

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

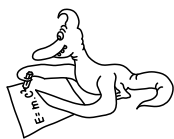
dvacátý devátý ročník FYKOSu je za námi. Děkujeme všem, kteří se v uplynulém roce našeho korespondenčního semináře účastnili, a vítězům srdečně blahopřejeme. V průběhu června obdržíte e-mail, v němž si na základě svého bodového zisku budete moci vybrat odměnu.

FYKOS si dává přes léto pauzu, ale pokud by se vám po našich úlohách stýskalo, můžete začít první sérii třicátého ročníku řešit už nyní. Na webu si jistě všimnete, že za úlohy je možné získat o polovinu více bodů než dříve. Věříme, že díky širší bodové škále budeme schopni vaše řešení spravedlivěji hodnotit.

Také je již znám termín podzimního soustředění 24. 9. až 2. 10. 2016. Pokud jste se umístili na předních příčkách, můžete si tento termín tužičkou zaznamenat do kalendáře. Pokud jste už moc velké děti a soustředění se nemůžete zúčastnit, protože budete nastupovat na Matfyz (tolerujeme i jiné školy, např. Cambridge), tak bychom vás rádi pozvali do organizátorských rad. Ozvat se nám můžete již nyní, nebo si s námi můžete promluvit osobně po prázdninách na úvodním srazu.

To je pro tento ročník vše – užívejte si prázdniny a propagujte FYKOS!

Organizátoři



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... mám toho plnou hlavu

2 body; průměr 1,37; řešilo 49 studentů

V roce 2015 byla udělena Nobelova cena za fyziku za experimentální prokázání oscilace neutrin. O neutrinech jste už jistě někdy slyšeli a možná víte, že s látkou interagují jen velmi slabě, a proto dokáží bez zpomalení proletět Zemí a jinými velkými objekty. Zkuste za pomoci literatury a internetových zdrojů určit, kolik neutrin se v jednom okamžiku nachází v průměrném člověku. Nezapomeňte citovat zdroje!

Mirek měl pocit naplnění.

Protože o neutrinech je zatím poměrně málo přesných informací a také protože toto je jednoduchá úloha, budeme problém řešit pouze řádově. Z kombinace internetových zdrojů¹ vyplývá, že většina neutrin je takzvaně reliktní (pozůstatek po velkém třesku) a jejich částicová hustota je $n \sim 100 \text{ cm}^{-3}$. Nyní stačí odhadnout objem člověka na základě hustoty těla $\rho \sim 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ (jako voda) a hmotnosti $m \sim 100 \text{ kg}$. Vynásobením hustoty neutrin a objemu člověka dostáváme pro počet neutrin N řádový odhad

$$N = n \frac{m}{\rho} = 10^7$$

neutrin v lidském těle.

Na internetu se dají najít i jiné údaje. Například v jednom pořadu České televize² se tvrdí, že neutrinový tok ze Slunce je u Země $j \sim 10^{11} \text{ cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ neutrin. Jejich rychlost je řádově $c \sim 10^{10} \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ³. Teď trochu abstrakce. Rozdělme si objem člověka V na plochu S a tloušť-

¹<https://cs.wikipedia.org/wiki/Neutrino>, <https://icecube.wisc.edu/info/neutrinos>

²<http://www.ceskatelevize.cz/ivysilani/10252839638-hyde-park-ct24/211411058080926/>

³Zda je jejich rychlost světelná či o něco nižší není pro řádový odhad důležité.

ku w . Víme, že počet neutrin 10^{11} se nachází v objemu kvádru o jedné stěně S a třetím rozměru 10^{10} cm. Z trojčlenky je jasné, že počet slunečních neutrin v člověku je

$$N' = jS \frac{w}{c} = j \frac{V}{c} = \frac{jm}{\rho c} = 10^6.$$

Většina neutrin přítomných v člověku tedy pochází z kosmického pozadí.

Kateřina Smítalová

katka@fykos.cz

Úloha VI.2 ... dioptrická

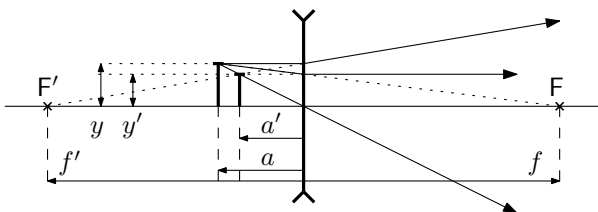
2 body; průměr 1,74; řešilo 50 studentů

Pikošova kamarádka nosí brýle. Když si je nasadí, její oči se zdají menší. Je krátkozraká či dalekozraká? Svou odpověď dobře zdůvodněte.

Pikoš se jí zadíval hluboko do očí.

Brýle budeme považovat za tenkou čočku. Rozbor situace je na obrázku 1. Vyjdeme z Gaussovy zobrazovací rovnice ve tvaru

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad (1)$$



Obr. 1: Zobrazení oka (předmětu) rozptylnou čočkou. Poměry vzdáleností neodpovídají skutečnosti, jinak by chudák kamarádka měla velmi, velmi špatné oči.

kde a je (orientovaná, v předmětovém prostoru záporná, v obrazovém prostoru kladná) vzdálenost předmětu (oka) od čočky, a' je (opět orientovaná) vzdálenost obrazu od čočky a f' je obrazová ohnisková vzdálenost čočky (kladná pro spojku, záporná pro rozptylku). Je-li velikost předmětu y a jeho obrazu y' , pak příčné zvětšení vypočítáme jako

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}. \quad (2)$$

Jestliže z rovnice (2) vyjádříme a' a dosadíme je do zobrazovací rovnice (1), dostaneme

$$f' = -a \frac{M}{M-1} = |a| \frac{M}{M-1}, \quad (3)$$

kde jsme využili toho, že $a < 0$ (oko je v této úloze předmět). Jestliže se oko zdá menší, je zvětšení $|M| < 1$, zároveň víme, že $M > 0$ (oko nevidíme převráceně). Z rovnice (3) pak plyne, že $f' < 0$. Čočka je tedy rozptylka, a tedy Pikošova kamarádka je krátkozraká.

Tomáš Pikálek

pikos@fykos.cz

Úloha VI.3 ... jedeme z kopce

4 body; průměr 3,39; řešilo 44 studentů

Autem o hmotnosti M jedeme nahoru do kopce a dolů ze stejného kopce se sklonem α stejnou rychlostí v se zařazeným stejným převodovým stupněm, a tedy stejnými otáčkami motoru. Jaký je rozdíl tažného (do kopce) a brzdného (z kopce) výkonu motoru?

Napadlo Lukáše v kopci směrem na Rumburk.

Pokud se auto pohybuje přímočaře konstantní rychlostí, podle druhého Newtonova zákona je výslednice všech působících sil nulová. V našem případě stačí, pokud se vyrovná tečná složka ve směru jízdy auta, protože normálovou vždy vyrovná působení podložky.

Na auto působí odporové síly. Aniž bychom příliš rozebírali jejich velikost, tak to jsou především aerodynamický odpor, valivý odpor a třecí momenty v motoru, které budou působit vždy proti směru pohybu (což je sympatická vlastnost odporových sil), kdy se třecí moment přes kola (předpokládáme, že neprokluzují) převede na „běžnou“ odporovou sílu.

Další působící silou je tíhová síla, kterou rozdělíme na tečnou (ve směru pohybu) a normálovou složku. Velikost tíhové síly je Mg , z rozkladu sil pak zjistíme, že velikost tečné složky je rovna $Mg \sin \alpha$. Normálová složka je, jak už jsme zmínili, nezajímavá, neboť nevyčísľujeme valivý odpor, který je i tak zanedbatelný oproti aerodynamickému odporu prostředí.

Tečná složka v jednom případě (z kopce) působí ve směru pohybu a vyrovnává odporové síly a brzdnu sílu motoru. Ve druhém (do kopce) míří proti směru pohybu, a tedy musí být spolu s odporovými silami vyrovnána tažnou silou motoru. Proto bude tažná síla motoru rovna součtu tečné složky tíhové síly a brzdné síly, která je rovna součtu všech sil odporových

$$\begin{aligned} F_{\text{Tah}} &= F_{\text{Tíha}} + F_{\text{Odpor}}, \\ F_{\text{Brzda}} &= F_{\text{Tíha}} - F_{\text{Odpor}}. \end{aligned}$$

Jestliže platí vzorec $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, můžeme i výsledný výkon tažné síly motoru rozdělit na výkon potřebný k překonání brzdných sil a tečné složky tíhové síly.

Pokud brzdný výkon (získaný pomocí $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$) rozdělíme na výkony jednotlivých sil, dostaneme

$$\begin{aligned} P_{\text{Tah}} &= P_{\text{Tíha}} + P_{\text{Odpor}}, \\ P_{\text{Brzda}} &= -P_{\text{Tíha}} + P_{\text{Odpor}}. \end{aligned}$$

Z toho je už vidět, že hledaný rozdíl bude

$$P_{\text{Tah}} - P_{\text{Brzda}} = 2Mgv \sin \alpha.$$

Na situaci se můžeme podívat i tak, že motor koná brzdnu práci kladnou, neboť působí proti vnějším změnám, potom bychom získali

$$|P_{\text{Tah}}| - |P_{\text{Brzda}}| = 2F_{\text{Odpor}}v.$$

Ještě poznamenejme, že v úloze nepředpokládáme aktivní brzdění pomocí nožní brzdy, pak bychom samozřejmě nebyli schopni výkon určit. Užíváme efektu známého pod názvem *motorová brzda*.

Komentáře k došlým řešením

Vzhledem k tomu, že nám trvalo dosti dlouho, než jsme se dohodli jak interpretovat zadání, tak jsme byli velice benevolentní při opravování. Řešení se sešlo překvapivě mnoho, většina z nich se držela některého z postupů ve vzorovém řešení.

Třetí interpretaci, která není ve vzorovém řešení a která je fyzikálně korektní, získáme, když předpokládáme součet odporových sil vyšší než tečnou složku tíhové síly. Motor pak musí vyvinout výkon na udržení konstantní rychlosti (i když to asi není nazýváno brzdny výkonem). Při této interpretaci nemáme problém se „směrem“ výkonu, protože motor v obou případech působí silou ve směru pohybu. V tomto případě je výsledek shodný s řešením výše, pokud uvažujeme záporný brzdny výkon.

Někteří z vás v řešení rozebrali všechny tři možnosti, za což si zaslouží velkou pochvalu (a bod navíc). Mnozí z vás zanedbali odporové síly, čímž si řešení velice zjednodušili, ale takové řešení jsme již nemohli hodnotit plným počtem bodů.

