	-	0	20	5
<i>Markéta Tesařová</i>	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	0	56	5
15. <i>Vladan Glončák</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	1	-	-	-	-	-	-	1	31	4
16. <i>Vojtěch Erbrt</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	0	25	3
17.-18. <i>Klára Kymlová</i>	G a SOŠE, Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2
<i>Klaudia Mráziková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2
19. <i>Morta Plyčiuraityte-Pl.</i>	Vilniaus jezuitu gimnazija	-	-	-	-	-	-	-	0	6	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	35	100	105
1. <i>Martin Bucháček</i>	G Luďka Pika, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	0	79	22
2. <i>Jan Sopoušek</i>	Gymnázium, Brno-Řečkovice	3	-	-	3	3	-	-	9	50	18
3. <i>Jan Brandejs</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	65	17
4.-5. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	-	-	-	-	-	4	-	4	44	16
<i>Ivo Vinklárek</i>	G, Rožnov p. Radhoštěm	-	-	-	-	-	-	-	0	55	16
6. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	2	-	-	-	-	5	-	7	37	14
7. <i>Vojtěch Havlíček</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	83	10
8. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	43	9
9. <i>Ján Pulmann</i>	G Grösslingova, Bratislava	-	-	-	4	-	-	-	4	88	7
10.-11. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	50	5
<i>Jakub Kocák</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	-	-	-	-	-	-	0	63	5
12. <i>Tomáš Havelka</i>	G, Neumannova, Žďár n. S.	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
13. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	3	3	50	3

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

FYKOS je také na Facebooku

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.