Nejčastější chybou pak bylo uvažování smykového tření jako odporové síly, což u auta nedává příliš smysl, je třeba uvažovat valivý odpor. Velikost statického smykového tření je důležitá pro stanovení okamžiku, kdy pohyb auta přejde do smyku, což se při běžných situacích neděje.

Mikuláš Matoušek

mikulas@fykos.cz

Úloha VI.4 ... fire in the hole

4 body; průměr 2,93; řešilo 27 studentů

Pro ohřev plazmatu ve fúzních zařízeních se používají svazky neutrálních částic. V takovém zařízení se nejprve urychlí ionty deuteria na vysokou energii a následně se přenosem náboje neutralizují, přičemž si zachovávají téměř původní rychlost. Na tokamaku COMPASS mají částice na výstupu ze svazku energii 40 keV a proud ve svazku těsně před neutralizací je 12 A. Jaká síla působí na generátor svazku? Jaký je jeho výkon?

Aleš Koukal na vypálenou díru ve ventilu.

Při přenosu náboje téměř nedochází ke změně kinetické energie deuteria ve svazku, takže můžeme říct, že rychlost jednotlivých neutrálních částic bude stejná jako rychlost iontů těsně před vstupem do neutralizátoru. Protože ionty svým pohybem vytvářejí elektrický proud, můžeme úlohu vyřešit tím, že se na něj blíže zaměříme. V první části úlohy využijeme jeho definici

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (4)$$

tj. že velikost elektrického proudu je určena časovou změnou náboje, a druhého Newtonova zákona

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (5)$$

přičemž q je elektrický náboj, p hybnost částice a t čas. Hybnost částice je definována jako součin její hmotnosti a rychlosti $p = mv$. Pro použití 2. NZ musíme zjistit, který člen se v čase mění. Protože ze zadání víme, že rychlost částic se nijak nemění, může to být jen hmotnost. A také to hmotnost je, protože počet částic vypuzených z injektoru časem roste. Vyjádření 2. NZ, které použijeme, je toto:

$$F = v \frac{dm}{dt}, \quad (6)$$

Změnu hmotnosti v čase si vyjádříme z elektrického proudu, protože víme, že každé částici o hmotnosti m_0 přísluší náboj q_0 ($dq = \frac{q_0}{m_0} dm$). Rovnici (4) můžeme přepsat jako

$$I = \frac{q_0}{m_0} \frac{dm}{dt}, \quad (7)$$

což říká, že $\frac{dm}{dt} = I \frac{m_0}{q_0}$. Rychlost částice zjistíme z definice kinetické energie, $v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}$. Po dosazení do (6) dostáváme:

$$F = \frac{I}{q_0} \sqrt{2Em_0}, \quad (8)$$

takže pokud dosadíme hodnoty ze zadání, dostaneme výsledek $F = 0,49 \text{ N}$. K tomu jsme potřebovali vědět, že deuteron (jádro těžkého vodíku) má hmotnost $m_0 \doteq 3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a náboj $q_0 \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Vzhledem k tomu, že samotné zařízení váží několik tun, je to poměrně zanedbatelná hodnota.

Spočítat výkon svazku je jednodušší, pokud si představíme urychlující část jako obvod, v němž je napětí $U = 40 \text{ kV}$ a prochází jím proud $I = 12 \text{ A}$. Pak výkon spočítáme jako $P = UI = 480 \text{ kW}$. Je nutno říct, že ve skutečnosti je výkon svazku po neutralizaci o něco menší (asi 320 kW), protože je přece jenom nějaká část energie iontům odebrána při výměně náboje.

Komentáře k došlým řešením

V mnohých řešeních se objevil výpočet výkonu pomocí vztahu v řešení výše, následně se síla působící na generátor pomocí vztahu $P = Fv$. Tento postup je potřeba řádně promyslet, neboť skutečně můžeme uvažovat ze zákona akce-reakce tento vztah, nicméně vztah platí okamžitě, tj. $P(t) = Fv(t)$. Průměrný výkon je střední časová hodnota výkonu z reakční síly, která působí od času $t_0 = 0$ do času t_f

$$P = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} P(t') dt' = \frac{1}{t_f} F \int_0^{t_f} v dt' = \frac{1}{2} Fv,$$

kde $v = v(t_f)$ je konečná rychlost částic. Bodování zde bylo rozdílné případ od případu podle dobrého či špatného okomentování, proč vůbec vztah $P = Fv$ použít.

Další z chyb, které se často opakovaly, byla nedůslednost v zapisování jednotek. Rovnice musí mít na pravé i levé straně stejný fyzikální rozměr, jedná se i o kontrolu, že počítáme správně.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha VI.5 ... závody částic

5 bodů; průměr 4,03; řešilo 35 studentů

V homogenním magnetickém poli $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$, $B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ obíhají po kružnicích v rovině xy dvě částice, elektron s hmotností $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ a nábojem $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a alfa částice s hmotností $m_{\text{He}} = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a nábojem $2e$. Poloměr trajektorie elektronu je $r_e = 2 \text{ cm}$, poloměr trajektorie alfa částice je $r_{\text{He}} = 200 \text{ m}$. V jednom okamžiku zapneme slabé homogenní elektrické pole $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$, $E_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Určete, jaké dráhy s_e a s_{He} urazí každá z částic za čas $t = 1 \text{ s}$ od zapnutí elektrického pole. Předpokládejte, že částice jsou dostatečně vzdálené a nevyzařují.

Mirek se učil na zkoušku z plazmatu.

Na nabitou částici v elektromagnetickém poli působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde q je náboj částice a \mathbf{v} její rychlost. Dokud je elektrické pole nulové, pohybuje se částice po kružnici a působí na ni pro zadané \mathbf{B} dostředivá síla

$$F_{\perp} = qv_{\perp}B_0 = \frac{mv_{\perp}^2}{r_L},$$

kde r_L nazýváme Larmorův poloměr a m je hmotnost částice. Velikost rychlosti v_{\perp} , kterou se částice pohybuje po kružnici, je potom

$$v_{\perp} = \frac{qB_0r_L}{m}.$$

Po zapnutí elektrického pole přibude konstantní síla ve směru polí

$$F_{\parallel} = qE_0,$$

v čase t tedy bude mít částice paralelní rychlost

$$v_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{m}t = \frac{qE_0}{m}t.$$

Uvědomme si, že silové působení obou polí na částici je v navzájem kolmých směrech pouze díky speciální konfiguraci tohoto problému, pro libovolné směry polí by rozklad nebyl takto triviální. Složením obou rychlostí vidíme, že pohyb probíhá po helikální trajektorii, přičemž sklon šroubovice narůstá. Naším úkolem je určit délku šroubovice. V průmětu do roviny xy urazí elektron dráhu

$$s_{e\perp} = \frac{eB_0r_e}{m_e}t,$$

kde jsme dosadili ze zadání konkrétní hodnoty náboje, hmotnosti a Larmorova poloměru pro elektron. Ve směru z se pohybuje elektron rovnoměrně zrychleně a urazí dráhu

$$s_{e\parallel} = \frac{eE_0}{2m_e}t^2.$$

Rozvinutím šroubovice do roviny xz nám ukáže, že délka celé šroubovice bude rovna délce paraboly, která má vrchol v bodě $[0, 0]$ (bod, kde se nacházela částice v okamžiku zapnutí \mathbf{E}) a prochází bodem $[s_{e\perp}, s_{e\parallel}]$. Máme tedy parabolu tvaru $y = ax^2$, dosazením krajních bodů vyjádříme $a = s_{e\parallel}/s_{e\perp}^2$. Nyní už můžeme určit celkovou dráhu

$$s_e = \int_0^{s_{e\perp}} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{s_{e\perp}} \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a} \sinh^{-1}(2ax) \right]_0^{s_{e\perp}},$$

kde jsme využili substituci tvaru $2ax = \sinh z$. Po dosazení mezí

$$s_e = \sqrt{\frac{s_{e\perp}^2}{4} + s_{e\parallel}^2} + \frac{s_{e\perp}^2}{4s_{e\parallel}} \sinh^{-1} \frac{2s_{e\parallel}}{s_{e\perp}} = \frac{et}{2m_e} \sqrt{(B_0r_e)^2 + (E_0t)^2} + \frac{eB_0^2r_e^2}{E_0m_e} \sinh^{-1} \frac{E_0t}{B_0r_e}.$$

Pro alfa částici bychom postupovali zcela analogicky. Lze si všimnout, že s rostoucím časem se bude s_e blížit $s_{e\parallel}$, poměr vzdáleností s_e/s_{He} se tedy bude blížit $m_{He}/(2m_e)$. Výsledné dráhy

jsou po dosažení zadaných hodnot $s_e = 4,4 \cdot 10^6$ m a $s_{He} = 4,9 \cdot 10^5$ m. Jedná se však o zvláštní závod, protože částice jsou urychlovány opačnými směry. Jelikož jsme však za měřítko úspěchu zvolili celkovou uraženou dráhu, elektron vyhraje. Nakonec ještě poznamenejme, že rychlejší z částic (elektron) se pohybuje zhruba setinovou rychlostí světla, není proto ještě nutné zahrnout relativistické efekty.

Miroslav Hanzelka

mirek@fykos.cz

Úloha VI.P ... i-jablko

6 bodů; průměr 4,33; řešilo 30 studentů

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak sestavit zařízení, které pozná, jakým směrem je natočeno vůči směru tíhového zrychlení a tuto informaci nějakým způsobem převede na elektrický signál. (Zařízení na způsob akcelerometru v chytrých telefonech.)

Napadlo Terku, když už se jí nechtěla učit analýza.

Zadání je poměrně obecné, nespécifikuje, jak se bude informace o orientaci dále využívat (otočení fotografie, prostředek k ovládní telefonu, detekce pohybu telefonu). To ovlivňuje parametry navrhovaného zařízení jako přesnost detekované orientace, či latence poskytnuté orientace.⁴ Dle striktního výkladu zadání by naše zařízení mělo fungovat i ve volně padajícím výtahu (neboť směr tíhové zrychlení se nezmění, jen se k pozorovanému zrychlení přičte zrychlení pozorovatele v neinerciální soustavě).

Výstupem zařízení by měla být přinejmenším dvojice úhlů, která reprezentuje orientaci zařízení (představujme si například bod na jednotkové kouli, která je pevně spojená se zařízením). V konečném důsledku budeme chtít tato data zpracovávat digitálně, a tak onen elektrický signál může být výstup z A/D převodníku anebo například výstup ze snímače kamery.

Nyní se pojďme zamyslet nad různými přístupy.

Náš problém již vyřešila evoluce u bezobratlých živočichů v podobě orgánu obecně zvaného *statocysta*. Jde o dutinku, v níž se může pohybovat drobný předmět (*statolit*) a tento pak silově působí na vnitřní povrch dutiny, což je nakonec převedeno na nervový signál. U savců (včetně člověka) tuto funkci plní *vestibulární aparát*, v němž je tělísko nahrazeno tekutinou. Naše zařízení založené na tomto principu by tedy mohlo být dutou koulí, na jejíž vnitřní straně jsou kontakty, které jsou spojovány menší vodivou kuličkou pohybující se uvnitř.

Nejenom evoluce, ale i řemeslníci mají odpověď na naši otázku – olovnice. Pro naše účely by měla být závaží na tuhém ramenu, přičemž v čepu by se úhel naklonění měřil například potenciometrem. Pro zjištění úplné orientace v prostoru by byly potřeba dvě olovnice operující v kolmých rovinách s možností „přetočení“, aby zařízení fungovalo i vzhůru nohama.

Obě zatím navržená zařízení by přestala fungovat v padajícím výtahu, ostatně to je problém všech přístupů, které nějakým způsobem zužitkovávají (nerozlišitelné) efekty setrvačného zrychlení a gravitace.

Abychom toto obešli, musíme využít nějakou další znalost o směru tíhového zrychlení. Pokud magnetické pole Země zjednodušíme tak, že magnetické siločáry kopírují zemské poledníky, pak

⁴U fotoaparátu nám nevádí, pokud orientaci snímku zjistíme až při ukládání, pokud bychom však informaci potřebovali např. pro ovládní hry, je jakákoli postřehnutelná latence na obtíž.

platí, že tíhové zrychlení je vždy kolmé na směr magnetické indukce. Tento přístup by nám určil rovinu, v níž se tíhové zrychlení nachází, ale nikoli směr (přímku)⁵

Již jsme se dotkli toho, že tíhové zrychlení je ve vztahu se zemským povrchem (téměř kolmé), kdybychom dokázali určit naši orientaci vůči zemskému povrchu, zjistíme tak i námi požadovanou orientaci vůči tíhovému zrychlení. Nabízí se tedy metoda vytvořit zařízení ze dvou GPS modulů, které by zjišťovaly pozici vzhledem k Zemi a z těchto dvou poloh bychom již mohli dopočítat orientaci zařízení. Očekávaná přesnost pozice z GPS je 5 metrů⁶ a bez nějakého vyčíslování odhadneme, že vzdálenost přijímačů by musela být řádově alespoň srovnatelná s touto délkou. Takové zařízení by tedy nebylo praktické pro přenos ani manipulaci.

Námořníci používali pozorování nebeských objektů k určení své polohy, my tak můžeme informaci z (jediného) GPS modulu a polohy nebeských těles využít k určení orientace. Chytré telefony bývají vybaveny kamerami, které zabírají poměrně významnou část sféry kolem telefonu, a tak (pokud není zataženo nebo nejsme v interiéru) v některé z nich uvidíme Slunce či Měsíc. Tyto objekty jsou v obraze jasně rozpoznatelné a lokalizovatelné a pokud kameru zkalibrujeme,⁷ můžeme určit její orientaci vůči směru k danému nebeskému tělesu – ze znalosti zeměpisné polohy a času, pak zjistíme i směr tíhové zrychlení vůči tomuto směru. Z hlediska naší úlohy takto však zjistíme jen rovinu,⁸ v níž se nachází tíhové zrychlení (srovnejte s orientací vůči magnetickému poli Země). Pro úplné určení směru bychom tak potřebovali kamerami snímat alespoň dvě kosmická tělesa, což už nemusí být tak jednoduché ať kvůli detekci (ve dne prakticky vyloučeno), tak rozpoznání (které těleso je které).

Dalším způsobem, jak zjišťovat orientaci by byl gyroskop, který při vhodném uchycení zachovává směr osy své rotace a naše zařízení by mohlo určovat svou orientaci právě vůči tomuto směru, jenž by se při počáteční kalibraci svázal se směrem tíhové zrychlení. Setrvačnicků v praxi používají letecké přístroje (umělý horizont), mobilní zařízení využívají gyroskopy s vibrujícími závažíčky,⁹ jež jsou ovlivňována Coriolisovou silou při rotaci.

Výčet nápadů zakončíme tím, jenž se též prakticky využívá – neurčíme jenom směr tíhové zrychlení, ale i jeho velikost.¹⁰ Díky superpozičnímu principu stačí umět sestrojít jen jedno-rozměrný akcelerometr a pak spojit dva nebo tři (pokud chceme, aby naše zařízení fungovalo opravdu ve všech orientacích) kolmo na sebe pro zjištění vektoru zrychlení.

Zrychlení v jedné ose můžeme měřit mnoha způsoby: poloha závaží na pružince, efekt závaží na tlakový senzor, měření doby pádu nebo energie dopadu (pád „po kolejnici“ nebo měření periody kyvadla. Zřejmě ne všechny způsoby jsou vhodné k integraci do přenosného zařízení, ale nejprůhodnější je kombinace prvního a druhého způsobu za využití piezoelektrického jevu, případně ovlivňování kapacity kondenzátoru polohou závaží.

Prezentovali jsme různé více či méně reálné návrhy zjišťování orientace vůči tíhovému zrychlení. V nejjednodušších aplikacích bychom vystačili s kuličkou propojující kontakty na vnitřních

⁵Pro náčrt této ideje jsme zjednodušili model zemského magnetického pole a tíhové zrychlení jsme efektivně nahradili gravitačním. Problém zjišťování orientace vůči směru tíhové zrychlení jsme pak převedli na problém zjišťování směru vůči magnetické indukci, jímž se v této úloze podrobněji zabývat nebudeme.

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System

⁷Ilustrace možného postupu <https://youtu.be/ViPN810E0SU>.

⁸Uvažujte, že máte v hledáčku jen Slunce. Jakékoli otočení kamery kolem optické osy pak definuje nový směr zrychlení (linii horizontu nebereme v potaz).

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrating_structure_gyroscope

¹⁰Zde připouštíme volnější výklad zadání, kdy určujeme orientaci vůči celkovému zrychlení přístroje, nikoli jen tíhovému.

povrchu koule. Vyšší přesnosti bychom dosáhli použitím sady kolmých akcelerometrů, případně doplněné sadou gyroskopů, pokud znalost orientace vůči tíhovému zrychlení nebyla dostatečná (rotace kolem svislé osy).

Komentáře k došlým řešením

Řešitelé nejčastěji popisovali zařízení, jež by se dle základu dala pojmenovat jako: gyroskop, nádoba s kapalinou, olovnice, siloměr/váhy, statolit, teplotní akcelerometr, ucho (vestibulární aparát) a vodováha.

Větší část bodů byla udělována za rozmanitost navrhovaných nápadů, další body přibyly za výstižný popis, propracovanost návrhu a realizovatelnost zařízení. Zvláštní zmínku si zaslouží řešení Jáchyma Bártíka a Matěje Mezery, kteří navrhli přístroje nespolehající jen na zrychlení, ale *kombinující* i gyroskop.

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha VI.E . . . zákeřný restituční koeficient

8 bodů; průměr 5,43;

řešilo 40 studentů

Pokud pustíte hopík či jiný pružný míček na vhodný povrch, pak se začne odrážet. Při každém odrazu se disipuje (ztrácí do tepla, zvuku atd.) kinetická energie míčku a ten proto nevyskočí do počáteční výšky. Definujme koeficient restituční energie jako poměr kinetické energie míčku po dopadu ku kinetické energii před dopadem. Závisí koeficient restituční na výšce, ze které míček dopadal? Vyberte si jeden vhodný míček a jeden vhodný povrch (měření na více površích s více míčky samozřejmě náležitě oceníme), na kterém proměříte závislost koeficientu restituční na výšce, ze které míček dopadl. Experiment náležitě popište a proveďte dostatečný počet měření.

Karel mrzelo, že u ping-pongového míčku má velký vliv odpor vzduchu.

Popis experimentu

Naším úkolem je změřit restituční koeficient odrazu skákacího míčku (dále jen hopík) od povrchu při různých výškách, ze kterých hopík na povrch padá. Toho lze dosáhnout různými způsoby. My budeme měřit časy mezi jednotlivými dopady analýzou zvuku pomocí programu Audacity¹¹. Postupovat budeme tak, že pustíme hopík z určité výšky a necháme jej volně se odrážet tak dlouho, dokud to bude možné (příliš malé odrazy, úhel odrazu se odchyľuje, . . .). Konkrétní koeficienty restituční pro jednotlivé dopady (stejně jako výšku, ze které hopík padal) vypočítáme z časových rozdílů mezi předchozím a měřeným dopadem, a měřeným a následujícím dopadem. Tímto způsobem jsme schopni získat poměrně velké množství relativně přesných dat.

Teorie

Nechť t_1 je čas mezi předchozím a měřeným dopadem, t_2 čas mezi měřeným a následujícím dopadem a e je koeficient restituční kolize hopíku s povrchem.

¹¹<http://www.audacityteam.org/>

Nejprve uvažujme situaci bez vlivu aerodynamického odporu. Nechť h_1 je výška v bodě obratu hopíku před měřeným dopadem a h_2 výška v bodě obratu po měřeném dopadu. Hopík se pohybuje v souladu s řešením pohybové rovnice pro pád z klidové výšky h_0

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Potom tedy platí

$$h_1 = \frac{1}{8}gt_1^2,$$

$$h_2 = \frac{1}{8}gt_2^2.$$

Koeficient restituce e je definován jako podíl kinetických energií po odrazu a před odrazem. V modelu bez odporu vzduchu jsou tyto energie podle zákona zachování energie úměrné výškám bodů obratu, tedy

$$e = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Takže závislost koeficientu restituce na výšce vypuštění hopíku bude mít tvar

$$e(h) = e(h_1) = e(t_1) = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (9)$$

Odpor vzduchu

V závislosti na parametrech a metodice Vašeho experimentu může hrát odpor vzduchu větší či menší roli. Proto by se měl každý experimentátor přesvědčit o tom, jaký vliv má aerodynamický odpor v daném uspořádání.¹²

Velikost odporové síly lze dobře přiblížit pomocí Newtonova vztahu¹³

$$F = \frac{1}{2}C_{\rho}Sv^2,$$

kde C je součinitel odporu, ρ je hustota vzduchu, S je plocha průřezu hopíku do roviny kolmé ke směru relativního pohybu hopíku a vzduchu, v je velikost vzájemné rychlosti hopíku a vzduchu. Směr této síly je vždy proti relativnímu pohybu hopíku vůči vzduchu. Newtonův vztah dobře popisuje aerodynamický odpor pro větší rychlosti. Pro nízké rychlosti sice hodnotu odporu podhodnocuje, ale pro tyto velikosti rychlosti jsou odporové síly stejně zanedbatelné, proto Newtonův vztah popisuje náš systém dobře. Námi použité hopíky se dají aproximovat koulí o průměru d a hmotnosti m . Hodnotu Reynoldsova čísla lze odhadnout jako

$$\text{Re} = \frac{dv}{\nu},$$

kde ν je kinematická viskozita vzduchu (nalezneme v tabulkách). Kvalifikovaným odhadem lze nahlédnout, že v našem případě přesáhne místy hodnota Reynoldsova čísla 10 000, takže aplikace newtonovského odporu je na místě.

¹²Nestačí fakt, že Vám data vychází „pěkně“, jak se ukážeme později.

¹³Skriptá KFPP MFF UK, rovnice 4,146; 10. 5. 2016 http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skriptá/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/4_6

Definujme k jako

$$k = \frac{\pi}{16} \frac{\rho d^2}{m},$$

kde jsme tiše položili $C = 1/2$ jakožto součinitel odporu pro kouli. Pohybová rovnice hopíku mezi odrazy má potom tvar

$$\ddot{h} = -g \pm k\dot{h}^2$$

kde znaménko \pm nabývá hodnoty $-$ pro pohyb hopíku nahoru a $+$ při pohybu hopíku dolů. Tato diferenciální rovnice má řešení

$$\begin{aligned} h_+ &= H_1 + \frac{1}{k} \ln \left(\cos \left(\sqrt{gk} (T_1 - t) \right) \right), \\ h_- &= H_2 - \frac{1}{k} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{gk} (T_2 + t) \right) \right), \\ v_+ &= \dot{h}_+ = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{gk} (T_1 + t) \right), \\ v_- &= \dot{h}_- = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{gk} (T_2 + t) \right), \end{aligned}$$

kde H_1, H_2, T_1, T_2 jsou konstanty, a znaménka v dolních indexech určují směr rychlosti $v = \dot{x}$.

Uvažujme pohyb hopíku mezi odrazy, který trvá čas T . Nechť hopík dosáhne bodu obratu v čase $t = 0$. Dále položme $H_1 = H_2 = 0$ jako výšku bodu obratu, podobně $T_1 = T_2 = 0$. Nechť (první) odraz hopíku od povrchu nastal v čase $t = -t_1$, a (druhý) dopad hopíku na povrch v čase $t = t_2$. Potom platí

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_2, \\ h_m &= -\frac{1}{k} \ln \left(\cos \left(\sqrt{gk} (t_1) \right) \right) = \frac{1}{k} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{gk} (t_2) \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{gk} (t_1) \right), \quad (11)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{gk} (t_2) \right), \quad (12)$$

kde h_m je výška bodu obratu nad povrchem, v_0 je rychlost hopíku bezprostředně po (prvním) odrazu a v_1 je rychlost hopíku při (druhém) dopadu na povrch.¹⁴ Z rovnice (10) dostaneme vztah mezi t_1 a t_2

$$\cosh \left(\sqrt{gk} (t_2) \right) = 1 / \cos \left(\sqrt{gk} (t_1) \right).$$

Odtud již můžeme získat zajímavý parametr – poměrnou ztrátu energie následkem aerodynamického odporu (tj. období koeficientu restituace pro let). Označme jej e_v , platí pro něj

$$e_v = \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{\operatorname{tgh}^2 \left(\operatorname{acosh} \left(1 / \cos \left(\sqrt{gk} t_1 \right) \right) \right)}{\operatorname{tg}^2 \left(\sqrt{gk} t_1 \right)} = \cos^2 \left(\sqrt{gk} t_1 \right),$$

což můžeme pomocí (10) vyjádřit jako

$$e_v = e^{-2kh_m}. \quad (13)$$

Podle velikosti parametru maximálních hodnot e_v můžeme upravit další postup:

¹⁴Za povšimnutí stojí limitní přechod do modelu bez odporu vzduchu pro k jdoucí k nule, potom například $\operatorname{tg} \left(\sqrt{gk} t_1 \right) \approx \sqrt{gk} t_1$ a potom $v_0 = gt_1$ etc.

- $(1 - e_v \ll 1 - e)$: Odpor vzduchu má na výsledek experimentu malý vliv, jeho zanedbáním nedojde k velké chybě. Příkladem může být velký, těžký hopík na dobře odrazivém povrchu pouštěný z velmi malé výšky.
- $(1 - e_v \ll 1)$: Odpor vzduchu bude mít pravděpodobně¹⁵ nezanedbatelný vliv na vaše výsledky a proto byste se měli pokusit jej při zpracování zohlednit. V případě potřeby je možné provést linearizaci

$$e_v = e^{-kh_m} \approx 1 - kh_m.$$

- $(e_v \text{ je malý})$: V tomto případě bude hrát odpor vzduchu klíčovou roli ve Vámi naměřených hodnotách. V důsledku toho je také možné, že získání hodnot koeficientů restituce odrazivosti nebude ani po započtení korekce možné, kvůli chybám při provádění této korekce. V této oblasti se nachází například pingpongové míčky pouštěné z výšky několika metrů.

V našem případě je situace ještě trochu složitější – nestačí totiž naměřené koeficienty podělit hodnotami e_v ; je třeba z času T určit rychlosti¹⁶ v_0 a v_1 .¹⁷

Předpokládáme, že¹⁸ $kh_m \ll 1$ a označme

$$\tau_1 = \sqrt{gkt_1}; \quad \tau_2 = \sqrt{gkt_2}; \quad \tau = \frac{\sqrt{gkT}}{2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2},$$

$$\Delta\tau = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\tau_1^2 = gkt_1^2 \approx 2kh_m,$$

Z (10) získáme

$$\cos \tau_1 = 1 / \cosh \tau_2.$$

Hodnoty τ_1 a τ_2 očekáváme poměrně malé, proto rozvíjme tuto rovnici pomocí Taylorova rozvoje do pátého řádu

$$1 - \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{\tau_1^4}{24} + o(\tau_1^5) = 1 - \frac{\tau_2^2}{2} + \frac{5\tau_2^4}{24} + o(\tau_2^5),$$

odkud

$$\tau_1^2 \approx \tau_2^2 \frac{1 - \frac{5\tau_2^2}{12}}{1 - \frac{\tau_1^2}{12}} \approx \tau_2^2 \left(1 - \frac{5\tau_2^2}{12}\right) \left(1 + \frac{\tau_1^2}{12}\right) \approx \tau_2^2 \left(1 - \frac{5\tau_2^2 - \tau_1^2}{12}\right).$$

Uvědomíme-li si, že $\tau_1 = \tau - \Delta\tau$ a $\tau_2 = \tau + \Delta\tau$ a tudíž že $\tau_2^2 - \tau_1^2 = 4\tau\Delta\tau$, dostaneme

$$48\tau\Delta\tau \approx \tau_2^2(5\tau_2^2 - \tau_1^2) \approx (\tau^2 + 2\tau\Delta\tau + \Delta\tau^2)(4\tau^2 + 12\tau\Delta\tau + 4\Delta\tau^2) \approx 4\tau^4.$$

Tedy můžeme přibližně vyjádřit τ_1 jako

$$\tau_1 \approx \tau - \frac{\tau^3}{12},$$

$$\tau_2 \approx \tau + \frac{\tau^3}{12},$$

¹⁵V závislosti na nepřesnosti vašeho měření.

¹⁶či energie

¹⁷Kdybychom to neprovedli, náš model formálně předpokládá rovnost v_0 a v_1 , proto při výpočtu koeficientu restituce po vydělení $e_v(h_1)$ bychom do řešení stále vnášeli chybu.

¹⁸V našem případě součin kh_{\max} nepřesáhl hodnotu 0,05.

odkud dosazením do (10), (11) a (12) získáme funkce $h_m(T)$, $v_0(T)$ a $v_1(T)$. Označíme-li nyní časy T_1 čas mezi předchozím a měřeným dopadem a T_2 mezi měřeným a následujícím dopadem, potom pro koeficient restituce bude platit

$$e(h_m(T_1)) = \frac{v_0^2(T_2)}{v_1^2(T_1)}. \quad (14)$$

Výsledky měření

Při našem měření jsme prováděli pro tři hopíky stejné formy: červený, modrý a zelený. Jednalo se o hopíky kulového tvaru.



Obr. 2: Měření hmotnosti a poloměru hopíku

Měření průměrů

Měření průměrů jsme prováděli digitálním posuvným měřidlem s rozlišením 0,01 mm. Chybu měření jsme stanovili na 0,01 mm. Při měření je třeba dbát na to, abychom při měření nedeformovali hopík – naměřené hodnoty by potom neodpovídali skutečným klidovým rozměrům. Měření jsme 15krát opakovali v různých směrech abychom zamezili dalším systematickým chybám. Výsledky jsou v tabulce 1. Přitom jsme označili d_c je průměr červeného hopíku, d_m je průměr modrého hopíku a d_z je průměr zeleného hopíku.

Tab. 1: Naměřené průměry hopíků.

d_c	d_m	d_z
mm	mm	mm
30,24	30,28	30,41
30,01	30,04	29,77
30,35	29,96	29,74
29,62	29,93	29,63
29,84	30,08	29,86
29,79	30,03	29,91
30,12	29,76	29,90
29,92	29,79	30,00
30,04	29,83	30,16
30,22	29,84	30,25
29,85	30,02	30,21
29,94	29,96	29,94
29,88	30,10	30,36
29,87	30,04	30,27
30,16	29,96	30,00

Průměry hopíků byly tedy určeny jako¹⁹

$$d_c = (29,99 \pm 0,06) \text{ mm},$$

$$d_m = (29,97 \pm 0,04) \text{ mm},$$

$$d_z = (30,03 \pm 0,07) \text{ mm}.$$

Měření hmotností

Hmotnosti jsme měřili pomocí digitálních vah s přesností 0,01 g. Výsledky měření jsou v tabulce 2, přičemž m_c je hmotnost červeného hopíku, m_m je hmotnost modrého hopíku a m_z je hmotnost zeleného hopíku.

Hmotnosti tedy byly určeny jako

$$m_c = (20,69 \pm 0,02) \text{ g},$$

$$m_m = (20,77 \pm 0,02) \text{ g},$$

$$m_z = (21,01 \pm 0,02) \text{ g}.$$

¹⁹Zpracování dat provádíme například podle: Zpracování měření, text fyzikální olympiády; 10. 5. 2016 <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>

Tab. 2: Hmotnosti hopíků.

$\frac{m_c}{g}$	$\frac{m_m}{g}$	$\frac{m_z}{g}$
20,68	20,77	21,01
20,68	20,79	21,03
20,70	20,78	21,00
20,70	20,74	21,00
20,71	20,77	20,99

Měření časů mezi dopady

Bylo zaznamenáno celkem 397 relevantních dvojic časů. Vzhledem k množství zde přímo nevedeme tabulkový výčet.²⁰

Chybu určování časového údaje jsme stanovili na 2 ms (více o tomto níže), chyby vypočetných veličin se poté určovali podle zákona hromadění chyb.²¹

Závislost restitučního koeficientu na výšce

Bez odporu vzduchu

Nejprve určíme závislost restitučního koeficientu na výšce bez započtení odporu vzduchu, tedy podle (9). Výsledná data jsou vynesena na obrázcích 3, 4 a 5, kde *cer-necor* jsou data pro červený hopík, *mod-necor* jsou data pro modrý hopík a *zel-necor* jsou data pro zelený hopík.

Funkce *cer-necor-fit*(h), *mod-necor-fit*(h) a *zel-necor-fit*(h) jsou potom lineární funkce

$$\begin{aligned} \text{cer-necor-fit}(h) &= a_{cn}h + b_{cn}, \\ \text{mod-necor-fit}(h) &= a_{mn}h + b_{mn}, \\ \text{zel-necor-fit}(h) &= a_{zn}h + b_{zn}, \end{aligned}$$

kde koeficienty byly získány pomocí lineární regrese²² příslušných dat s výsledkem

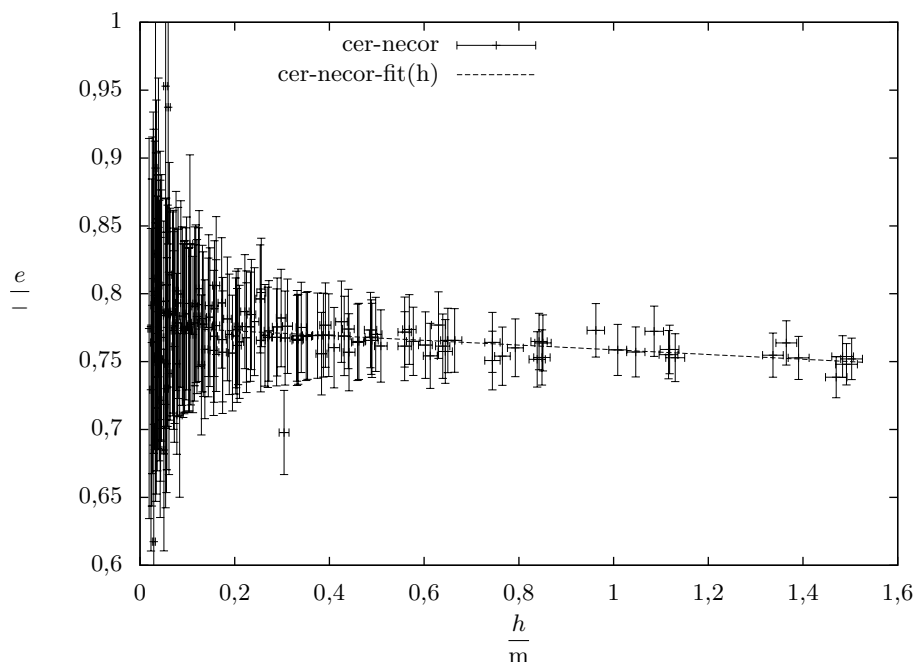
$$\begin{aligned} a_{cn} &= (-0,017 \pm 0,003) \text{ m}^{-1}, \\ b_{cn} &= (0,776 \pm 0,002), \\ a_{mn} &= (-0,015 \pm 0,002) \text{ m}^{-1}, \\ b_{mn} &= (0,782 \pm 0,003), \\ a_{zn} &= (-0,016 \pm 0,02) \text{ m}^{-1}, \\ b_{zn} &= (0,759 \pm 0,03). \end{aligned}$$

Při tomto zpracování nám koeficient restituce s výškou mírně klesá, což by mohlo být v souladu s faktem, že jsme zanedbali vliv odporu vzduchu. Provedme tedy zpracování i s korekcí na odpor vzduchu.

²⁰Data lze dočasně nalézt zde: <https://uloz.to/x8FaouBz/times-data-pdf>

²¹Zpracování měření, text fyzikální olympiády; 10. 5. 2016 <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>

²²Regresi jsme prováděli pomocí programu gnuplot, <http://www.gnuplot.info/>.



Obr. 3: Závislost koeficientu restituice odrazu červeného hopíku na výšce od linolea – při zanedbání odporu vzduchu.

Korekce na odpor vzduchu

Namísto podle (9) zpracujeme výsledky pomocí (14); zpracovaná data vynášíme do obrázků 6, 7 a 9. V použitém označení *cer-cor* jsou data pro červený hopík, *mod-cor* jsou data pro modrý hopík a *zel-cor* jsou data pro zelený hopík.

Funkce *cer-cor-fit(h)*, *mod-cor-fit(h)* a *zel-cor-fit(h)* jsou potom lineární funkce

$$\text{cer-cor-fit}(h) = a_{cc}h + b_{cc},$$

$$\text{mod-cor-fit}(h) = a_{mc}h + b_{mc},$$

$$\text{zel-cor-fit}(h) = a_{zc}h + b_{zc},$$

kde koeficienty byly získány pomocí lineární regrese na příslušná data jako:

$$a_{cc} = (0,017 \pm 0,003) \text{ m}^{-1},$$

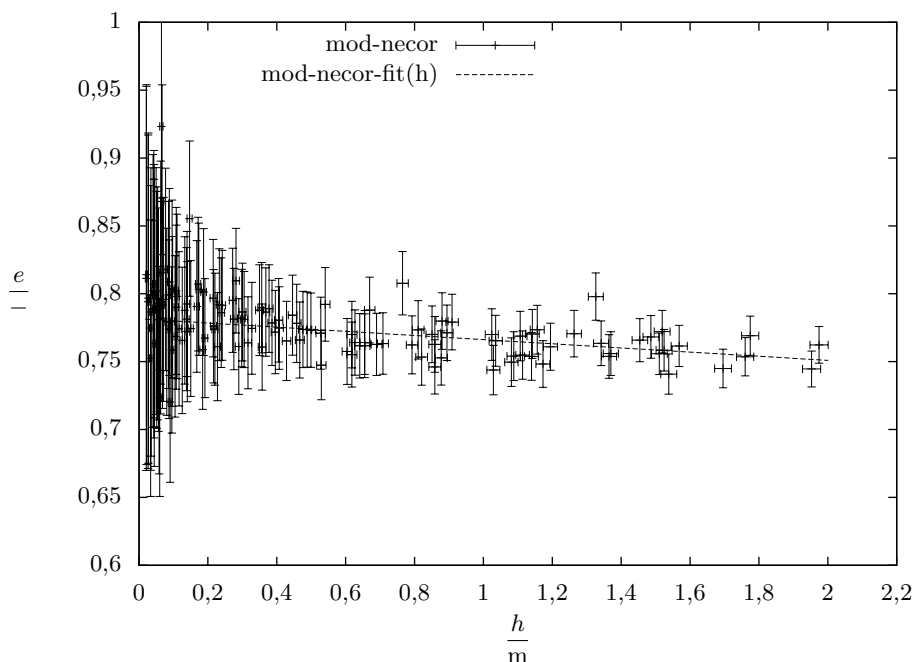
$$b_{cc} = (0,776 \pm 0,002),$$

$$a_{mc} = (0,020 \pm 0,002) \text{ m}^{-1},$$

$$b_{mc} = (0,782 \pm 0,003),$$

$$a_{zc} = (0,017 \pm 0,02) \text{ m}^{-1},$$

$$b_{zc} = (0,760 \pm 0,03).$$



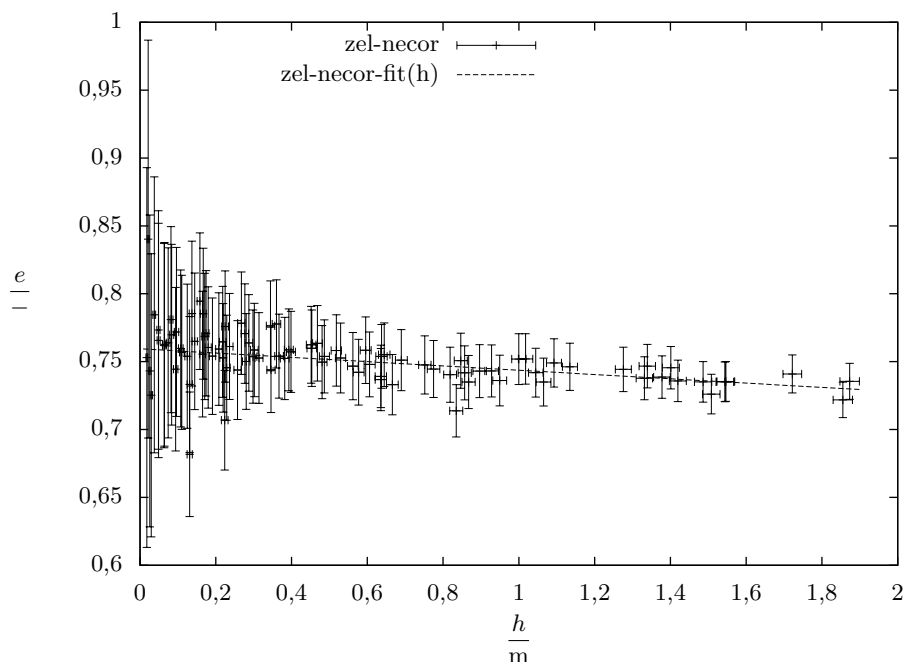
Obr. 4: Závislost koeficientu restituice odrazu modrého hopíku na výšce od linolea – při zanedbání odporu vzduchu.

Při započtení odporu vzduchu nám nyní koeficient restituice s výškou dokonce mírně roste.

Diskuze výsledků

Při zanedbávání odporu vzduchu koeficient restituice klesal s rostoucí výškou, což je v souladu s očekávanými výsledky. Po započtení odporu vzduchu restituční koeficient s výškou dokonce mírně rostl, a to srovnatelně rychle jako klesal bez uvažování odporu vzduchu. Tento výsledek je mírně překvapivý, jeho vysvětlení může být například takové, že vzhledem k tomu, že jsme měření prováděli na linoleu, mohlo při dopadech na nějaké kapsy či deformace v linoleu docházet k disipaci určité části energie, která příliš neroste s výškou. Může se také jednat o systematickou chybu měření času – časy dopadů jsme určovali ze závislosti tlaku na čase – pracovali jsme s rozlišením řádově větším než je stanovená chyba, nicméně jednoznačně určit okamžik nástupu vlny způsobené dopadem na místy ne příliš tichém pozadí je při těchto přesnostech problematické. Data jsme proto zaokrouhlovali na celé milisekundy a chybu stanovili větší (s připočtením možnosti náhodných lidských chyb). Nicméně nelze zcela vyloučit eventualitu, že při určování časů dochází ke zkreslení systematicky v závislosti na hlasitosti dopadu – tedy na výšce. Tento vliv by neměl být velký, ale ani celkový růst koeficientu po korekci není velký.

Další vliv mohl být horizontální pohyb hopíku. V některých případech se stalo, že se hopíky začaly pohybovat v horizontálním směru. V prvním přiblížení při malém pohybu by výsledná



Obr. 5: Závislost koeficientu restituce odrazu zeleného hopíku na výšce od linolea – při zanedbání odporu vzduchu.

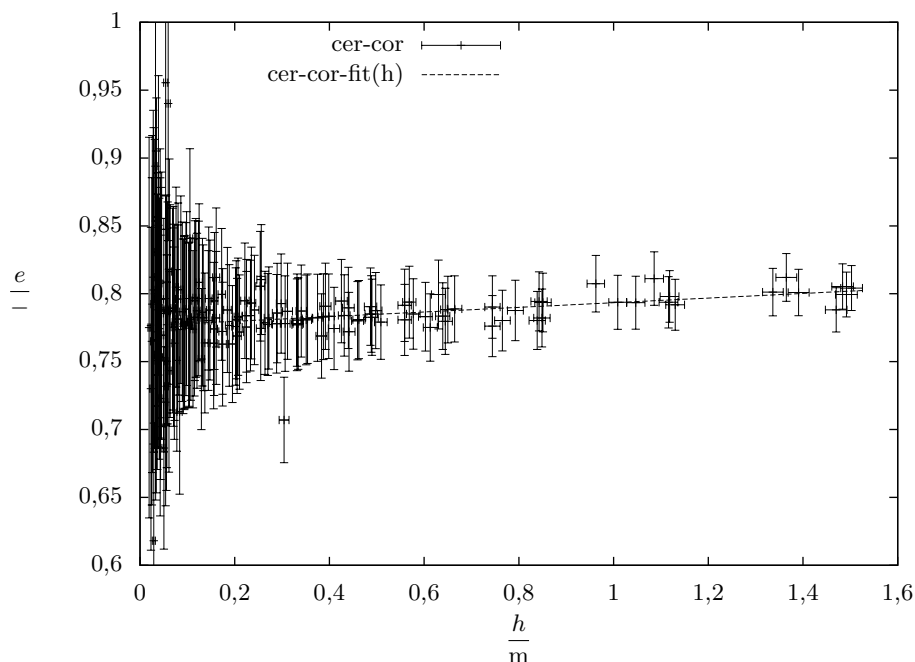
chyba byla zanedbatelná, protože při dopadech lze translační kinetickou energii rozložit na horizontální a vertikální složku a použité vztahy by pro tu vertikální měly pořád platit přibližně stejně. Skutečné vlivy tohoto pohybu lze nalézt až při hlubší analýze – vliv rotace hopíku, vliv vzdálenosti od mikrofónu (občas i více než metr a 1 metr \sim 3 milisekundy, v rámci jednoho skoku míčku byl rozdíl samozřejmě menší) a hlavně energetická ztráta vertikální kinetické energie, získal-li míček horizontální složku hybnosti při dopadu. Při našem experimentu jsme se samozřejmě snažili vyřadit ta měření, kde vliv horizontálního pohybu byl zanedbatelný, ale protože toto vyřazování jsme prováděli manuálně a subjektivně, je možné, že ve výsledném souboru je vliv tohoto jevu jiný pro malé a pro velké výšky.

Dále je dobré poznamenat, že z uvedených grafů člověk může získat dojem, že jak chyby měření, tak změny restituce s výškou jsou výraznější než je tomu ve skutečnosti – proto z důvodů názornosti ještě uvedeme graf závislosti doby $(n+1)$ -ho skoku na době n -tého skoku, viz obrázek 9.

Co se týče vlivu povrchu na experiment, předpokládaná velikost restitučního koeficientu pro srážku dvou těles (v našem případě hopíku a podložky-povrchu) je

$$e_{12} = \frac{E_1 e_{11} + E_2 e_{22}}{E_1 + E_2},$$

kde e_{ij} je koeficient restituce pro srážku těles i a j , E_i je Youngův modul pružnosti tělesa i .



Obr. 6: Závislost koeficientu restituce odrazu červeného hopíku na výšce od linolea s korekcí na odpor vzduchu.

Několik našich orientačních měření pro různé hopíky a povrchy se kvalitativně shoduje s tímto vztahem.

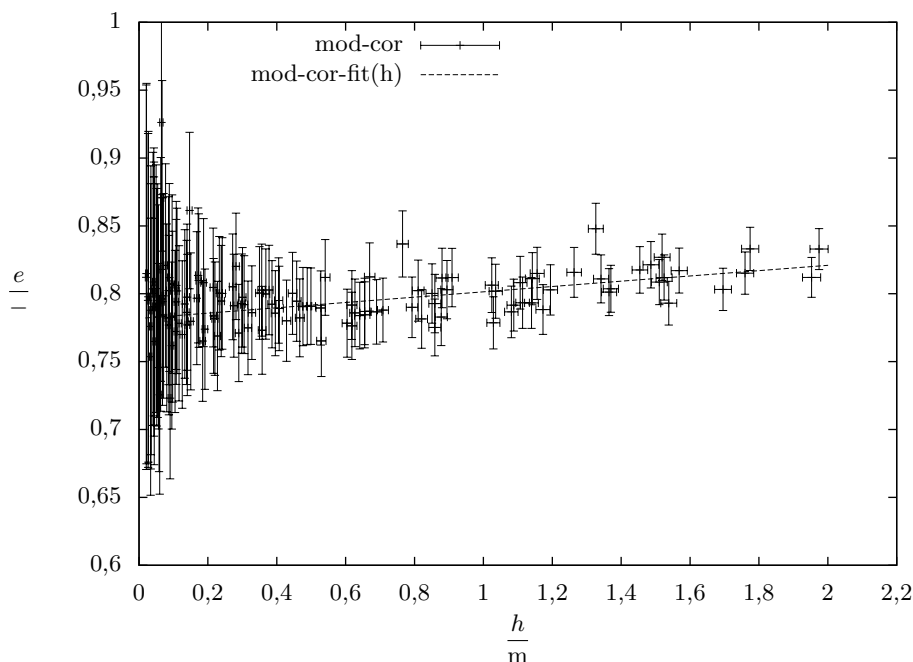
Závěr

Změřili jsme závislost koeficientu restituce na výšce, ze které byl hopík padal. Závislosti mají pro linoleový povrch a tři hopíky stejné série podobný charakter, na měření má odpor vzduchu nezanedbatelný vliv. V závislostech lze po korekcích pozorovat mírný nárůst. Koeficienty restituce se pohybovali v rozmezí 0,76 – 0,81.

Obecné poznámky k metodice

Pokud jste se rozhodli měřit v tomto experimentu časy optickými metodami (ať už ze záznamu nebo od oka stopkami), tak platí obecná poučka, že je lepší měřit časové intervaly mezi časově lépe lokalizovatelnými jevy – tj. mezi dopady, nikoli mezi dosahy maximálních výšek.²³ V tom případě je menší samotná chyba měření času, ale ve Vámi zvoleném postupu může být lepší měřit časy mezi maximy, pokud se to do dalšího zpracování hodí.

²³Podobně, měříte-li doby kmitů matematického kyvadla, je lepší měřit doby mezi průkyvy minimy, než mezi obraty v maximech.



Obr. 7: Závislost koeficientu restituice odrazu modrého hopíku na výšce od linolea s korekcí na odpor vzduchu.

Snažíte-li se vyčíst časy (ať už dopadů či dosažení maxim) ze záznamu a nemáte k dispozici rychloběžnou kameru, může se stát, že časová odlehlost jednotlivých snímků (typicky několik málo setin sekundy) bude do měření vnášet příliš velkou chybu, můžete pohyb míčku interpolovat z pozice na snímcích okolo požadovaného jevu. K tomu Vám může posloužit například program Tracker²⁴

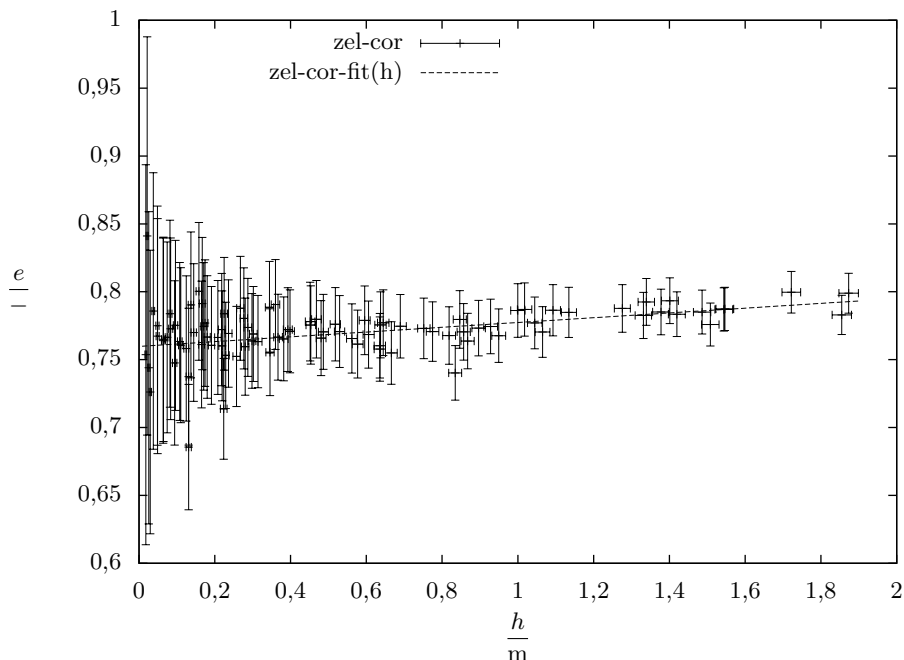
V případě vyčítání poloh maxim ze záznamu může rovněž posloužit program Tracker. Jen je zde třeba dát pozor na správnou kalibraci a zamyslet se nad perspektivou zaznamenávaného obrazu.

Komentáře k došlým řešením

Hledáme-li závislost veličiny A na veličině B , nemají typicky hodnoty $\Delta A_i = A_i - \bar{A}$ samy o sobě smysl. Rozmyslete si, že velikosti těchto hodnot jsou závislé například i na tom, jak hustě v kterých intervalech veličiny B měření provádíme. Jestli tedy tuto hodnotu dále nevyužíváte, není třeba ji uvádět.

Mnoho z Vás si neuvědomilo, že když na těleso působí proměnná síla, je třeba veličiny jako je hybnost nebo práce počítat integrálem, nikoli pouze vynásobením.

²⁴<http://physlets.org/tracker/>



Obr. 8: Závislost koeficientu restituice odrazu zeleného hopíku na výšce od linolea s korekcí na odpor vzduchu.

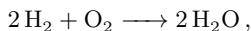
Mnoho řešitelů se rovněž rozhodlo nevynášet hodnoty do grafů. Grafy ve zpracování výsledků jsou nesrovnatelně názornější než data v tabulce. Navíc v úlohách typu *zjistěte závislost*, jako byla například i tato úloha, jsou grafy ještě více žádoucí. To platí dvojnásob, chcete-li vaše data fitovat nějakou funkcí.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Úloha VI.S ... závěrečná

6 bodů; průměr 3,07; řešilo 29 studentů

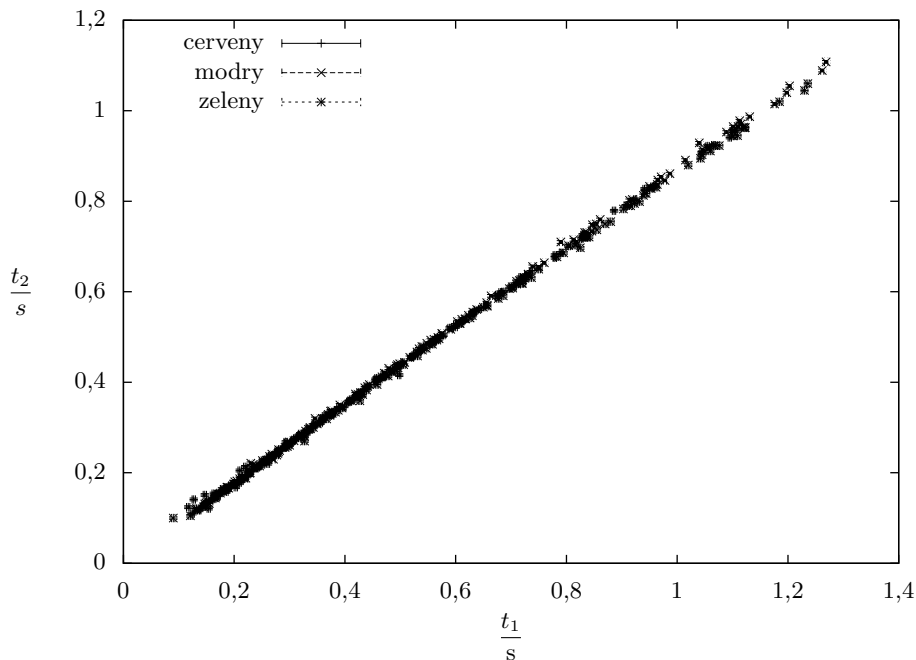
a) Najděte v tabulkách nebo na internetu, jak se změní entalpie a Gibbsova energie při reakci



kde jde o přeměnu plynů na plyn a odehrává se při standardních podmínkách. Vypočítejte také, jak se změní entropie při takovéto reakci. Výsledky udávejte vztahené na jeden mol.

b) Pro fotonový plyn platí, že tok energie skrze plochu je dán vztahem

$$j = \frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} c T^4.$$

Obr. 9: Závislost doby $(n + 1)$ -ho skoku na době n -tého skoku

Dosaďte hodnoty konstant a porovnejte výsledek se Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

- c) Vypočítejte vnitřní energii a Gibbsovu energii fotonového plynu. Dále pomocí vnitřní energie vypočítejte závislost teploty fotonového plynu na objemu při adiabatickém rozpínání, tedy při procesu s $\delta Q = 0$.

Nápověda: Zákon pro adiabatický děj s ideálním plynem jsme odvodili v druhém dílu seriálu.

- d) Vezměme si fotonový plyn. Ukažte pro $\delta Q/T$, že pokud ho vyjádříme jako

$$\delta Q/T = f_{,T}dT + f_{,V}dV,$$

tak funkce $f_{,T}$ a $f_{,V}$ splňují nutnou podmínku na existenci entropie, tedy že

$$\frac{\partial f_{,T}(T, V)}{\partial V} = \frac{\partial f_{,V}(T, V)}{\partial T}.$$

Jančí se pokusil vymyslet jednodušší úlohu než poslední.

1. Pozrieme sa napríklad do tabuľky 1 z termodynamických tabuliek na ChemWiki²⁵ Hodnoty potenciálov pre plyný H_2 a O_2 sú nula, lebo sa berú ako štandard. Pre vodnú paru

²⁵ http://chemwiki.ucdavis.edu/Reference/Reference_Tables/Thermodynamics_Tables

máme reakčnú entalpiu a Gibbsovu voľnú energiu.

$$\Delta H_{\text{H}_2\text{O}} = -241,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1},$$

$$\Delta G_{\text{H}_2\text{O}} = -228,6 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Pri reakcii sa ale vytvoria dve molekuly H_2O , takže sa pri nej zmení Gibbsova energia o $2\Delta G_{\text{H}_2\text{O}}$ a entalpia o $2\Delta H_{\text{H}_2\text{O}}$.

Zmenu entropie pri reakcii vieme vypočítať zo vzťahu

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

V našom prípade to bude (všetky hodnoty sú pri štandardných podmienkach s 25°C)

$$\Delta S = \frac{2\Delta H_{\text{H}_2\text{O}} - 2\Delta G_{\text{H}_2\text{O}}}{T} \doteq -88,5 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

V tabuľke, odkiaľ sme prevzali hodnoty, sú dané aj hodnoty entropie:

$$S_{\text{O}_2} = 205,2 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$S_{\text{H}_2} = 130,7 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$S_{\text{H}_2\text{O}} = 188,8 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Zmena entropie pri našej reakcii je rovná

$$\Delta S = 2S_{\text{H}_2\text{O}} - (S_{\text{O}_2} + 2S_{\text{H}_2}) \doteq -89,0 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

čo pekne súhlasí s predchádzajúcim výsledkom.

2. Stefanov-Boltzmannov zákon hovorí, že plošný tok tepla z čierneho telesa vypočítame ako

$$j = \sigma T^4,$$

kde $\sigma \doteq 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konštanta. My by sme ju radi porovnali s konštantou zo seriálu, ktorá je rovná

$$\frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3}.$$

Po dosadení základných konštánt skutočne dostaneme to isté číslo

$$\frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} = \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} \doteq 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}.$$

Tu treba konštanty dosadzovať na štyri platné cifry, aby sme si mohli byť istí tromi ciframi vo výsledku. Taktiež takýto výpočet nemusí fungovať na kalkulačke, kde pretečie medzivýsledok. Preto je výhodné pozbierať mocniny 10 z k_{B} , \hbar a c v jednotkách SI na papieri, dostaneme

$$\frac{(10^{-23})^4}{(10^{-34})^3 \cdot (10^8)^2} = 10^{-23 \cdot 4 + 34 \cdot 3 - 8 \cdot 2} = 10^{-6}.$$

So zvyškom si už kalkulačka ľahko poradí.

3. Poznáme volnú energiu

$$F = -\alpha VT^4$$

a teda aj tlak $p = \alpha T^4$ a entropiu $S = 4\alpha VT^3$. Pretože platí $F = U - TS$, vnútornú energiu vypočítame ako

$$U = F + TS = -\alpha VT^4 + 4\alpha VT^4 = 3\alpha VT^4.$$

Pre Gibbsovu voľnú energiu platí

$$G = F + pV = -\alpha VT^4 + \alpha VT^4 = 0.$$

V tomto prípade teda Gibbsova energia nie je termodynamický potenciál. To súvisí s tým, že fotónový plyn má nulový chemický potenciál a jeho stavové veličiny nezávisia na počte častíc.

Pri adiabatickom deji platí

$$0 = \delta Q = dU - \delta W = dU + pdV.$$

Ak vyjadríme U ako funkciu V a T , dostaneme

$$0 = d(3\alpha VT^4) + pdV = 3\alpha T^4 dV + 12\alpha T^3 V dT + \alpha T^4 dV.$$

Upravíme pomocou $d \ln(x) = 1/x$ na

$$0 = 4\alpha(T^4 dV + 3T^3 V dT) = 4\alpha VT^4 \left(\frac{dV}{V} + 3 \frac{dT}{T} \right) = 4\alpha VT^4 d(\ln V + 3 \ln T)$$

Okrem nefyzikálnych stavov s nulovým objemom alebo teplotou teda musí pri adiabatickom deji platiť

$$d(\ln V + 3 \ln T) = 0.$$

Ak je zmena funkcie nulová, táto funkcia je konštantná, pri adiabatickom deji sa teda zachováva

$$\ln V + 3 \ln T = 3 \ln \left(V^{\frac{1}{3}} T \right) = \text{konst},$$

čo je ekvivalentné tomu, že teplota klesá s tretou odmocninou objemu

$$T \propto \frac{1}{\sqrt[3]{V}}.$$

Takto sa napríklad správa fotónový plyn pri rozpínaní vesmíru.

4. V predchádzajúcom bode sme vypočítali

$$\delta Q = dU - \delta W = 4\alpha T^4 dV + 12\alpha T^3 V dT.$$

Funkcie $f_{,T}$ a $f_{,V}$ zo zadania dostaneme vydelením T

$$f_{,T} = 12\alpha T^2 V,$$

$$f_{,V} = 4\alpha T^3.$$

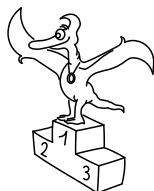
Vypočítame parciálne derivácie (vždy podľa tej druhej premennej)

$$\frac{\partial f_{,T}}{\partial V} = 12\alpha T^2,$$

$$\frac{\partial f_{,V}}{\partial T} = 12\alpha T^2,$$

ktoré sa rovnajú. Práve vďaka tomu potom existuje entropia S . Ak chcete, skúste si overiť, že jej parciálne derivácie podľa teploty a objemu sú rovné $f_{,T}$ a $f_{,V}$.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
			4	4	4	4	5	6	8	6	41	100	235
1.	Kateřina Rosická	G J. Ortena, Kutná Hora	4	4	4	3	5	4	6	2	32	86	191
2.	Ladislav Trnka	G, Havlíčkův Brod	2	4	4	4	3	1	6	3	27	67	154
3.	Josef Minařík	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	4	–	–	5	7	–	20	74	151
4.	Lucie Kundratová	G, nám. TGM, Zlín	4	4	3	–	–	5	7	–	23	70	133
5.	Jindřich Dušek	G Jana Keplera, Praha	2	4	2	2	3	5	6	2	26	58	127
6.	Jiří Blaha	G, Uherské Hradiště	4	4	4	–	–	4	–	5	21	77	109
7.	Vojtěch Laitl	G, Ostrov	2	2	2	–	–	3	–	–	9	57	91
8.	Jakub Smolka	Slezské G, Opava	2	2	3	–	–	–	6	–	13	61	89
9.	Tereza Pavlišová	G, Olomouc-Hejčín	4	4	3	–	–	3	1	–	18	56	86
10.	Ivan Hudák	ESS, Lip. Mikuláš	2	4	4	–	–	–	–	–	10	48	80
11.	Jakub Růžička	G, Nymburk	2	–	–	–	–	–	4	–	6	56	55
12.	Martin Vavřík	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	54
13.	Kristian Matušík	G, Benešov	4	2	3	–	–	4	4	–	17	43	43
14.	Ondřej Bursa	G, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	36
15.	Anna Jandová	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	29
16.–17.	Vratislav Blažek	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	26
16.–17.	David Otta	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	26
18.	Jakub Zemek	G, Uherské Hradiště	2	4	–	–	–	–	–	–	6	69	25
19.	Klára Grohmannová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	23
20.	Dominik Stejskal	G, Krnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	21
21.	Pavína Kružňková	Biskupské G, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	18
22.–23.	Pavel Junker	G F. Živného, Bohumín	2	–	2	–	–	–	2	–	6	52	17
22.–23.	Kateřina Neubergerová	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	17
24.	Kateřina Bartošová	SPŠ Ostrov n. Ohří	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	16

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	6	8	6	41	100	235
25.–26. Michal Jůza	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	15
25.–26. Adam Karas	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	15
27.–28. Matej Martaus	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	14
27.–28. Štěpán Stryja	G, Trinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	14
29.–30. Vojtěch Drška	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	13
29.–30. Tereza Knížková	G Ludka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	13
31.–32. Marek Božon	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	12
31.–32. Tomáš Piskovský	Reálné G a ZŠ, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	12
33.–34. Andrea Bínová	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	11
33.–34. Filip Korf	G Nad Stolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	11
35. Vadim Kablukov	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	9
36. Kateřina Charvátová	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	8
37. Filip Chocholatý	G, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	7
38. Michal Džubera	Matiční G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	6

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	6	8	6	41	100	235
1. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	2	4	4	4	5	5	7	5	36	89	210
2. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	2	4	5	3	4	4	6	5	33	76	171
3. Alexandr Jankov	Matiční G, Ostrava	2	4	3	2	4	4	5	4	28	75	165
4. Ondřej Knopp	G, Třeboň	2	0	–	–	5	–	–	3	10	81	164
5. Jan Lindauer	První české G, Karlovy Vary	4	4	3	2	–	4	4	2	23	65	150
6. Tomáš Dulava	Matiční G, Ostrava	2	4	3	–	4	5	7	1	26	70	143
7. Zuzana Richterová	G, Pelhřimov	2	6	2	2	3	6	5	2	28	57	135
8. Jan Šenk	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	4	4	4	5	–	–	3	22	76	125
9. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE, Vyškov	2	4	3	–	1	3	5	2	20	55	123
10. David Němec	G, Tanvald	4	0	–	–	–	–	4	–	8	72	105
11. Dominik Starý	G, Benešov	2	–	–	4	4	–	–	3	13	81	96
12. Martin Crhán	G, Studentská, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	76
13. Mikuláš Mikula	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	68
14. Matúš Kopunec	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	4	–	–	5	–	–	–	11	81	64
15. Martina Kopecká	G J. Barranda, Beroun	–	2	–	–	–	–	5	–	7	73	63
16. Šimon Karch	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	58
17. Pavla Trembulaková	G Jírovцова, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	6	–	6	55	52
18. Marek Kadlečík	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	44
19. Tomáš Faikl	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	41
20.–21. Ondřej Hajnýš	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	37
20.–21. Václav Kubíček	Archibisk. G, Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	37
22.–23. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	32
22.–23. Štěpán Kohl	Klasické a španělské G, Brno	–	4	–	–	–	–	–	–	4	82	32
24. Matej Parada	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	29
25.–26. Filip Náčovský	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	25
25.–26. Veronika Sedláková	G Masarykovo nám., Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	25
27.–29. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	–	–	4	–	–	–	–	–	4	85	22
27.–29. Hao Luan	SAIE, Shenzhen, China	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	22
27.–29. John Richard Ritter	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	22
30.–32. Tomáš Čelko	G, Považská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	16
30.–32. Martin Hejl	SPŠ a VOŠ, Písek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	16
30.–32. Tomáš Janeta	G A. Bernoláka, Námestovo	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	16
33.–34. Zuzana Urbanová	G, U Balvanu, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	15

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pílný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	6	8	6	41	100	235
33.–34. <i>Tomáš Vakoš</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	15
35. <i>Martin Komínek</i>	G, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	14
36.–37. <i>Jan Preiss</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	13
36.–37. <i>Hurum Maksora Tohfa</i>	RUMC, Dhaka, Banglade- sh	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	13
38. <i>Jan Pospíšil</i>	G Masarykovo nám., Kro- měříž	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	11

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pílný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	6	8	6	37	100	211
1. <i>Matěj Mezera</i>	G, Havlíčkův Brod	3	2	5	4	5	7	8	5	39	100	210
2. <i>Jáchym Bártík</i>	G, Havlíčkův Brod	2	2	4	4	5	7	8	6	38	97	205
3.–4. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	1	2	4	1	5	4	7	5	29	80	168
3.–4. <i>Pavol Šimko</i>	G V. Nedožerského, SR	1	2	3	3	5	5	6	3	28	82	168
5. <i>Jozef Lipták</i>	G Tajovského, B. Bystrica	1	1	4	4	5	4	8	6	33	88	167
6. <i>Štěpán Stenclák</i>	G, Trinec	1	2	5	4	5	6	7	3	33	83	166
7. <i>Petr Šimůnek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	2	4	3	5	5	6	3	30	75	154
8. <i>Andrej Kancko</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	1	2	4	1	4	3	5	2	22	66	119
9. <i>Kateřina Stodolová</i>	G Dašická, Pardubice	1	2	4	2	–	7	–	–	16	82	115
10. <i>Veronika Úlovcová</i>	Církevní G, Plzeň	2	2	4	–	5	6	4	2	25	66	114
11. <i>Matěj Rzehulka</i>	Wichterlovo G, Ostrava	1	2	5	5	–	3	4	2	22	70	105
12. <i>Klára Ševčíková</i>	G, Uherské Hradiště	1	3	3	–	3	2	4	4	20	65	102
13. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	2	4	2	4	5	6	–	24	52	100
14.–15. <i>Alžběta Andrášková</i>	G, Olomouc-Hejčín	2	2	3	–	–	3	6	–	16	69	83
14.–15. <i>Přemysl Štastný</i>	G, Žamberk	1	2	3	5	4	4	7	3	29	78	83
16. <i>Jakub Kožušník</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	3	2	2	–	–	–	11	56	79
17. <i>Jonáš Fuksa</i>	PORG, Praha	1	2	4	1	–	–	–	–	8	85	77
18. <i>Veronika Rajňáková</i>	G, Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	73
19. <i>Branislav Belko</i>	G Milana Rúfusa	1	0	2	–	–	2	–	–	5	43	71
20. <i>David Vokrouhlický</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	70
21. <i>Václav Mikeska</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	3	1	–	4	5	–	6	1	20	78	63
22. <i>Marek Raja</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	59
23. <i>Matěj Vitouch</i>	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	56
24. <i>Petra Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	53
25. <i>Jan Střeleček</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	1	1	3	1	3	4	2	1	16	48	51
26. <i>Igor Bajo</i>	G, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	50
27. <i>Vít Horáček</i>	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	48
28. <i>Martin Štyks</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	38
29. <i>František Zach</i>	G, Litomyšl	2	2	3	–	–	2	–	–	9	52	34
30. <i>Martin Hanák</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	30
31. <i>Martin Horáček</i>	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	26
32.–33. <i>Pavol Hepner</i>	G V. Nedožerského, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	24
32.–33. <i>Adam Poloček</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39	24
34. <i>Aleš Krčil</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	20
35. <i>Veronika Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	90	19
36. <i>Adam Hagara</i>	G V. Nedožerského, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	18
37. <i>Antonín Baďura</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	16
38.–39. <i>Vojtech Bečvář</i>	SŠTE Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	15

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		2	2	4	4	5	6	8	6	37	100	211
1. Peter Kubaščák	G, Kysucké Nové Mesto	1	2	4	3	4	5	4	5	28	74	146
2. Šimon Knoška	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	2	2	2	-	4	-	-	-	10	82	142
3. Petr Hrubý	G, Polička	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	96
4. Lukáš Supík	G, Třinec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93	93
5. Tomáš Hrbek	G J. Resslera, Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	-	-	77	82
6. Andrej Uhliarik	G A. Bernoláka, Námestovo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	73
7. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	57
8. Andrea Tóthová	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66	55
9. Patrik Procházka	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66	53
10. Jakub Pilař	G J. Resslera, Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	46
11. Štěpán Malec	SPŠ a VOŠ Kladno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	39
12. Jakub Marták	G Golianova, Nitra	-	1	0	-	3	-	-	-	4	37	36
13. Jozef Mišt	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	-	2	-	-	4	-	-	-	6	70	32
14. Pavel Souček	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	31
15. Jakub Jambrič	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	25
16. Martin Gažo	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94	16
17. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábľa, Levice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	15
18. Anna Linhartová	G Mikulášské n. 23, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	10
19.–21. Daniel Adamkovič	G Šrobárova, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	8
19.–21. Juraj Májek	G Grösslingova, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	8
19.–21. Júlia Matulová	G K. Sladkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	8
22. Kristína Mrázová	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	7
23. Marek Otýpka	G, Židlochovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6
24. Kryštof Kolář	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	5



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.